STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-019

Afbeeldingen van lijnelementen en vlakelementen

"elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. G.H.A. Grosheide F.W.zn

MC
1950

Rapport Z.W.1950-019
6 December 1950.

Voordracht door Prof.Dr G.H.A. Grosheide F.W.zn
over

AFBEELDINGEN VAN LIJNELEMENTEN EN VLAKELEMENTEN

in de serie "Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit".

Onder een "lijnelement" in een affiene of projectieve ruimte van twee of meer dimensies verstaan wij de figuur gevormd door een rechte en een daarop gelegen punt. Onder een "vlakelement" in een affiene of projectieve ruimte van drie of meer dimensies verstaan wij de figuur gevormd door een plat vlak en een daarin gelegen punt.

Een verzameling van lijnelementen in het platte vlak heet een "unie van elementen" (Verein) indien zij bestaat óf uit alle lijnelementen waarvan het punt met een gegeven punt samenvalt, óf uit alle lijnelementen waarvan het punt op een gegeven kromme is gelegen en de rechte samenvalt met de raaklijn aan de kromme in het punt. Het probleem een gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde in x,y

$$F(x, y, p) = 0 \qquad p = \frac{dy}{dx}$$

te integreren komt neer op het opsporen van alle unies waarvan de elementen aan de vergelijking F = 0 voldoen.
Een transformatie in de drie veranderlijken x, y, p heet een "contacttransformatie" van het x,y-vlak, als iedere unie van lijnelementen in een unie wordt overgevoerd.

Bij de bestudering der infinitesimale contacttransformaties bediende Lie zich van de eerste naar hem genoemde afbeelding

$$X = x,\ Y = y,\ Z = p$$

van de lijnelementen van het x,y-vlak op de punten der ruimte. (x, y en X, Y, Z zijn cartesiaanse coordinaten). De beschouwde transformatie werd hierdoor een infinitesimale punttransformatie in de ruimte.
De tweede afbeelding van Lie is van hetzelfde type en luidt

$$X = x,\ Y = \tfrac{1}{2}p,\ Z = y - \tfrac{1}{2}px.$$

Een met deze afbeelding projectief aequivalente werd -vermoedelijk onafhankelijk van Lie- ontworpen door Autonne, die er mede bewees, dat het integreren van F = 0 identiek is met het opsporen van de krommen op een zeker oppervlak, waarvan alle raaklijnen deel uit maken van een zeker lineair stralencomplex. Lie zelf gebruikte de afbeelding in omgekeerde zin om alle ruimtekrommen op te sporen waarvan de raaklijnen tot een ge-

geven lineair stralencomplex behoren. Een meer synthetisch meetkundige constructie van de tweede afbeelding van Lie werd door Beck ontworpen. Daarbij is de laatste eis die gesteld wordt, dat met unies van elementen complexkrommen corresponderen. Laat men deze conditie weg, dan verkrijgt men afbeeldingen van een iets algemener type, die langs een andere weg werden gevonden in Math. Ann. 116 en daar verder bestudeerd werden.
Een afbeelding van de lijnelementen van het projectieve vlak op de punten van een acht-dimensionale lineaire ruimte werd door Schaake (2) onderzocht en is bepaald door

$$p_i^k = x^k u_i \qquad (i,k=1,2,3).$$

De beeldpunten vormen een driedimensionale varieteit van den zesden graad. Met behulp van analoge formules werden afbeeldingen van de lijnelementen in de ruimte en van de vlakelementen in de ruimte door Schaake geconstrueerd.
Uitgaande van zijn eerst genoemde afbeelding geeft Schaake ook een afbeelding van lijnelementen van het projectieve vlak op de punten van een lineaire driedimensionale projectieve ruimte. Synthetisch waren dergelijke afbeeldingen reeds door Schaake (1) en de Vries tot stand gebracht. Alle tot dusver genoemde afbeeldingen op de punten van een driedimensionale lineaire ruimte zijn, hoewel projectief niet aequivalent, toch alle van het type

$$X^\lambda = a^{\lambda i}_{k} x^k u_i \quad (\lambda = 1,2,3,4).$$

Deze formules stellen echter alleen dan een één-éénduidige afbeelding voor, indien de coeficienten aan zekere eisen voldoen.

Laten wij de sommatie-indices i en k niet alleen de waarden 1,2,3 doch ook de waarde 4 aannemen en λ de waarden 1,2,3,4,5,6 dan staat er een afbeelding van de vlakelementen van de ruimte op punten van een lineaire vijfdimensionale ruimte.

L. Autonne, Sur la théorie des Equations Différentielles du premier ordre et du premier degré. J.Ecole Pol. 59 (1889).
H. Beck, Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente auf Raumpunkte. Math.Z.42 (1937)
A.J.van Ditmarsch, Afbeelding van de lijnelementen van een vlak op den Complex der Raaklijnen van een Monoide.
Proefschrift Utrecht 1928.
J.C.H. Gerretsen, Eine Abbildung der Linienelemente des n-dimensionalen Raumes auf die Punkte des (2n-1)-dimensionalen Raumes. Nachr. Oest. Math. Ges. 3(1949).
G.H.A.Grosheide F.Wzn, Eine Abbildung der Linienelemente einer Ebene auf Raumpunkte. Math. Ann. 116 (1939).
S.Lie, Geometrie der Berührungstransformationen 1896.

H.Lyklema, Een afbeelding van de lijnelementen in een vlakke driedimensionale ruimte op de punten van een vlakke vijfdimensionale.
Proefschrift Utrecht 1934.
G.Schaake (1), Afbeeldingen van Figuren op de punten op eene lineaire ruimte.
Proefschrift Amsterdam 1922.
(2), Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna 1928 TomoIV.
K.Strubecker, Über die Liesche Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes
Monatsh. f. Math. 42 (1935)
A.Terracini, The varieties of Grassmannand partial differential equations of first order in the case of several independent variables. Univ. Nac.Tucumàn Rev.A 4(1944).
J. de Vries, Een afbeelding van de lijnelementen van een vlak op de punten der ruimte. Verslagen Kon.Ac. Wet. 33 (1924).