STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957-016

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Dr. W. Peremans

28 september 1957

Volledigheid van holomorfen

1957

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1957-016

Volledigheid van holomorfen

door

Dr W. Peremans

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

28 september 1957

Een groep G heet volledig, als het centrum van G alleen uit het eenheidselement bestaat en alle automorfieën van G inwendig zijn.

Een volledige groep is isomorf met zijn eigen automorfieëngroep. Voor iedere groep G geldt n.l., dat de afbeelding, die aan ieder element de corresponderende inwendige automorfie toevoegt, een homomorfe afbeelding van G op de groep van zijn inwendige automorfieën oplevert; de kern van deze homomorfie is het centrum van G. Als dus G geen centrum heeft is de homomorfie een isomorfie; als er bovendien geen uitwendige automorfieën zijn, is het een isomorfie op de automorfieëngroep.

Deze bewering is niet omkeerbaar: er bestaan niet-volledige groepen, die isomorf zijn met hun eigen automorfieëngroep, b.v. het directe product van een groep van orde 2 en de symmetrische groep S_3.

De volgende eigenschap is echter karakteristiek voor volledige groepen.

Een groep G is dan en slechts dan volledig, als iedere groep G^*, die G als normale ondergroep bevat, G als directe factor bevat.

Een van de groepen, die een gegeven groep G als normale ondergroep bevat is de holomorf van G. Deze kan als volgt gedefinieerd worden.

We noteren automorfieën van G als linksmultiplicatoren; dus het beeld van het element a van G onder de automorfie α wordt met αa aangeduid. Dienovereenkomstig betekent $\alpha\beta$ de automorfie, die ontstaat door eerst β en dan α uit te voeren. Elementen van G worden met Latijnse letters geschreven (eenheidselement =e), automorfieën van G met Griekse letters (identieke automorfie =1). De automorfieëngroep van G wordt met A(G) aangeduid.

Als elementen van de holomorf $K(G)$ van G nemen we alle paren (a,α) met $a \in G$, $\alpha \in A(G)$. Vermenigvuldiging wordt in $K(G)$ gedefinieerd door

$$(a,\alpha)(b,\beta) = (a(\alpha b), \alpha\beta).$$

Het is eenvoudig te verifiëren, dat deze vermenigvuldiging $K(G)$ tot een groep maakt; het eenheidselement van $K(G)$ is $(e,1)$ en de inverse van (a,α) is $(\alpha^{-1}a^{-1},\alpha^{-1})$. Verder bevat $K(G)$ de normale ondergroep G', bestaande uit de paren $(a,1)$, welke isomorf is met G en dus met G kan worden geïdentificeerd. De belangrijkste eigenschap van de holomorf is de volgende:

Iedere automorfie α van G wordt geïnduceerd door de inwendige automorfie van $K(G)$, corresponderend met (e,α).

Men kan nu de vraag stellen in hoeverre iedere groep, die een directe factor in zijn holomorf is, volledig is. Een partieel antwoord op deze vraag is bevat in de volgende stelling van Rédei:

Als een groep G directe factor in zijn holomorf is, dan is G volledig of het directe product van een groep van orde 2 en een volledige groep.

Van deze stelling heb ik de volgende generalisatie bewezen.

Stelling 1. Een groep G is dan en slechts dan directe factor in zijn holomorf als G volledig is of het directe product van een groep van orde 2 en een volledige groep zonder ondergroepen van index 2.

Op grond van deze stelling verkrijgen we een niet-volledige groep die directe factor in zijn holomorf is door uit te gaan van een volledige groep zonder ondergroepen van index 2 en deze direct te vermenigvuldigen met een groep van orde 2. Een triviaal voorbeeld krijgen we door een groep van orde 1 te nemen; deze is volledig en heeft geen ondergroepen van index 2. Inderdaad is een groep van orde 2 directe factor in zijn holomorf, want hij valt samen met zijn holomorf. We citeren nu enkele voorbeelden van volledige groepen uit de literatuur.

De symmetrische groep S_n met n een willekeurig eindig of oneindig cardinaalgetal is volledig, behalve voor $n=2$ en $n=6$. Voor oneindige n heeft S_n geen ondergroepen van index 2 (Hölder, Schreier en Ulam, Baer).

De automorfieëngroep van een niet-abelse elementaire groep is volledig (een groep heet elementair als hij geen echte karakteristieke ondergroepen heeft)(Burnside).

Als G een eindige groep zonder centrum is, dan is er een natuurlijk getal n waarvoor de n^e geïtereerde automorfieëngroep $A^n(G)$ (gedefinieerd door $A^n(G)=A(A^{n-1}(G))$ en $A^1(G)=A(G)$) volledig is (Wielandt).

De holomorf van een eindige abelse groep van oneven orde is volledig (Miller).

We gaan nu proberen dit laatste voorbeeld te generaliseren. We merken daartoe eerst op, dat uit bekende eigenschappen van de holomorf makkelijk volgt, dat de holomorf van een niet-abelse groep nooit volledig is. We beperken ons dus nu verder tot abelse groepen G en gebruiken voor de groepoperatie in G voortaan een additieve notatie. De productdefinitie in de holomorf K(G) wordt dan

$$(a,\alpha)(b,\beta) = (a+\alpha b, \alpha\beta),$$

het eenheidselement van K(G) is (0,1) en de inverse van (a,α) is $(-\alpha^{-1}a,\alpha^{-1})$.

Het algemene probleem, welke abelse groepen een volledige holomorf hebben, kan ik niet oplossen. Het opereren met de holomorf blijkt echter bijzonder glad te verlopen als we mogen veronderstellen, dat de afbeelding $x \to 2x$ in G een automorfie is (deze automorfie duiden we met 2 aan). Dit betekent, dat G geen elementen van orde 2 heeft en dat ieder element van G een tweevoud is. Voor eindige G betekent dit, dat G oneven orde heeft. Men zou nu de volgende generalisatie van de stelling van Miller kunnen vermoeden: iedere abelse groep, waarin 2 een automorfie is, heeft een volledige holomorf. Dit vermoeden blijkt echter onjuist te zijn. Ik heb echter wel een noodzakelijke en voldoende voorwaarde kunnen opstellen opdat een groep, waarin 2 een automorfie is, een volledige holomorf heeft. Let wel dat over groepen, waarin 2 geen automorfie is, niets beweerd wordt. Voor het gemak van formulering geven we voorwaarden voor het niet-volledig zijn van de holomorf.

Als G_1 en G_2 abelse groepen zijn, dan kan de collectie van alle homomorfe afbeeldingen van G_1 in G_2 op een voor de hand liggende wijze tot een additieve abelse groep worden gemaakt, die we met $Hom(G_1,G_2)$ aanduiden.

<u>Stelling 2.</u> Van een abelse groep G, waarin 2 een automorfie is, is de holomorf dan en slechts dan niet volledig, als G directe som is van twee ondergroepen B en C, waarbij B en C aan de volgende voorwaarden voldoen:

1° $B \neq 0$.

2° $\mathrm{Hom}(C,B)=0$.

3° Er bestaat een isomorfe afbeelding $x \rightarrow \sigma(x)$ van B op $\mathrm{Hom}(B,C)$.

4° Er bestaat een functie $f(x)$ $(x \in B,\ f(x) \in B)$, die B <u>op</u> B afbeeldt dusdanig dat $\sigma(x)y=\sigma(y)f(x)$ voor alle $x,y \in B$.

De stelling van Miller is gemakkelijk uit stelling 2 af te leiden. Het is n.l. eenvoudig in te zien dat $\mathrm{Hom}(G_1,G_2)=0$ voor eindige groepen G_1 en G_2 dan en slechts dan geldt als de ordes van G_1 en G_2 relatief priem zijn. Veronderstel nu dat G een eindige abelse groep van oneven orde met een niet-volledige holomorf is. Dan is G volgens stelling 2 directe som van groepen B en C, die aan 1°-4° voldoen. Uit 2° volgt dat de ordes van B en C relatief priem zijn. Dan is $\mathrm{Hom}(B,C)=0$ en op grond van 3° is dan ook $B=0$ in strijd met 1°.

Aan de andere kant kan een voorbeeld van een groep die aan de voorwaarden van stelling 2 voldoet en dus een niet-volledige holomorf heeft als volgt worden verkregen. Neem een oneven priemgetal p en neem voor B een cyclische groep van orde p en voor C een quasi-cyclische groep van type p (een realisering van deze groep in multiplicatieve schrijfwijze kan men verkrijgen door alle p^ne eenheidswortels voor variabele natuurlijke n te nemen). Het is makkelijk te verifiëren, dat deze groepen aan 1°-4° voldoen en dat in hun directe som 2 een automorfie is.

Dat de voorwaarden, die in stelling 2 voorkomen, vrij zwaar zijn blijkt uit de volgende stelling, waarin enkele klassen van groepen worden aangegeven die een volledige holomorf hebben.

<u>Stelling 3</u>. Een abelse groep G, waarin 2 een automorfie is, heeft een volledige holomorf, als aan minstens één van de volgende drie voorwaarden is voldaan:

<u>A</u>. G is direct onontbindbaar.

<u>B</u>. G is directe som van cyclische groepen.

<u>C</u>. G is een deelbare groep (d.w.z. $G=nG$ voor alle natuurlijke n).

Het spreekt vanzelf dat geval B opnieuw de stelling van Miller levert. Een aardig voorbeeld van een groep die aan A en C voldoet is de additieve groep R van de rationale getallen. Het is bekend dat A(R) isomorf is met de multiplicatieve groep van de rationale getallen $\neq 0$. Vormen we nu de groep bestaande uit de paren (a,b) met a en b rationale getallen en $b \neq 0$ met vermenigvuldiging gedefinieerd door

$$(a,b)(c,d) = (a+bc,bd),$$

dan is deze groep volledig.

Ter illustratie van het gebruik, dat we van de automorfie 2 kunnen maken, zullen we nu het bewijs van een klein (en reeds lang bekend) gedeelte van stelling 2 geven.

Laat G een abelse groep zijn, waarin 2 een automorfie is; laat A de automorfieëngroep van K(G) zijn, I de groep van de inwendige automorfieën van K(G) en J de groep van die automorfieën van K(G) die G op zichzelf afbeelden. Omdat G een normale ondergroep van K(G) is, geldt $I \subset J \subset A$. Er moet onderzocht worden in hoeverre I=A is. Dit onderzoek kan gesplitst worden in de vragen in hoeverre I=J en in hoeverre J=A is. We zullen nu bewijzen dat I=J is. Als dat gebeurd is is de vraag in hoeverre een automorfie inwendig is, teruggebracht tot de vraag in hoeverre een automorfie G op zichzelf afbeeldt.

Laat χ een automorfie van K(G) zijn, die G op zichzelf afbeeldt; we moeten bewijzen dat χ inwendig is. Het spreekt vanzelf dat we χ met een inwendige automorfie van K(G) mogen vermenigvuldigen en bewijzen dat het product inwendig is. Nu induceert χ op G een automorfie van G; omdat K(G) de holomorf van G is, bestaat er ook een inwendige automorfie van K(G), die op G dezelfde automorfie induceert. Door χ met de inverse van deze inwendige automorfie te vermenigvuldigen, krijgen we een automorfie, die op G de identieke afbeelding induceert.

We mogen dus zonder beperking van de algemeenheid aannemen dat χ op G de identieke afbeelding induceert. Dus

$$\chi\,(a,1) = (a,1).$$

Stel nu

$$\chi\,(0,\alpha) = (f(\alpha),\ \varphi(\alpha)).$$

Omdat $(a,\alpha)=(a,1)(0,\alpha)$ is χ door de functies $f(\alpha)$ en $\varphi(\alpha)$ vastgelegd. Nu is

$$(0,\alpha)(a,1) = (\alpha a,\alpha) = (\alpha a,1)(0,\alpha),$$

dus

$$(f(\alpha),\ \varphi(\alpha))(a,1) = (\alpha a,1)(f(\alpha),\ \varphi(\alpha)),$$

$$(f(\alpha) + \varphi(\alpha)a,\ \varphi(\alpha)) = (\alpha a + f(\alpha),\ \varphi(\alpha)),$$

$$\varphi(\alpha)a = \alpha a.$$

Omdat dit voor alle $a \in G$ geldt is $\varphi(\alpha) = \alpha$ voor alle $\alpha \in A(G)$.
Verder is

$$(0,\alpha_1\alpha_2) = (0,\alpha_1)(0,\alpha_2),$$

dus

$$(f(\alpha_1,\alpha_2),\ \alpha_1\alpha_2) = (f(\alpha_1),\alpha_1)(f(\alpha_2),\ \alpha_2)$$

$$= (f(\alpha_1) + \alpha_1\ f(\alpha_2),\ \alpha_1\alpha_2),$$

(1) $$f(\alpha_1\alpha_2) = f(\alpha_1) + \alpha_1\ f(\alpha_2).$$

Beschouw nu een inwendige automorfie van $K(G)$, dat is een afbeelding van de gedaante

$$(a,\alpha) \longrightarrow (m,\mu)(a,\alpha)(-\mu^{-1}m,\mu^{-1}).$$

We eisen dat deze afbeelding op G de identieke afbeelding induceert:

$$(a,1) = (m,\mu)(a,1)(-\mu^{-1}m,\mu^{-1}) = (\mu a,1),$$

$$\mu a = a.$$

Omdat dit voor alle $a \in G$ geldt, is $\mu = 1$. Nu is

$$(m,1)(0,\alpha)(-m,1) = (m-\alpha m,\ \alpha),$$

zodat de bij deze afbeelding behorende $f(\alpha)$ gegeven wordt door

(2) $$f(\alpha) = m - \alpha m.$$

Om het bewijs te voltooien is het blijkbaar voldoende om aan te tonen, dat iedere functie $f(\alpha)(\alpha \in A(G),\ f(\alpha) \in G)$, die aan (1) voldoet in de vorm (2) te schrijven is. Substitueer $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \alpha$ in (1):

(3) $$f(2\alpha) = f(2) + 2\ f(\alpha).$$

Substitueer nu $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 2$ in (1):

(4) $$f(\alpha 2) = f(\alpha) + \alpha f(2).$$

Het is echter duidelijk dat 2 met alle andere automorfieën van G verwisselbaar is; door gelijkstelling volgt uit (3) en (4):

$$f(\alpha) = \alpha f(2) - f(2)$$

en dit is van de gedaante (2) met $m=-f(2)$.

We wijzen nog even op het verband met de cohomologietheorie van groepen. Als we als operatorengroep bij G de automorfieëngroep A(G) nemen, dan is een functie $f(\alpha)$, die aan (1) voldoet, juist een 1-cocykel en een functie, die de gedaante (2) heeft, juist een 1-corand. We hebben dus bewezen, dat als 2 een automorfie van G is en A(G) als operatorengroep wordt genomen, de eerste cohomologiegroep nul is.

Ten slotte merken we nog op, dat bij het bewijs van stelling 2 als nevenresultaat het volgende verkregen wordt. Als 2 een automorfie van G is, dan is het kwadraat van iedere automorfie van K(G) inwendig. Hieruit volgt dat de groep van de automorfieklassen van K(G) (d.i. de factorgroep van de groep van de automorfieën naar de groep van de inwendige automorfieën) een (eventueel leeg) direct product van groepen van orde 2 is.

Bewijzen van de hierboven gegeven stellingen zullen worden gepubliceerd in de Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.