STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1969 - 015

De wiskunde gezien vanuit haar toepassing

door

T.M.T. Coolen

oktober 1969

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam, The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications; it is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Voorwoord

Voor u ligt het verslag van een lezing die ik op het Mathematisch Centrum in een serie interne algemeen oriënterende voordrachten heb gehouden op 16 september 1969.

Opmerkingen die in de discussie tijdens en na de voordracht zijn gemaakt, zijn voor zover ik het met die opmerkingen eens kon zijn, in dit verslag verwerkt.

Inhoud

1. Probleemstelling

Ik zal het niet hebben over wiskunde en haar toepassingen, maar over de wiskunde gezien vanuit haar toepassing. Dat is wat anders. Niet met de wiskunde onder het triomfantelijke perspectief van allerlei aanwijsbare toepassingen in de samenleving en in andere wetenschappen zal ik mij bezig houden, maar met vragen rond de activiteit van het toepassen zelf, zoals:

(i) wat is toepassing van wiskunde?

(ii) welke rol speelt daarin het mathematiese model?

(iii) hoe komt het dat de wiskunde, die toch geen empiriese wetenschap is, toch betrekking kan hebben op de empiriese werkelijkheid?

We vatten dit complex van vragen aan bij het mathematiese model.

2. Mathematies model en empiries model

We geven een bespreking van het mathematiese model en het empiriese model aan de hand van een simpel voorbeeld, waarvoor we question 16 op pagina 18 van Hammersley's artikel [1] gekozen hebben:

"'Passengers are allowed 40lb. of luggage free of charge; any amount in excess of 40lb. is charged at 3d. per lb.' If W lb. is the weight of the luggage (W is an integer) and C shillings is the cost, the regulation quoted above is equivalent to

(a) $C = 3(W+40)$; (b) $C = \frac{1}{4}(W-40)$;

(c) $C = 40+3W$; (d) $C = \frac{1}{4}W-40$."

De vier keuzemogelijkheden van deze multiple choice vraag zijn volgens Hammersley allemaal fout, ook oplossing (b).
In plaats van

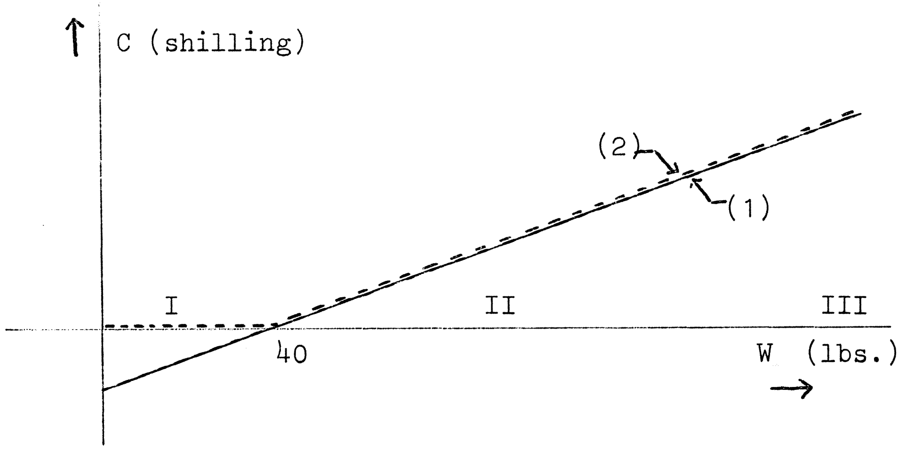
(1) $$C = \tfrac{1}{4}(W-40)$$

moet het antwoord volgens hem luiden

(2) $$\begin{cases} C = \tfrac{1}{4}(W-40) & W \geq 40, \\ C = 0 & 0 \leq W \leq 40. \end{cases}$$

We kunnen dit ook in grafiek brengen:

Figuur 1

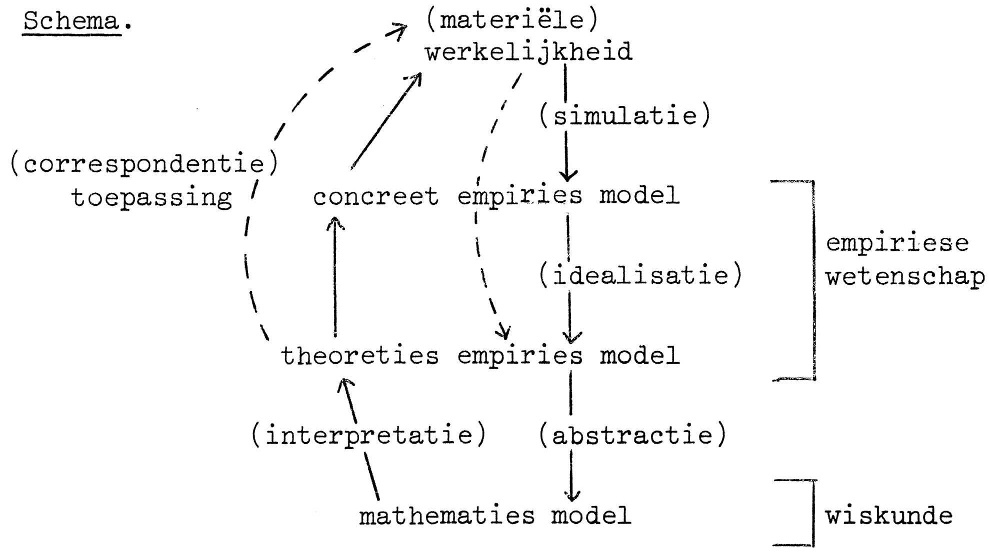


Maar heeft Hammersley wel gelijk? Is de oplossing (1) wel fout? Daartoe moeten we nagaan wat de relatie van de bovenstaande mathematiese antwoorden is met de werkelijkheid. Of beter: we gaan ons afvragen wat een mathematies model is.

De fysicus (en ook de beoefenaar van een andere empiriese wetenschap, zoals economie in bovenstaande simpele voorbeeld) drukt de resultaten van zijn onderzoekingen in getallen uit. Hierdoor is er een onmiddellijk verband met de wiskunde,waar men zich eveneens met getallen bezighoudt. We stappen van de fysica over op de wiskunde, wanneer we het getal niet meer als meetresultaat opvatten, maar als een object in een mathematies systeem, waarmee geopereerd ("gerekend") kan worden. In de wiskunde speelt de herkomst van de te manipuleren getallen geen rol meer, wat niet wil zeggen dat de toegepast-wiskundige zich niet door zogenaamde "fysiese intuïtie" kan laten leiden in zijn beoefening van de wiskunde. Maar fysiese intuïtie heeft even weinig met de wiskunde te maken als bij de Grieken de concreet op het papier getekende figuren met meetkunde te maken hadden.

De relatie tussen het tot abstract mathematies getal geworden meetresultaat en de werkelijkheid loopt via het empiriese en mathematiese model. Een <u>model</u> is iets overzichtelijks, dat gemakkelijk " in de hand ligt", en dat benut wordt om iets ingewikkelds te kunnen onderzoeken. Een model bestaat uit concrete constructies of denkconstructies, waarmee geoefend kan worden, waarmee de complexe werkelijkheid geïmiteerd kan worden totdat ze inzichtelijk, begrijpbaar en beheersbaar is geworden.

<u>Schema</u>.



<u>Toelichting</u>. Over de werkelijkheid zullen we niet zo veel zeggen. We merken slechts op dat elke empiriese wetenschap een werkelijkheid vooronderstelt, waarover ze iets te weten kan komen en voorspellingen kan doen. Wat de werkelijkheid <u>is</u>, is een vraag die buiten de competentie van de empiriese wetenschap valt.

Binnen de empiriese wetenschappen onderscheiden we het concrete model, dat materieel is, en het theoretiese model, dat uit denkconstructies bestaat. Tot de eerste soort behoren bijvoorbeeld de modellen die het Waterloopkundig Laboratorium in Delft van de Noordzee en de Deltawerken gemaakt heeft. Een ander voorbeeld is het mechaniese model van een elektronenbuis. Beide hebben de functie de werkelijkheid te simuleren, de een direct, de ander via een analogie. Het theoretiese model omvat de <u>idealiseringen</u>, zoals bijvoorbeeld de fysiese idealiseringen totaal reflecterend oppervlak, oneindig lange draad, "ideaal" gas (waarbij de moleculen als geheel veerkrachtige biljartballen zonder interactie worden gedacht), de "ideale", niet samendrukbare vloeistof, geïsoleerd systeem (in de thermodynamica); ook sociometriese matrices, sociogrammen, psychologiese meetmodellen, enquêtes en interviews moeten we tot de theoretiese modellen rekenen. Van groot belang zijn in het theoretiese model de <u>meetbare</u> grootheden: dit zijn die eigenschappen die zich laten uitdrukken in getallenreeksen (de meetresultaten).

In het mathematiese model wordt gezocht naar de mathematiese relaties tussen de uit de empirie verkregen getallenreeksen. De wiskundige abstractie gaat verder dan de empiriese idealisatie; men is in het mathematiese model dan ook minder gebonden: mathematiese operaties op objecten die corresponderen met grootheden in het fysiese model, zijn mogelijk.

Het empiriese model geeft een beschrijving van geïdealiseerde feiten, het mathematiese model geeft alleen maar <u>formele</u> betrekkingen tussen de grootheden uit het fysiese model. Het mathematiese model brengt enerzijds meetresultaten met elkaar in verband, waardoor ze hun individuele karakter verliezen, en anderzijds wordt een reeks empiriese verschijnselen in een deductief systeem "ingebed", waardoor ze in een logiese samenhang worden gebracht. En dit kan, omdat in het mathematiese model wordt afgezien van de empiriese inhoud van de meetresultaten.

Het concrete empiriese model speelt lang niet altijd een rol. In de quantummechanica bijvoorbeeld is zo'n model afwezig. Een aan dit voorbeeld zien we ook dat slechts sommige mathematiese objecten en relaties een interpretatie in het theoretiese empiriese model hebben: de Schrödinger vergelijking op zich bijvoorbeeld heeft geen directe empiriese betekenis.

Laten we terugkeren tot het vraagstuk en bovenstaande beschouwingen illustreren. Het gaat erom de op blz. 1 geciteerde uitspraak mathematies te representeren. Het mathematiese model door (1) gegeven, stemt in het gebied II overeen met het empiriese (economiese) model, de reglementen van de luchtvaartmaatschappij, en daarmee met de werkelijkheid, de al dan niet extra betalende luchtreiziger. Bij I is er geen overeenstemming. Maar nu mag men niet zeggen dat het mathematiese model fout is. Het is slechts niet voor alle gevallen waar. Nemen we het model (2), dan is er overeenstemming in zowel gebied I als II, dus voor alle gevallen.

Er rijst onmiddelijk een vraag. Hoe zien we of er een discrepantie is tussen het mathematiese en het economiese model? Binnen de wiskunde zien we dat niet. Het is pas na interpretatie dat we hierover kunnen beslissen. Wiskundig gezien is het ene wiskundige model even goed als het andere (als er tenminste geen mathematiese fouten, d.w.z. contradicties in zitten). Door vergelijking van de tot empiriese grootheden geïnterpreteerde mathematiese objecten met de meetresultaten kunnen we pas nagaan of het mathematiese model voldoet, "waar is", of preciezer: in welke gevallen het mathematiese model waar is, en wanneer niet. Nu moeten we ons niet in de war laten brengen dat de op pagina 1 geciteerde uitspraak niet een uitspraak over meetresultaten is, maar een voorschrift hoe men moet handelen. Dit verschil uit zich in de relatie tussen het empiriese model en de werkelijkheid. Het blijft zo dat we pas kunnen nagaan in welke gevallen het mathematiese model waar is, als we de geïnterpreteerde mathematiese relatie met het voorschrift vergelijken. Naarmate een mathematies model een groter deel van het empiriese model bestrijkt, zullen we het "beter" noemen. Model (2) is dus beter dan (1).

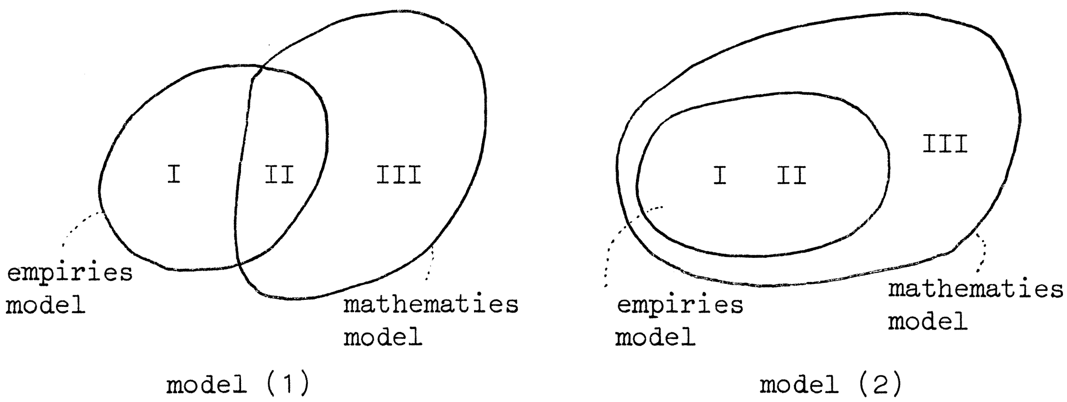
We hebben wel gezegd dat model (2) in alle gevallen met het empiriese model overeenstemt, maar is dat wel zo? Als we even aannemen dat het op pagina 1 geciteerde voorschrift onvolledig was, en dat er een maximum hoeveelheid aan bagage is die men mee mag nemen, hoeveel mag dan nog? Dat hangt van geval tot geval af, en de vliegerij ontwikkelt zich bovendien. Als we de lijnen in figuur 1 doortrekken tot in het oneindige, dan beslaat het mathematiese model alle <u>mogelijke</u> regelementen van een bepaalde klasse.

We concluderen dat

(i) een mathematies model niet noodzakelijkerwijs het gehele empiriese model hoeft te beschrijven;

(ii) een mathematies model meer dan het empiriese model kan beslaan, dat het mathematiese model een extrapolatie is van het empiriese. Of anders geformuleerd: slechts een deel van het mathematiese model hoeft een empiriese interpretatie toe te laten. Vergelijk "heel grote W" in figuur 1, (gebied III).

Laten we dit in plaatjes weergeven (figuur 2).



Figuur 2

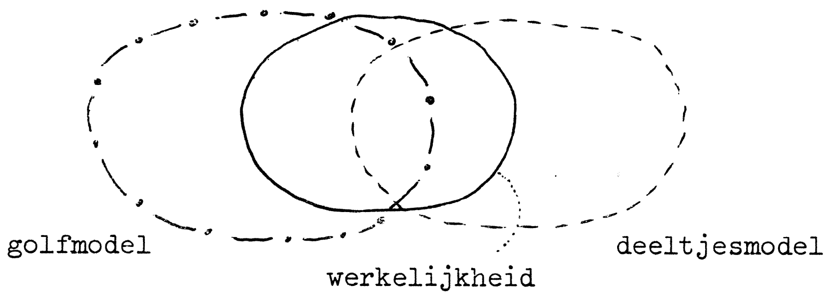
3. Model en werkelijkheid

Ik maak enkele opmerkingen.

(i) Het empiriese (economiese) model zegt: als een passagier met meer dan 40 lb. bagage meevliegt, dan moet hij voor dat gedeelte dat de 40 lb. overtreft, 3d. per lb. betalen. Het feit moet zich echter voordoen. Een niet geaccepteerde passagier vliegt niet mee. Het mathematiese model zegt niets over de realiseerbaarheid van een bepaalde situatie, maar slechts iets over hoe de formele relaties tussen de tot mathematiese objecten geabstraheerde grootheden zijn, zo die situatie zich voordoet. We kunnen dus slechts zeggen: zolang je als vallend onder de regelementen geaccepteerd wordt (werkelijkheid - empiries model), heeft het mathematiese model betrekking op de werkelijkheid (via het empiriese model), "gaat het mathematiese model op".

(ii) Het mathematiese model moet ook meer dan het empiriese model omvatten, omdat het juist van elke beperking t.a.v. de empirie wil afzien.

(iii) Meer dan één model kan dienen om de werkelijkheid te beschrijven. Als overbekend voorbeeld de complementaire theorieen over het licht: golf- en deeltjeskarakter. In beeld



Figuur 3

(iv) Bij vergevorderde empiriese wetenschappen valt ons op dat de nadruk van het empiriese model naar het mathematiese model is verschoven. Toch blijft het (theoretiese) empiriese model noodzakelijk, en wel bij de interpretatie van de gebruikte symbolen in het mathematiese model, om zo de "waarheid" van het formalisme te toetsen. Zonder de empiriese theorie is het mathematies model louter formeel: het empiriese model geeft aan welke grootheden daaruit corresponderen met de formele parameters uit het mathematiese model. Slechts via het empiriese model is het mogelijk om aan sommige formele resultaten uit het mathematiese model een zin te geven in de werkelijkheid. Misschien moeten we zeggen dat uiteindelijk het empiriese model niet meer is dan een stel correspondentieregels tussen mathematies model en werkelijkheid, zoals sommigen verdedigen [2].

(v) Als we de keten simulatie - idealisatie - abstractie volgen, bewegen we ons van het concrete naar het abstracte. Via interpretatie - correspondentie (toepassing) doen we het omgekeerde. Interpretatie van een mathematies model betekent: kijken of de langs (formeel)-mathematiese weg gevonden samenhangen in het mathematiese model een betekenis hebben in het empiriese model.

(vi) En als u mij vraagt wat de werkelijkheid in dit verband <u>is</u>, dan moet ik u zeggen dat ik dat niet weet. Alleen dit: het is een methodologies principe van elke empiriese wetenschap dat er een werkelijkheid is. En die werkelijkheid bedoel ik hier.

4. Wat betekent "formeel"?

Het woord "formeel" is al een paar keer gevallen in uitdrukkingen als formele relaties, tot formele parameters geabstraheerde fysiese grootheden. Wat bedoelen we ermee?

"Formeel" heeft zeer veel te maken met ju-ju (Hammersley [1], p. 4, die D.B. Scott citeert):

"Ju-ju: that branch of science in which, by giving names to things, we thereby acquire power over them."

Een formele eigenschap is de naam voor een empiriese (werkelijke) eigenschap, die we zo in een formele relatie met andere namen kunnen brengen. Laten we dit een beetje uitwerken:

werkelijkheid	verschijnsel, gebeurtenis in haar "volheid"
theoreties empiries model	empiriese grootheden, dat zijn die eigenschappen van verschijnselen die we met andere eigenschappen in verband willen brengen binnen de empiriese theorie
mathematies model	namen van empiriese grootheden, gemaakt tot objecten van de wiskunde. Deze namen zijn de formele parameters, de relatie tussen de namen de formele relaties

Ju-ju is dus geen tak van de wetenschap, het is een der wortels. Door dingen namen te geven kunnen we er mathematiese operaties op loslaten.

Een heel goede beschrijving van wat "formeel" betekent, vinden we bij ALGOL 60 [3], zoals uit het volgende voorbeeld blijkt:

```
begin real a, b, c, d;
      procedure w(e,f); real e, f;
                e: = f × f;
      w(a,b); w(a,c×d)
end
```

Hier heten e en f formele parameters. Of beter: de letters e en f zijn namen van formele parameters, die buiten het blok (hier de procedure) geen betekenis hebben. (Vergelijk hoe <u>buiten</u> het mathematiese model de wiskundige formules <u>op zich geen</u> zin hebben). e en f fungeren dus als namen voor dingen waarvan je niet weet <u>wat</u> ze zijn, net zoals de parameters in het mathematiese model.

En net zoals in de plaats van deze formele parameters de actuele parameters worden gezet bij de aanroep w(a,b), als de procedure wordt "toegepast", worden bij interpretatie in de plaats van de formele objecten en relaties van het mathematiese model fysiese (empiriese) grootheden gezet.

Op de vraag, hoe het mogelijk is dat wiskunde iets met de empiriese werkelijkheid te maken heeft, wil ik de volgende opmerkingen maken:

(i) We hebben reeds opgemerkt dat zowel in de wiskunde als in bijvoorbeeld de fysica getallen een grote rol spelen. Hier is een onmiddellijke band tussen wiskunde en empiries model gegeven, hoewel we voor ogen moeten houden dat het niet "dezelfde" getallen zijn die in het empiriese model en mathematiese model voorkomen.

(ii) Voorzover de wiskunde voortgekomen is uit de empiriese wetenschappen, en dan in de allereerste plaats uit de fysica, is correspondentie met de fysiese werkelijkheid niet verbazingwekkend. Maar laten we ons hierop niet verkijken. De correspondentie verloopt hier via de wiskunde<u>beoefening</u>.

(iii) De natuurwetenschappen bestuderen verschijnselen die zich in de "natuurlijke" ruimte afspelen. Ook in de wiskunde speelt het ruimtebegrip een belangrijke rol. De euclidiese ruimte is een abstractie van de werkelijke ruimte: de "ruimte van alledag" wordt genomen naar enkele aspecten, die daarna worden ontdaan van hun empiriese inhoud. Hier zien we weer een illustratie van de overgang van empiriese wetenschap naar formele wetenschap. De plaats-tijd-ruimte van de theoretiese fysica geeft aan hoe de abstracte vierdimensionale euclidiese ruimte in de moderne fysica een interpretatie heeft gekregen.

(iv) De wiskunde vraagt zich niet af of de systemen en structuren die ze onderzoekt en ontwerpt, iets met de empiriese werkelijkheid te maken hebben. Ze blijven echter <u>mogelijke</u> structuren van de werkelijkheid. Misschien komt dat door de herhalingsstructuur die de wiskunde en de empiriese wettenschappen gemeen hebben. In de wiskunde blijkt een symbool (binnen één systeem) <u>dezelfde</u> betekenis te houden. In de empiriese wetenschappen gaat men er van uit dat de werkelijkheid een herhalingsstructuur heeft. Men onderzoekt in principe alle verschijnselen, maar neemt ze in zoverre ze zich kunnen herhalen of herhaalbaar zijn.

Deze antwoorden zijn onvolledig. En via (iv) komen we tot een pregnantere formulering van de vraag die we ons hebben gesteld ten aanzien van de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid, namelijk:hoe komt het dat het formele redeneren op zich, de logica, betrekking kan hebben op de empiriese werkelijkheid? Als we de vraag zo stellen, is het antwoord wel erg gebrekking. Maar voorlopig kan ik er niet veel meer over zeggen.

<u>Wat is</u>? wordt in de praktijk niet zo vaak als vraag gesteld. Een illustratief voorbeeld is het volgende verhaal, dat zich op de Nieuwendijk afspeeld. In de tijd dat anoraks nog in de mode waren, zocht een moeder voor haar zoontje, die een anorak was beloofd, naar kleren op

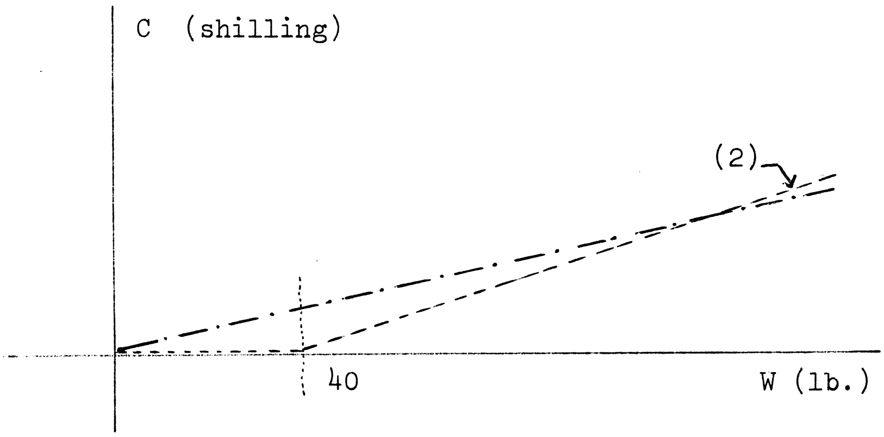
de Nieuwendijk. Zoals u weet staan op de Nieuwendijk de kleerverkopers voor hun zaak op de stoep om de klanten naar binnen te praten. Het jongetje stapt op een van deze mannen toe en vraagt: "meneer, heeft u ook een anorak?" "Natuurlijk" antwoordt de man en met brede gebaren loodst hij moeder en zoontje de winkel binnen. De man, die met het jongetje een eindje van de moeder loopt, buigt zich, eenmaal binnen, over het jongetje en vraagt: "zeg ventje, wat is eigenlijk een anorak?"

Dit is een typies voorbeeld van formeel taalgebruik: functioneel jongleren met namen waarvan je niet weet wat er mee bedoeld wordt.

5. De praktiese kracht van het mathematiese model

Allereerst een simpel voorbeeld, een vervolg op het voorbeeld van de luchtvaartmaatschappij. Stel dat ik

Figuur 4



per lb. meegenomen bagage 2d. kan verdienen, hoeveel moet ik dan meenemen om een maximale winst te krijgen? Dit is een zeer primitieve versie van een probleem uit de economie. We weten allemaal hoe we zoiets oplossen. We tekenen in figuur 1 een lijn die aangeeft hoeveel je per lb. verdient, en zien onmiddellijk uit de resulterende figuur 4 dat 40 lb. het voordeligst is. We hebben in figuur 4 een mathematies model gemaakt van het economiese probleem. De praktiese kracht van het mathematiese model bestaat kennelijk uit het volgende: in de onderzoeksfase maken we van de werkelijkheid een empiries model, abstraheren dit tot een mathematies model door de vragen in een formeel kader te plaatsen, onderzoeken in het mathematiese model de (formele) relaties tussen de (formele) parameters, en in de daaropvolgende toepassingsfase interpreteren we de formele antwoorden in empiriese uitspraken die eventueel te verifiëren zijn, of die, zoals in bovenstaand voorbeeld, ons een richtlijn tot handelen verschaffen. De kracht bestaat er dus uit, preciezer geformuleerd, dat nieuwe eigenschappen langs formele weg gevonden kunnen worden, dat juist het niet-gebonden-zijn aan de empirie nieuwe inzichten en voorspellingen over de empirie mogelijk maakt.

Hoe wordt deze kracht gebruikt? Of, m.a.w., hoe wordt de mathematiese denkwijze, en daarmee bedoelen we het denken over de empirie met behulp van mathematiese modellen, aangewend in bijvoorbeeld de fysica om de natuur te beheersen? Laat ik hierover het volgende opmerken.

(i) De mathematiese denkwijze maakt een analyties onderzoek van de natuur mogelijk.

(ii) De mathematiese denkwijze is niet alleen een analytiese, maar ook een synthetiese,opbouwende, een volledig consequent construerende denkwijze. Ze verloopt volgens bepaalde regels die geen enkele uitzondering toelaten, ze is een methode die onverbiddelijke gehoorzaamheid eist. Als we de regels van de calculus eenmaal hebben gekozen, zijn ze absoluut bindend. "Bij het eerste (het kiezen) zijn we vrij, bij het tweede zijn we knecht" (O. Becker [2], p. 27). Maar door deze zelfde gehoorzaamheid worden we geleid naar nieuwe constructies en argumenten.

(iii) Het optimaliseren (zoveel mogelijk bereiken met zo weinig mogelijk middelen) is, voorzover het vertaalbaar is in formele uitdrukkingen, typies iets dat in de wiskunde gedaan kan worden: het zoeken van maxima (minima) van functies.

(iv) (In zekere zin een herhaling wat reeds gezegd is): Dank zij de mathematiese "verwerking" van empiriese gegevens uit ons onderzoek hebben we de mogelijkheid wetmatigheden (eveneens in mathematiese termen) te ontdekken die ons in staat stellen regelend in de werkelijkheid op te treden. Hierbij moet "regelend" als volgt begrepen worden: we regelen de werkelijkheid (de natuur) genomen naar die aspecten die juist het produkt zijn van idealisatie in het empiriese (fysiese) model en abstractie in het mathematiese model.

We stellen de volgende vragen:

(i) Wat is de oorzaak van deze praktiese kracht? Voorlopig speculatief antwoord: een van de oorzaken is de vrijheid die we in het model inbouwen, een vrijheid die juist zijn uitdrukking vindt in de abstractie, in het namen geven, in de ju-ju. Hoe minder we ons in het mathematiese model vast leggen, hoe meer we er mee kunnen. Op de vrijheid komen we in 7 terug.

(ii) Betekent dit dat we naar de grootst mogelijke algemeenheid moeten streven?

(iii) Het essentiële van ju-ju is dat je niet weet waarover je praat. En we hebben gezien hoe de kracht van het mathematiese model samenhangt met het geven van namen aan dingen waarvan je nog niet weet hoe ze zich gedragen, sterker nog, waarvan je niet eens hoeft te weten of die dingen (in empiriese zin) bestaan. Parameters en samenhangen in het mathematiese model verwijzen naar <u>mogelijke</u> werkelijke eigenschappen en samenhangen. Hiermee bedoel ik niet dat die eigenschappen en samenhangen werkelijk aan te treffen zijn, maar dat vanuit het mathematiese model en empiriese model gezien het a priori niet uitgesloten is dat ze kunnen voorkomen, en dat ze gezien vanuit het mathematiese model en empiriese model de <u>enige</u> zijn die eventueel kunnen voorkomen. Vergelijk gebied III in figuur 1. Het is niet bekend of er een reiziger meevliegt met 10000 lb. bagage. Maar zo hij bestaat, d.w.z. zo de luchtvaartmaatschappij hem accepteert onder de op pagina 1 geciteerde reglementen, dan doet het mathematiese model een uitspraak over hem (of liever, over wat hij moet betalen). Een vraag die zich opdringt is:

Is dan niet de hele wiskunde ju-ju?

Op deze vragen komen we terug. Maar eerst een wiskundig intermezzo.

6. Irreversibele natuur en reversibele wiskunde

We beschouwen het probleem van de warmtegeleiding in een staaf van lengte π. Laat u de temperatuurverdeling voorstellen, t de tijd en x de plaatscoördinaat, dan is dit probleem mathematies weer te geven als

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = \xi(x) & 0 < x < \pi \text{ (beginvoorwaarde)}, \\ u(\pi,t) = u(0,t) = 0 & t > 0 \text{ (randvoorwaarde)}, \end{cases}$$

waarin we de begintemperatuurverdeling $u(x,0)$ als bekend aannemen. Dit is een bekend probleem, dat voor "redelijke" functies $\xi(x)$ oplosbaar is, d.w.z. u is eenduidig bepaald voor $t > 0$, en hangt bovendien op stabiele wijze af van begin- en randvoorwaarden.

Beschouw nu het "inverse" probleem. d.w.z. de temperatuurverdeling te bepalen op een tijdstip $t < T$ als deze bekend is op $t = T > 0$; mathematies weergegeven:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\ u(x,T) = \chi(x) & 0 < x < \pi \text{ ("eind"-voorwaarde)}, \\ u(\pi,t) = u(0,t) = 0 & 0 < t < T \text{ (randvoorwaarde)}. \end{cases}$$

Bovenstaand mathematies model blijkt, zie [4], in het algemeen geen oplossing toe te laten, en zo dat wel het geval is, is de oplossing niet stabiel. Daarom zullen we proberen een ander mathematies model op te stellen [4].

We vervangen het mathematiese model (4) door het volgende model ($\varepsilon > 0$):

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} - \varepsilon\,\dfrac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4} = 0 & \begin{array}{l} 0 < x < \pi \\ 0 < t < T, \end{array} \\ u_\varepsilon(x,T) = \chi(x) & 0 < x < \pi \text{ ("eind"-voorwaarde)}, \\ u_\varepsilon(\pi,t) = u_\varepsilon(\pi,t) = 0 & 0 < t < T \text{ (randvoorwaarde)}, \\ \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(\pi,t) = \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(0,t) = 0 & 0 < t < T. \end{cases}$$

Er kan bewezen worden dat dit mathematiese probleem wel een eenduidige oplossing toelaat die stabiel is, zie hiervoor [4]. Als $\varepsilon \to 0$ dan convergeert $u_\varepsilon(x,t)$ in het algemeen niet. Maar wel geldt het volgende: laat U_ε de oplossing zijn van het probleem

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial x^2} = 0 & 0 < t < T, \\ U_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon(x,0) & 0 < x < \pi, \\ U_\varepsilon(0,t) = U_\varepsilon(\pi,t) = 0 & 0 < t < T, \end{cases}$$

dan blijkt dat

$$U_\varepsilon(x,T) \to \chi(x) \quad \text{als} \quad \varepsilon \to 0$$

in een zekere zin die we hier in het midden laten. Het mathematiese model voor het "inverse" probleem zit dus nu als volgt in elkaar: het systeem (5) heeft een (mathematiese) oplossing $u_\varepsilon(x,t)$, $0 \le t \le T$, $0 \le x \le \pi$. Bepaal hieruit $u_\varepsilon(x,0)$, en zet deze functie in het (mathematiese) probleem (6) als beginvoorwaarde, dat op zijn beurt een (mathematiese) oplossing heeft, t.w. $U_\varepsilon(x,t)$. We kunnen bewijzen dat (6) een proces beschrijft dat als eindtemperatuurverdeling bij benadering $\chi(x)$ heeft. Wat hebben we nu gevonden? Dat $u_\varepsilon(x,t)$ geïnterpreteerd kan worden als een grootheid die bij benadering het "inverse" proces beschrijft, zo dat zou bestaan.

Nu is (5) maar een voorbeeld van een mathematies model dàt zo-iets bewerkstelligt. En ook, die keuze van de ε, als we de mathematiese oplossing van (5) langs numerieke weg zoeken, ligt niet vast, zal "met de natte vinger" gekozen moeten worden.

Hoe komt dit alles; en waartoe dient dit mathematies intermezzo?

Het proces van de warmtegeleiding, waarvan (3) het mathematiese model is, is een irreversibel fysies proces, d.w.z. dat de richting van de tijd slechts van "vroeger" naar "later" mag verlopen (voorwaarts). Vandaar dat (3) nooit een mathematies model kan zijn voor het "inverse" probleem, de temperatuurverdeling te vinden vóór een bepaald tijdstip, als hij op dat tijdstip bekend is, omdat dit laatste proces in de natuur niet bestaat (of beter: in het empiriese model als niet-bestaand wordt aangenomen). En toch willen we de uitgangssituatie weten als de eindsituatie bekend is. We zorgen ervoor een "schijnproces" te beschrijven dat wel toelaat achterwaarts in de tijd te rekenen. En dan is het vanzelfsprekend dat het mathematiese model hiervoor een andere gedaante moet hebben dan (3), omdat (3) slechts irreversibele processen beschrijft. Om op deze manier de beginsituatie uit de eindsituatie te bepalen,heet de methode van de quasi-reversibiliteit. Essentieel is dat er oneindig veel manieren zijn om "schijnbaar" achteruit in te tijd te rekenen. Met "schijnbaar" wordt dan hier bedoeld: je mag de formele parameter t in je mathematies model van $t = T > 0$ naar $t = 0$ laten lopen, maar deze t is niet te interpreteren als de fysiese tijd.

We hebben een mathematies model gemaakt dat ons in staat stelt iets te zeggen over het verleden, uitgaand van een bekend heden. Maar van dit mathematiese model blijkt slechts zeer weinig fysies interpreteerbaar. Het is een voorschrift om een functie te benaderen die empiriese inhoud heeft d.m.v. een procedure die geen empiriese inhoud heeft.

Zoals we al zeiden, in het mathematiese model kan meer dan in het empiriese model. We hebben ons vrij gemaakt van het empiriese, door t als formele parameter op te vatten. Bovendien hebben we in het model een vrijheid ingebouwd, namelijk de keuze van de grootte van de parameter ε, waardoor we het mathematiese model kunnen laten slaan op een heleboel empiriese modellen.

7. Model en vrijheid

(i) "Vrijheid" zijn we reeds eerder tegengekomen, en wel bij het mathematiese model van het reglement over het vervoer van bagage door de vliegtuigmaatschappij.Door in het mathematiese model niet aan te geven waar II eindigt, houden we de vrijheid het mathematiese model toepasbaar te verklaren voor alle zich voordoende gevallen. Door het mathematiese model zodanig te maken dat het een mathematies model is bij een aantal empiriese modellen (hier reglementen die alle een verschillende maximale hoeveelheid bagage toelaten) hebben we ons t.a.v. een aspect van deze empiriese modellen vrijgemaakt. We bekopen dit natuurlijk met een verlies aan informatie, nl. de maximale hoeveelheid bagage.

Iets dergelijks gebeurt bij fysiese wetten: door deze te formuleren in de als-dan-vorm (als ..... dan .....) maak je je vrij van een individueel voorval. Maar de wet zelf zegt er dan ook niets over <u>of</u> aan de voorwaarden in het als-deel wel eens in de werkelijkheid voldaan is. De fysiese wet <u>gaat er van uit</u> dat dat zo is.

We hebben reeds gezien (blz. 13) dat het niet-gebonden-zijn aan de empirie ons in het mathematiese model zo veel mogelijkheden verschaft om tot nieuwe inzichten en voorspellingen t.a.v. de empirie te komen. Een voorwaarde in het empiriese model (fysies model) moet in de werkelijkheid realiseerbaar zijn (of beter: moet verwijzen naar een realiseerbare toestand van de natuur). Een voorwaarde in het mathematiese model hoeft niet te verwijzen naar iets realiseerbaar <u>buiten</u> het model. We kunnen dan ook de regels van het mathematiese model naar eigen inzicht opstellen, en als we maar deze regels in acht nemen, is elke voorwaarde die we stellen toelaatbaar.

(ii) Als we een actuele parameter in de plaats zetten van een formele, dan oefenen we onze vrijheid uit: we doen namelijk een keuze welke actuele parameter (uit en bepaalde klasse) we erin zullen zetten. Gebruik van vrijheid veronderstelt mogelijkheid tot vrijheid. De formele parameter geeft nu precies die vrijheid aan. We geven iets een naam, doen daar van alles mee, maar zeggen lekker nog niet waar die naam op slaat.

(iii) Analoog bij ons "inverse" warmteprobleem. We maken een model met een vrijheid erin, en doen alsof we de vrijheid al gebruikt hebben. Want hierdoor wordt de vrijheid in het mathematiese model gekarakteriseerd: nog niet gekozen hebben, en doen alsof al gekozen is.

(iv) We kunnen misschien nog meer duidelijk maken aan de hand van de reële getallen. Waarvoor hebben wij eigenlijk irrationale getallen nodig bij het onderzoek van de empirie m.b.v. mathematiese modellen? Zouden we niet zonder kunnen? Als argumenten die hiervoor pleiten zou men kunnen aanvoeren:

- Heeft u weleens een lengte van $\sqrt{2}$ cm gezien? De diagonaal van een vierkant met zijde 1 cm, zult u zeggen, heeft die lengte. Maar evenmin als er een vierkant met zijde 1 cm voorkomt in de werkelijkheid, maar slechts bijv. met zijde 1.00 cm, zo bestaat er evenmin een lengte van $\sqrt{2}$ cm, maar slechts een van 1.41 cm. We kunnen ons beide lengtes wel denken.
- Trouwens, elke fysies (empiries) meetresultaat wordt gerepresenteerd door een rationaal getal, immers elk meetresultaat ontstaat door telling van schaalstrepen en eventueel verdelen (in tienen) van de witte ruimtes ertussen. Dit laatste is overigens eigenlijk tellen van niet weergegeven strepen.
- Sinds de opkomst van de elektroniese rekenapparatuur worden deze argumenten nog versterkt door het feit dat in een rekenmachine irrationale getallen (en ook vele rationale) niet representeerbaar zijn. In een rekenmachine zijn slechts een eindig aantal getallen gerepresenteerd. De X8 op het Mathematisch Centrum kent als kleinste verschil tussen twee getallen 10^{-626}. Maar we hebben ook geen enkele behoefte aan een grotere nauwkeurigheid. In ALGOL 60 spreekt men wel van "reals", maar het zijn eigenlijk "rationals".

Nu zijn er mathematiese modellen over de natuur denkbaar die volledig op het rationale getal gebaseerd zijn. Tenslotte is elk irrationaal getal willekeurig dicht door een rationaal getal te benaderen. Maar het mathematiese model zou dan wel zo gecompliceerd zijn (denk eens aan de mechanica), dat wij er niet zoveel inzicht door zouden krijgen.

We stuiten hier op de rol die de generalisatie speelt in de wiskunde. Generalisatie is de overgang van bijvoorbeeld een bewering (of begrip) tot een meer algemene bewering (of begrip), waarvan dan de eerste een bijzonder geval is. Zo is het reële getal een generalisatie van het begrip rationaal getal. Generalisatie gebeurt altijd ten aanzien van bepaalde eigenschappen, die we dan kennelijk belangrijker vinden dan andere, die bij generalisatie verloren gaan. Zo wordt er bij de generalisatie van rationaal getal tot reëel getal het feit dat een rationaal getal te schrijven is als het quotiënt van twee natuurlijke getallen (hetgeen overeenkomt het vergelijken van twee onderling meetbare lengtes) overboord gegooid, terwijl we de operaties op de getallen en de orderelaties bijvoorbeeld willen handhaven. Generalisatie is onmisbaar bij het zoeken naar wiskundige structuren.

Meer dan dit wil ik over het moeilijke probleem van de generalisatie niet zeggen. Waar ik nu op wil wijzen is dat het ook bij het mathematiese model prettig is om reële getallen tot je beschikking te hebben. Dan heb je namelijk nog de vrijheid om te kiezen welke nauwkeurigheid je bij toepassing in de empirie wilt hebben. Vergelijk bijvoorbeeld een verzameling onderling weinig verschillende steeksleutels met een engelse sleutel. In je mathematies model leg je je dus niet vast t.a.v. de meetnauwkeurigheid. Binnen een mathematies model is dan op formele wijze de vrijheid t.a.v. de nauwkeurigheid bij toepassing in de werkelijkheid gerealiseerd.

(v) Zou dit in uiterste consequentie betekenen dat we moeten streven naar een zo groot mogelijke algemeenheid van de mathematiese modellen? Het "beste" model is dat, dat de gehele werkelijkheid beslaat. Of niet?

(vi) Een homeostaat is een apparaat dat in staat is er voor te zorgen dat bepaalde "kritiese" variabelen binnen bepaalde grenzen blijven ondanks verstoringen in andere variabelen. Een voorbeeld van een homeostatiese regeling is de regulatie van de lichaamstemperatuur van de mens. Naarmate een homeostaat meer vrijheidsgraden heeft, kan hij effectiever, en in meer gevallen, zijn evenwicht herstellen. Alleen ook: hoe gecompliceerder hij is, hoe meer tijd het kan kosten. Homeostatiese regeling is een generalisatie van terugkoppeling.

Geeft deze overweging ons enige richtlijn bij het beantwoorden van de vraag: hoe algemeen moet een mathematies model zijn om effectief <u>en</u> "prakties" te zijn? Hoe algemener de wiskunde van het mathematiese model immers, in des te meer gevallen is zij te gebruiken bij het opstellen van andere mathematiese modellen, en ook kan dit mathematiese model in des te meer gevallen dienen als mathematies model bij een empiries model. Het is toch prachtig dat zowel de geleiding van warmte in een plaat, als het verspreiden van geruchten in dichtbevolkte gebieden door één en hetzelfde mathematiese model beschreven kunnen worden?

(vii) Hammersley onderscheidt in zijn artikel [1] <u>harde</u> en <u>zachte</u> wiskunde. Ik wil zijn onderscheid als volgt interpreteren: harde wiskunde is die wiskunde waarin geprobeerd wordt een <u>van te voren</u> gegeven of gesteld probleem op te lossen; dit probleem hoeft niet als aanleiding een probleem buiten de wiskunde te hebben, het kan net zo goed een van te voren gesteld "zuiver" wiskundig probleem zijn; zachte wiskunde is de wiskunde waarbij er zo'n probleem niet is, waarbij de aannames en de axioma's worden gewijzigd, of enkele ervan worden weggelaten, om te kijken wat voor effect dat zal hebben, kortom waarbij aan de aannames en axioma's wordt"geknoeid" en de oplosbare problemen later aangegeven worden. Dat dit soort wiskunde tot excessen kan leiden illustreert hij als volgt ([1], blz. 15):

> "(...) the rat-race to promotion by weight of publication rather than content is an unhappy modern development. Dr. A.K. Austin's satire [8] is uncomfortably close to the truth:

> 'The advent of Modern Mathematics in the educational limelight has produced an interest in the work of the professional mathematician and in the question, "How can one do research in mathematics?" The following passage formed the introduction to a recent research paper and indicates to some extent the line taken by a number of mathematicians ... A.C. Jones in his paper "A Note on the Theory of Boffles" ... asked if every Biffle was reducible. C.D. Brown ... answered in part this question by defining a Wuffle to be a reducible Biffle and was then able to show that all Wuffles were reducible ... T. Brown in "A collection of 250 papers on Woffle Theory dedicated to R.S. Green on his 23rd Birthday" defined a Piffle to be an infinite multivariable subpolynormal Woffle which does not satisfy the lower regular Q-property. He stated, but was unable to prove, that there were at least a finite number of Piffles ...'
>
> You may not believe in boffles and piffles; but some very quaint titles do crop up. On the same day as I write this (so it is not an unusual event) I have received a paper in which there is a (genuine and respectable) reference to 'Generalized rabbits for generalized Fibonacci numbers', Fibonacci Quarterly (in the press)."

We hebben gezien dat het niet-gebonden-zijn aan de empirie "prakties" was: het hielp ons verder t.a.v. de empirie.Wanneer is de tendens naar algemeenheid "prakties", en wanner slechts "soft intellectual trash", zoals Hammersley's kwalificatie van sommige wiskunde luidt?

Zo gemakkelijk is deze vraag niet te beantwoorden. We zagen immers dat hoe algemener een model, hoe meer toepassingsmogelijkheid het heeft, maar hoe minder duidelijk zijn toepassing gegeven is. Een ding kunnen we wel zeggen: verbijzonderingen van algemene theorieën die "niets" te maken hebben met de empiriese werkelijkheid, kunnen leiden tot excessen zoals gesignaleerd door Austin in bovenstaand citaat.

De termen hard en zacht suggereren dat harde wiskunde de bruikbare is, en zachte "niet meer dan moderne kunst". Zo eenvoudig liggen de zaken niet. Het knoeien aan axioma's is toch zeer belangrijk:

generalisatie berust tenslotte ook op een dergelijk knoeien aan axiomastelsels, namelijk het weglaten van enige.

(viii) Naarmate het mathematiese model algemener is, is meer vrijheid in het model ingebouwd, d.w.z. is er meer vrijheid op zodanige formele wijze gerealiseerd, dat we mogen doen alsof we die vrijheid hebben gebruikt, terwijl wij dat pas later zullen doen. Of nog anders geformuleerd: is meer vrijheid met betrekking tot het model, die ik op blz. 14 onder punt (ii) noemde, omgezet in vrijheid binnen het model. De vrijheid die binnen het model valt, uit zich als een zekere vorm van mathematiese macht. We hebben het maar voor het kiezen. Maar niet alle vrijheid komt in het model terecht, zo lang we niet het wereldmodel ontworpen hebben. En het is maar de vraag of dat kan.

8. Samenvatting

Ik heb geprobeerd u te dwingen de wiskunde vanuit zijn toepassing te zien.

Om er enigzins achter te komen hoe de werkelijkheid en de wiskunde iets met elkaar te maken hebben, bespraken we het empiriese en het mathematiese model. Op deze vraag, hoe de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid is, heb ik slechts een voorlopig antwoord gegeven; discussie lijkt mij op zijn plaats.

Ook de vraag, wat de oorzaak van de praktiese kracht van het mathematiese model is, kreeg slechts een voorlopig antwoord, waarbij naarstig gezocht is naar de rol die "vrijheid" hierin speelt. Ik heb gesteld dat naarmate het mathematiese model algemener is, er meer vrijheid binnen het model valt. Het probleem blijkt niet alleen te zijn: hoe algemeen kan wiskunde zijn om nog prakties te zijn, maar ook: hoe algemeen moet ze zijn om prakties te zijn. Ook over deze vragen adviseer ik discussie.

Verder heeft u wel uit mijn betoog begrepen dat ik als grondslag van de wiskunde zie de "ju-ju", d.w.z. het verwerven van macht over dingen door ze een naam te geven. Maar dat geeft dan ook helemaal niets. Integendeel: hierin bestaat juist het magiese hart van onze techniek.

Referenties

[1] Hammersley, J.M. — On the enfeeblement of mathematical skills by "modern mathematics" and by similar soft intellectual trash in schools and universities. Bull. of the Inst. of Math. and its Appl. 1968, p. 66-85.

[2] Becker, O. — Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise. München 1959.

[3] Naur, P. (ed.) — Revised Report on the Algorithmic Language ALGOL 60. Regnecentralen, Copenhagen 1962.

[4] Lattès, R., Lions, J.R. — Méthode de quasi-reversibilité. Paris 1967.

[5] Bertels, K., Nauta, D. — Inleiding tot het modelbegrip. Bussum 1969.

[6] Poincaré, H. — La valeur de la science. Paris ± 1900.

[7] Kuipers, A. — Model en inzicht. Assen 1959.

[8] Austin, A.K. — Modern research in mathematics. Math. Gaz. 51 (1967) p. 149-150.