STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 019

Over een probleem betreffende symmetrische matrices

H.J.A. Duparc, C.G. Lekkerkerker en Dr. W. Peremans

1951

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr. 49
Amsterdam O.

Rapport ZW 1951-019.

Over een probleem betreffende symmetrische matrices.

door
H.J.A.Duparc, C.G.Lekkerkerker en Dr W.Peremans.

Aan de afdeling zuivere wiskunde werden twee vermoede stellingen voorgelegd. In dit rapport worden van de eerste stelling drie bewijzen gegeven; het tweede vermoeden wordt door tegenvoorbeelden weerlegd.

Een symmetrische matrix (c_{jk}) van de orde n, waarvan de elementen complexe getallen zijn ($c_{jk}=a_{jk}+ib_{jk}$, a_{jk} en b_{jk} reëel) heet positief, als de quadratische vorm, behorende bij de matrix (a_{jk}) der reële delen positief semi-definiet is, dus

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}x_j x_k \geq 0$$

voor alle reële $(x_1,\ldots,x_n)$.

Vermoeden I.

Als van een positieve matrix $C=(c_{jk})$ de determinant =0 is, bestaat een stelsel reële getallen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, die niet alle =0 zijn, zodat

$$\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\lambda_k = 0 \text{ voor } j=1,\ldots,n.$$

Vermoeden II.

Een positieve matrix van rang r is op één en slechts één manier te schrijven als de som van r positieve matrices van rang 1.

Bij de bewijzen van vermoeden I wordt de volgende hulpstelling gebruikt.

Hulpstelling 1.

Laten $A=(a_{jk})$ en $B=(b_{jk})$ matrices zijn van de orde n, a_{jk} complex, b_{jk} reëel, det $b_{jk}\neq 0$. Noem $A^*=B'AB=(a^*_{jk})$ (Als D een matrix is, noemen we de getransponeerde matrix D'). Als er een stelsel getallen $\mu_1,\ldots,\mu_n$ bestaat die niet alle =0 zijn, waarvoor

$$\sum_{k=1}^{n} a^*_{jk}\mu_k=0 \quad \text{voor } j=1,\dots,n,$$

dan is er een stelsel getallen $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, die niet alle $=0$ zijn, waarvoor $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\lambda_k=0$ voor $j=1,\dots,n$ en wel voldoen $\lambda_m=\sum_{k=1}^{n} b_{mk}\mu_k$ voor $m=1,\dots,n$. Als $\mu_1,\dots,\mu_n$ reëel zijn, kunnen $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ dus ook reëel worden gekozen.

Bewijs: $a^*_{jk} = \sum_{l,m=1}^{n} b_{lj}a_{lm}b_{mk}$, dus $\sum_{k,l,m=1}^{n} b_{lj}a_{lm}b_{mk}\mu_k=0$ dus $\sum_{l=1}^{n} b_{lj} \sum_{k,m=1}^{n} a_{lm}b_{mk}\mu_k=0$ voor $j=1,\dots,n$. Omdat det $b_{jk}\neq 0$, volgt hieruit $\sum_{k,m=1}^{n} a_{lm}b_{mk}\mu_k=0$ voor $l=1,\dots,n$. Dus voldoet $\lambda_m=\sum_{k=1}^{n} b_{mk}\mu_k$ voor $m=1,\dots,n$ inderdaad aan de vereisten. Verder zijn de λ_m niet alle $=0$, omdat anders uit det $b_{mk}\neq 0$ zou volgen dat alle $\mu_k=0$ zouden zijn.

Eerste bewijs van vermoeden I (Dr W.Peremans).

Hulpstelling 2. Als bij een reële symmetrische matrix (a_{jk}) van orde n een positief semi-definiete quadratische vorm behoort, is $a_{jj}\geqq 0$ voor $j=1,\dots,n$. Als $a_{kk}=0$, dan is $a_{jk}=a_{kj}=0$ voor $j=1,\dots,n$.

Bewijs: Substitueer in $\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}x_kx_l$ $x_j=1$ en $x_l=0$ voor $l\neq j$ dan gaat deze vorm over in a_{jj}, dus $a_{jj}\geqq 0$. Als $a_{jj}=0$ substitueren we $x_j=y_1$, $x_k=y_2$, $x_l=0$ voor $l\neq j$, $l\neq k$, dan gaat de vorm over in $2a_{jk}y_1y_2+a_{kk}y_2^2$. Dit is een positief semi-definiete quadratische vorm in y_1 en y_2. Als $a_{kk}=0$, geeft substitutie van $y_1=y_2=1$, dat $a_{jk}\geqq 0$ en $y_1=-y_2=1$, dat $a_{jk}\leqq 0$, dus $a_{jk}=0$. Als $a_{kk}\neq 0$, (dus $a_{kk}>0$) dan gaat door substitutie van $y_1=-a_{kk}$, $y_2=a_{jk}$ de vorm over in $-a_{kk}a_{jk}^2$ en dit is alleen $\geqq 0$ als $a_{jk}=0$.

Omdat det $c_{jk}=0$, bestaan er in ieder geval complexe getallen $\mu_1,\dots,\mu_n$, die niet alle $=0$ zijn, zodat $\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\mu_k=0$ voor $j=1,\dots,n$. Als de verhoudingen der μ's alle reëel zijn, gaan deze door vermenigvuldiging met een geschikt gekozen complex getal $\neq 0$ in reële getallen over die ook aan de gevraagde relatie voldoen. We kunnen dus veronderstellen dat de verhoudingen der μ's niet alle reëel zijn. Zonder beperking der algemeenheid mogen we veromderstellen dat $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ niet reëel is.

Noem $\mu_j = \mu_j' + i\mu_j''$ (μ_j' en μ_j'' reële getallen, $j=1,\ldots,n$). Dan is $\mu_1'\mu_2'' - \mu_2'\mu_1'' \neq 0$. De volgende matrix $T=(\alpha_{jk})$ is dan reëel en heeft een determinant $\neq 0$:

$$\begin{pmatrix} \mu_1' & \mu_1'' & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2' & \mu_2'' & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mu_n' & \mu_n'' & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Noem nu $D=T'CT=(d_{jk})$, dan is $d_{jk}=\sum_{l,m=1}^{n} \alpha_{lj}c_{lm}\alpha_{mk}$, dus $d_{j1}=\sum_{l,m=1}^{n} \alpha_{lj}c_{lm}\mu_m'$ en $d_{j2}=\sum_{l,m=1}^{n} \alpha_{lj}c_{lm}\mu_m''$, dus $d_{j1}+id_{j2}=$ $=\sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj}\left(\sum_{m=1}^{n} c_{lm}\mu_m\right)=0$ voor $j=1,\ldots,n$.

Uit $\left.\begin{matrix} d_{11}+id_{12}=0 \\ d_{21}+id_{22}=0 \end{matrix}\right\}$ volgt, daar $d_{12}=d_{21}$, direct $d_{11}=-d_{22}$. De matrix der reële delen van (d_{jk}) bepaalt een positief semi-definiete quadratische vorm, dus volgens hulpstelling 2 is $\Re d_{11}\geq 0$, $\Re d_{22}\geq 0$, maar omdat $d_{11}=-d_{22}$, is $\Re d_{11}=-\Re d_{22}$, dus $\Re d_{11}=\Re d_{22}=0$. Uit hulpstelling 2 volgt nu dat ook $\Re d_{j1}=\Re d_{j2}=0$ voor $j=1,\ldots,n$. Maar dan geeft $d_{j1}+id_{j2}=0$ dat ook $\Im d_{j1}=\Im d_{j2}=0$, dus $d_{j1}=d_{j2}=0$ voor $j=1,\ldots,n$. Omdat $d_{j1}=0$ is, is $(\mu_1^*,\ldots,\mu_n^*)=(1,0,\ldots,0)$ een stelsel getallen waarvoor $\sum_{k=1}^{n} d_{jk}\mu_k^*=0$. Volgens hulpstelling 1 geldt voor $\sum_{k=1}^{n}\alpha_{mk}\mu_k^*=\mu_m'$, dat $\sum_{m=1}^{n} c_{jm}\mu_m'=0$ voor $j=1,\ldots,n$ waarmee de stelling bewezen is. (We hadden op dezelfde wijze kunnen aantonen dat $\sum_{m=1}^{n} c_{jm}\mu_m''=0$.)

<u>Tweede bewijs van vermoeden I</u> (H.J.A.Duparc).

Door een reële transformatie is het steeds mogelijk de vorm $\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_rx_s$ op de diagonaalgedaante $\sum_{r=1}^{n} A_rX_r^2$ te brengen, waarbij wegens het semi-definiet zijn dezer vorm geldt $A_r\geq 0$ voor alle r. Wij nummeren de variabelen zo, dat $A_1>0,\ldots,A_k>0;A_{k+1}=\ldots=A_n=0$. Hierbij is $k\leq n$. De reële niet-singuliere transformatie transformeert de matrix (b_{rs}), dus ook de matrix (c_{rs}) tot een matrix (B_{rs}) resp. $(C_{rs})=$ $=(A_r\delta_{rs}+iB_{rs})$. Bewijzen wij nu de stelling voor de getransformeerde matrix dan vindt men daarvoor reële coëfficiënten $U_1,\ldots,U_n$ met de gewenste eigenschap en op grond van hulpstelling 1 vindt men dan reële coëfficiënten $u_1,\ldots,u_n$ met de verlangde eigenschap voor de oorspronkelijke matrix (c_{rs}).

Omdat de determinant van (C_{rs}) nul is, bestaan er in ieder geval complexe getallen $V_1+iW_1,\dots,V_n+iW_n$ (niet alle nul) waarvoor geldt

$$\sum_{s=1}^{n} (V_s+iW_s)\,C_{rs}=0 \qquad (r=1,\dots,n),$$

dus

$$-\sum_{s=1}^{n} W_sB_{rs}+V_rA_r=0 \qquad (r=1,\dots,n), \tag{1}$$

en

$$\sum_{s=1}^{n} V_sB_{rs}+W_rA_r=0 \qquad (r=1,\dots,n). \tag{2}$$

Hieruit volgt

$$\sum_{r=1}^{n} V_r^{\,2}A_r=\sum_{r,s=1}^{n} V_rW_sB_{rs}=\sum_{r,s=1}^{n} V_sW_rB_{rs}=-\sum_{r=1}^{n} W_r^{\,2}A_r,$$

dus

$$\sum_{r=1}^{n} (V_r^{\,2}+W_r^{\,2})\,A_r=0,$$

waaruit wegens $A_1>0,\dots,A_k>0$, volgt $V_1=W_1=\dots=V_k=W_k=0$. Was nu $k=n$, dan waren alle $V_1+iW_1,\dots,V_n+iW_n$ nul in strijd met de onderstelling dienaangaande.

Dus $k<n$. Voor alle $r=1,\dots,n$ is dus $V_rA_r=W_rA_r=0$. De relaties (1) en (2) luiden dan

$$\sum_{s=k+1}^{n} W_sB_{rs}=0 \quad ; \quad \sum_{s=k+1}^{n} V_sB_{rs}=0, \tag{3}$$

waarbij wegens $k<n$ er tenminste één der getallen $W_{k+1},\dots,W_n$, $V_{k+1},\dots,V_n$ van nul verschilt. Is dat een der getallen $W_{k+1},\dots,W_n$ dan is het stel $(W_1,\dots,W_n)$ het gezochte stel; is dat een der getallen $V_{k+1},\dots,V_n$, dan is het stel $(V_1,\dots,V_n)$ het gezochte stel.

<u>Opmerkingen</u>.

1°. Uitgaande van een stel complexe getallen $U_1,\dots,U_n$, die niet door vermenigvuldiging met een geschikte factor alle reëel te maken zijn, vindt men zelfs twee oplossingen, n.l. $(V_1,\dots,V_n)$ en $(W_1,\dots,W_n)$ van het gestelde probleem.

2°. Wij zien op grond van (1), (2) en (3) dat het punt $(V_1,\dots,V_n)$ (en het punt $(W_1,\dots,W_n)$ eveneens) van elk der beide hyperquadrieken

$$\sum_{r,s=1}^{n} A_{rs}X_rX_s=0 \quad ; \quad \sum_{r,s=1}^{n} B_{rs}X_rX_s=0$$

3°. Het is direct duidelijk dat ieder reëel punt $(V_1,\dots,V_n)$, dat voldoet aan $\sum_{s=1}^{n} U_s C_{rs}=0$ $(r=1,\dots,n)$, dubbelpunt is van de beide in 2° genoemde hyperquadrieken.

Derde bewijs van vermoeden I (C.G.Lekkerkerker).

We schrijven $\sum_{j=1}^{n} x_j y_j=(X,Y)$.

Hulpstelling 3. Zijn A en B twee reële, symmetrische matrices van orde r, en is A positief definiet, dan bestaat er een matrix T, zodat T'AT de eenheidsmatrix van orde r en T'BT een diagonaalmatrix van orde r is.

Bewijs: Zij X de vector $(x_1,\dots,x_r)$ en zij $A=(a_{kj})$. Dan is $(AX,X)=\sum_{k,j=1}^{r} a_{kj}x_k x_j$ een positief definiete quadratische vorm, te schrijven als som van r quadraten. Er bestaat dus een matrix $U=(u_{kj})$, met det $U\neq 0$, zodat door de substitutie X=UY, voluit geschreven $x_k=\sum_{j=1}^{r} u_{kj}y_j$ $(k=1,2,\dots,r)$, die quadratische vorm overgaat in $\sum_{j=1}^{r} y_j^2$. D.w.z. (AX,X)=(AUY,UY)=(U'AUY,Y) is identiek met (Y,Y). Dus U'AU is eenheidsmatrix.

Zij U'BU=C, Dan is C reëel en symmetrisch, heeft dus reële eigenwaarden, en bezit een orthonormaal stelsel van eigenvectoren. Er bestaat dus een orthogonale matrix V, zodat V'CV een diagonaalmatrix is.

De matrix T=UV voldoet dan aan de vraag.

Hulpstelling 4. Er is een niet singuliere matrix T, zodat een matrix A overgaat in T'AT doordat men eerst de k^{de} rij vermeerdert met λ-maal de j^{de} rij en daarna de k^{de} kolom met λ-maal de j^{de} kolom.

Het gaat nu om het bewijs van de volgende stelling:

Zij $C=(a_{kj}+ib_{kj})$ een matrix van orde n, det C=0, a_{kj} en a'_{kj} reëel $(k,j=1,\dots,n)$, $A=(a_{kj})$ semi-positief definiet. Dan bestaan er n reële getallen $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, niet alle nul, zodat geldt:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(a_{kj}+ib_{kj})=0 \qquad (k=1,\dots,n).$$

Bewijs: Zij r de rang van A. Er bestaat dan een reële, niet-singuliere matrix T_1, zodat $T_1'AT_1=A_1$ een diagonaalmatrix is met alleen op de eerste r plaatsen van de hoofddiagonaal een element $\neq 0$. Zij $B=(b_{kj})$; T_1 kan zó bepaald worden, dat het gedeelte van de matrix $T_1'BT_1$ dat tot de laatste n-r rijen en kolommen behoort, een diagonaalmatrix is met op de eerste s plaatsen van de hoofddiagonaal een element $b_\sigma\neq 0$ $(\sigma=1,\dots,s)$

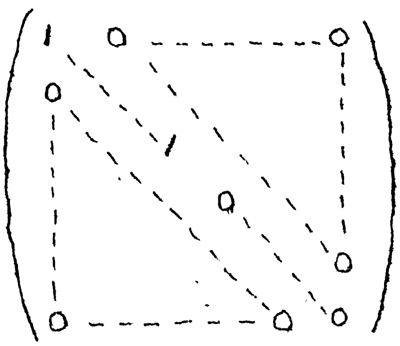
en op de laatste t plaatsen van de hoofddiagonaal nullen $(r+s+t=n)$.

Zij $T_1{}'BT_1=B_1=((b_{kj}{}'))$.

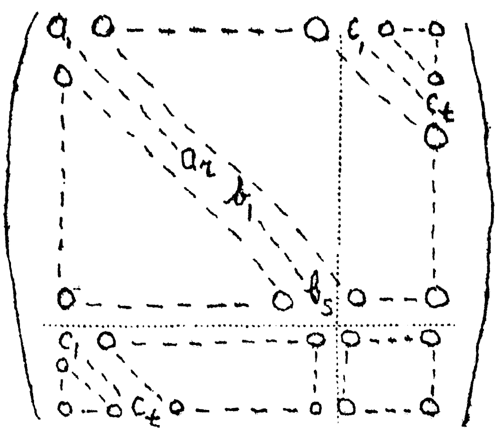
Zij ρ een der getallen $1,\ldots,r$ en σ een der getallen $1,\ldots,s$. We verminderen nu in de matrix B_1 de ρ^{de} kolom met $\frac{1}{b_\sigma}\cdot b_{r+\sigma,\rho}$ maal de $r+\sigma^{\text{de}}$ kolom en daarna de ρ^{de} rij met $\frac{1}{b_\sigma}\cdot b_{\rho,r+\sigma}$ maal de $r+\sigma^{\text{de}}$ rij. Wegens de symmetrie is $b_{\rho,r+\sigma}=b_{r+\sigma,\rho}$. Door dit voor alle paren ρ,σ te doen, zien we, op grond van hulpstelling 4, in dat er een reële matrix T_2 bestaat, zodat $T_2{}'T_1{}'AT_1T_2=T_1{}'AT_1=A_1$ en $T_2{}'B_1T_2=B_2=((b_{kj}{}''))$, waarbij A_1 en B_2 symmetrisch zijn en $b''_{\rho,r+\sigma}=b''_{r+\sigma,\rho}=0$ voor $\rho=1,\ldots,r$; $\sigma=1,\ldots,s$.

Op dezelfde manier zien we in, dat er een niet-singuliere matrix T_3 bestaat, zodat voor $T_3{}'B_2T_3=B_3=((b_{kj}{}'''))$ bovendien geldt, dat in elk der laatste t rijen (en kolommen) ten hoogste één der eerste r elementen van nul verschilt. Zij $T_3{}'A_1T_3=A_3$.

Tenslotte bestaat er, lettend op de eerste r rijen en kolommen van A_3 en B_3, op grond van hulpstelling 3 een niet-singuliere matrix T_4, zodat $T_3{}'A_3T_3$ en $T_4{}'B_3T_4$ de volgende gedaante hebben:



en



.

We laten nu zien dat er een geheel getal τ is, zodat $1\leq\tau\leq t$, $c_\tau=0$ (in het bijzonder is dus $t=0$ uitgesloten). Is dat zo en stellen we $T=T_1T_2T_3T_4$, dan komt er in de matrix $T'CT$ een rij (en kolom) voor, die uit louter nullen bestaat. Voor $T'CT$ is dan de bewering van de stelling juist, en wegens hulpstelling 1 dan ook voor C.

Stel eens, dat geen der c_t gelijk aan nul is en zij $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ een stel van n getallen zodat $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j d_{kj}=0$ voor $k=1,\dots,n$, als $((d_{kj}))$ de matrix T'CT is. Beschouwing van de laatste t rijen leert: $\lambda_1=\dots=\lambda_t=0$. Let men op de eerste r rijen, dan volgt, dat ook geldt: $\lambda_1=\dots=\lambda_t=0$, $\lambda_n=\lambda_{n-1}=\dots=\lambda_{n-(t-1)}=0$. Op de overige rijen lettende ziet men dat ook de overige getallen λ_j gelijk aan nul zijn. Er volgt zo een tegenspraak met het feit dat det C=0 is. Hiermee is de stelling volledig bewezen.

<u>Opmerkingen</u>: Uit het bovenstaande vloeien nog de volgende consequenties voort:

1. De matrix A is niet positief definiet. Want $n-r=s+t \geqq t \geqq 1$.
2. Zij t_0 het aantal elementen c_τ in de matrix T'BT, dat gelijk aan nul is. Dan is $t_0 \geqq 1$; elk stel reële of complexe getallen $\lambda_j (j=1,\dots,n)$, waarvoor geldt $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (a_{kj}+ib_{kj})=0$ $(k=1,\dots,n)$, ontstaat door lineaire combinatie met reële resp. complexe coëfficiënten uit t_0 bepaalde reële stellen (zie hulpstelling 1).

<u>Tegenvoorbeeld tegen vermoeden II</u>. Allereerst tegen het bestaan van de gevraagde splitsing. (Dr W.Peremans)

Neem de matrix $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ en stel dat

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-\alpha & i-\beta \\ i-\beta & -\gamma \end{pmatrix}$$

een splitsing van de verlangde soort is.

De reële delen moeten een positief semi-definiete matrix bepalen voor elk der matrices. In de hoofddiagonaal moeten elementen $\geqq 0$ staan, dus $\Re\gamma=0$. Dan is ook $\Re\beta=0$. Schrijf het dus nu zo:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+ib & ic \\ ic & id \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-(a+ib) & i-ic \\ i-ic & -id \end{pmatrix}.$$

waarin a,b,c,d reël zijn. We gebruiken nu dat de rang =1 is. Dus

$$(a+ib)id+c^2=0 \tag{1}$$

$$-id+(a+ib)id+c^2-2c+1=0$$

Door aftrekken vindt men

$$-id-2c+1=0$$

dus

$$d=0$$
$$c=\tfrac{1}{2}.$$

Substitueert men d=0 in (1), dan vindt men c=0. Dit geeft een tegenspraak.

Dat, als er een splitsing van de gewenste soort bestaat, deze niet eenduidig is, blijkt uit het volgende voorbeeld (H.J.A.Duparc).

De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ is positief en heeft de rang 2. Deze is inderdaad splitsbaar in 2 positieve matrices van de rang 1,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

maar er zijn gemakkelijk andere splitsingen te geven. Immers stel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ab \\ ab & ab^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a & 2-ab \\ 2-ab & 6-ab^2 \end{pmatrix}$$

waarbij de tweede matrix de rang 1 bezit, zodat men heeft

$$2=a(6-4b+b^2),$$

dus voor iedere b geldt bovenstaande splitsing met $a=\frac{2}{b^2-4b+6}$. Wegens $a=\frac{2}{(b-2)^2+2}\leqq 1$ is de tweede matrix ook positief.