STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 019

Over het teken van zekere determinanten

H.J.A. Duparc

1952

Over het teken van zekere determinanten

door

H.J.A. Duparc.

Door de N.V. Nederlandsche Spoorwegen is het volgende probleem voorgelegd:

Laat $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reële functies voorstellen van de reële variabelen u en v. Beschouw de determinanten D_j van de j^e orde

$$D_j = |a_{rs}| \qquad (j = 1,2,\ldots,n),$$

met $a_{rs} = a_{2s-r}$, waarbij $a_i = 0$ voor $i<0$ en voor $i > n$. Bovendien wordt ondersteld, dat de functie a_n onafhankelijk is van u en v en positief is.

Gevraagd wordt te onderzoeken of de volgende beweringen gelden:

I. Als de kromme $D_{n-1}(u,v)= 0$ in het uv-vlak geen dubbelpunten bezit, wordt zij nergens gesneden door de krommen $D_1 = 0$, $D_2 = 0, \ldots, D_{n-2} = 0$ en al die n-2 krommen liggen in dat deel van het uv-vlak, waar $D_{n-1}(u,v)< 0$ is.

II. Als de kromme $D_{n-1}(u,v)= 0$ in het uv-vlak wel dubbelpunten bezit, dan wordt zij door de krommen $D_1 = 0$, $D_2 = 0, \ldots, D_{n-2} = 0$ slechts in haar dubbelpunten gesneden. Overigens liggen al die n-2 krommen geheel in dat deel van het uv-vlak, waar $D_{n-1}(u,v)\leq 0$ is.

Wij laten in het vervolg zien dat slechts onder zekere verdere voorwaarden de vermoedens I en II juist zijn.

De beide eigenschappen zijn vermoed naar aanleiding van een speciaal geval, waarbij n = 5 is en waarbij men heeft:

$$(1)\quad \begin{cases} a_0 = AB\,v^4 + u\,B\,v^5; \\ a_1 = A\,v^2 + u(1+B)v^3 + B\,v^4; \\ a_2 = uv + (1+B)v^2; \\ a_3 = 1 + A\,v^2; \\ a_4 = uv; \\ a_5 = 1. \end{cases}$$

Hierbij zijn A en B reële en niet negatieve grootheden en de variabelen u en v zijn eveneens reëel en niet negatief.

Dit speciale geval was van belang bij zekere onderzoekingen van de opdrachtgeefster.

Wij onderzoeken, in verband met het geval waarvoor de opdrachtgeefster speciale belangstelling heeft, de vermoedens I en II voor $n = 5$. Men heeft dan

$$D_1 = a_1; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Verder voeren wij nog in de determinanten

$$E_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix}; \quad F_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_5 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix}; \quad E_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Men heeft de volgende betrekkingen:

(2) $\quad D_3 = a_3 D_2 - a_1 E_2$;

(3) $\quad E_3 = a_2 D_2 - a_0 E_2$;

(4) $\quad a_1 F_2 - a_3 E_2 + a_5 D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = 0$;

(5) $\quad D_4 = D_2 F_2 - E_2^2$;

(6) $\quad D_4 = a_4 D_3 - a_5 E_3$.

Formule (5) is te vinden door een Laplace-ontwikkeling van D_4 naar de eerste twee rijen.

Wij bewijzen nu:

<u>Stelling 1</u>. Als $D_2 = D_4 = 0$, dan is $D_3 = 0$.

Volgens (5) leidt het onderstelde nl. tot $E_2^2 = 0$, dus $E_2 = 0$, dus wegens (2) is dan $D_3 = 0$.

<u>Stelling 2</u>. Als $D_3 = D_4 = 0$, dan is $D_2 = 0$.

Volgens (6) leidt het onderstelde nl. tot $a_5 E_3 = 0$, dus wegens $a_5 > 0$ tot $E_3 = 0$. Wegens (2) en (3) is dan

$$a_3 D_2 - a_1 E_2 = 0; \quad a_2 D_2 - a_0 E_2 = 0.$$

Was $D_2 \neq 0$, dan moest van deze twee homogene lineaire vergelijkingen in D_2 en E_2 de coëfficiëntendeterminant nul zijn, dus $\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = 0$, dus $D_2 = 0$ in strijd met de onderstelling. Bijgevolg moet gelden $D_2 = 0$.

Gevolg: De krommen $D_2 = 0$ en $D_3 = 0$ snijden de kromme $D_4 = 0$ in dezelfde punten. Wij kunnen deze ook anders verkrijgen, zoals blijkt uit de volgende

Stelling 3. Als $E_2 = F_2 = 0$, dan is $D_2 = D_3 = D_4 = 0$.

Bewijs: Het onderstelde leidt wegens (4) en wegens $a_5 > 0$ tot $D_2 = 0$, dus wegens (5) tot $D_4 = 0$, dus wegens stelling 1 tot $D_3 = 0$.

Stelling 4. Als $D_2 = D_3 = D_4 = 0$, dan is $E_2 = 0$ en verder $F_2 = 0$ mits $a_1 \neq 0$.

Bewijs: Uit (5) volgt de relatie $E_2 = 0$. Dan volgt uit (4) alweer wegens $a_1 \neq 0$ dat $F_2 = 0$.

Gevolg: De punten met $D_2 = D_3 = D_4 = 0$ zijn, mits $a_1 \neq 0$ is, te karakteriseren door $E_2 = F_2 = 0$.

Stelling 5. Punten met $E_2 = F_2 = 0$ zijn dubbelpunten van $D_4 = 0$.

Bewijs: Dubbelpunten van $D_4 = 0$ voldoen aan $\frac{\partial D_4}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial D_4}{\partial v} = 0$. Geven wij differentiaties op de bekende wijze aan met indices, dan leiden $D_{4u} = 0$ en $D_{4v} = 0$ wegens (5) tot

$$(7) \qquad D_2 F_{2u} + D_{2u} F_2 - 2E_2 E_{2u} = 0; \quad D_2 F_{2v} + D_{2v} F_2 - 2E_2 E_{2v} = 0.$$

Nu volgt uit $E_2 = F_2 = 0$ wegens stelling 3 dat $D_2 = 0$, zodat voor deze punten de relaties (7) vervuld zijn en dit dus dubbelpunten van (4) zijn.

Gevolg: Op grond van stelling 1, 2, 4 en 5 heeft men:

Stelling 6. De snijpunten van $D_4 = 0$ met $D_2 = 0$ (of met $D_3 = 0$) zijn dubbelpunten van $D_4 = 0$ mits voor die punten $D_1 \neq 0$ is.

Wij merken op dat de voorwaarde $D_1 \neq 0$ onontbeerlijk is. Kiest men nl. een punt met $a_o = a_1 = 0$, dan is voor dat punt $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0$ en ook $E_2 = 0$, maar F_2 behoeft geenszins $= 0$ te zijn. Dat punt is geen dubbelpunt van $D_4 = 0$ zodra aldaar maar $D_{2u} \neq 0$ of $D_{2v} \neq 0$ is, dus als aldaar $\begin{vmatrix} a_{1u} & a_3 \\ a_{ou} & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$ of $\begin{vmatrix} a_{1v} & a_3 \\ a_{ov} & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$ is.

Wij onderzoeken nu het teken van D_4 op elk der krommen $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ en $D_3 = 0$.

Uit (5) volgt dat op $D_2 = 0$ geldt $D_4 = -E_2^2 \leqq 0$. Het gelijkteken geldt slechts bij punten die tevens voldoen aan $D_4 = 0$, dus die (alweer als aldaar $a_1 \neq 0$ is) op grond van stelling 6 dubbelpunt zijn van $D_4 = 0$.

Anders is het gesteld met de punten van $D_1 = 0$ en van $D_3 = 0$.

Voor punten van $D_3 = 0$ volgt uit (6) dat $D_4 = -a_5 E_3$. Uit (2) en (3) volgt voor die punten dan $a_3 D_2 = a_1 E_2$, dus

$$a_1\ E_3 = a_1\ a_2\ D_2 - a_1\ a_o\ E_2 = (a_1\ a_2 - a_o\ a_3)D_2 = D_2^2\ , \text{ dus}$$

$$a_1\ D_4 = -\ a_1\ a_5\ E_3 = -\ a_5\ D_2^2 \leqq 0.$$

Mits derhalve op de punten van $D_3 = 0$ geldt $a_1 > 0$, is inderdaad aldaar $D_4 \leqq 0$ en eerst als men afziet van de punten met $D_2 = 0$, dus van de dubbelpunten van $D_4 = 0$, vindt men voor de punten van $D_3 = 0$ inderdaad $D_4 < 0$.

Voor de punten van $D_1 = 0$, dus $a_1 = 0$ heeft men op grond van de definitie van D_4 dat $D_4 = a_o\ (a_o\ a_5^2 + a_2\ a_3\ a_5 - a_3^2\ a_4)$, welke uitdrukking kennelijk positief en negatief kan zijn.

Resumerende vinden wij dus dat de kromme $D_2 = 0$ en ook de kromme $D_3 = 0$ op $D_4 = 0$ de dubbelpunten uitsnijdt mits aldaar $D_1 \neq 0$. De kromme $D_1 = 0$ snijdt in het algemeen de kromme $D_4 = 0$ niet in haar dubbelpunten.

De punten van $D_2 = 0$ voldoen aan $D_4 \leqq 0$ en, als $D_1 \neq 0$ is, aan $D_4 < 0$.

De punten van $D_3 = 0$ voldoen aan $D_4 < 0$ mits $D_1 > 0$ is.

De punten van $D_1 = 0$ behoeven niet te voldoen aan $D_4 < 0$.

Wij onderzoeken nu nog in hoeverre voor de speciale functies $a_o, \ldots, a_5$ uit (1) de afwijkingen van het vermoeden optreden.

Wat het vermoeden over de dubbelpunten betreft, hebben wij na te gaan of $D_1 = 0$ kan zijn. Het vermoeden over het teken van D_4 op de krommen $D_2 = 0$ en $D_3 = 0$ is slechts onjuist als $D_1 \leqq 0$. Het vermoeden over het teken van D_4 op $D_1 = 0$ dient ook nog nader te worden onderzocht.

Omdat men heeft $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $A \geqq 0$, $B \geqq 0$ is zeker $D_1 \geqq 0$ in de beschouwde punten van het uv-vlak. Derhalve zijn bij alle vermoedens slechts uitzonderingsgevallen mogelijk als $D_1 = 0$ is. Men heeft dan dus wegens (1) dat $v^2(A + uv(1+B)+Bv^2) = 0$ is.

Wij krijgen nu twee gevallen.

1°: $v \neq 0$. Dan is $A = B = u = 0$.

Voor $A = B = 0$ heeft men

$$a_o = 0,\ a_1 = uv^3,\ a_2 = uv + v^2,\ a_3 = 1,\ a_4 = uv,\ a_5 = 1,$$

$$\text{dus } D_2 = \begin{vmatrix} uv^3 & 1 \\ 0 & uv+v^2 \end{vmatrix} = u^2\ v^4 + uv^5;\ F_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ uv+v^2 & uv \end{vmatrix} = -\ v^2.$$

In een punt met $u = 0$ is dan $F_2 = -v^2$, $D_2 = E_2 = 0$, $D_{2u} = v^5$, dus $D_{4u} = F_2\ D_{2u} = -v^7 \neq 0$. Inderdaad geldt dus in dit geval niet dat $D_2 = 0$ (of $D_3 = 0$) de kromme $D_4 = 0$ snijdt in haar dubbelpunten.

Bovendien is op $D_1 = 0$ dan noodzakelijk $u = 0$, dus $a_1 = a_o$, dus $D_4 = C$. In dit geval is dus op $D_1 = 0$ niet $D_4 < 0$, maar integendeel $D_4 = 0$.

2^o. $v = 0$. Dan is $F_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, dus $D_2 = 0$ en $D_3 = 0$ snijden $D_4 = 0$ inderdaad in haar dubbelpunten. Verder is op $D_1 = 0$ zeker $D_4 = 0$, zodat in dit opzicht wel een uitzondering optreedt.

Het is te verwachten dat de twee uitzonderingsgevallen $v \neq 0$, $A = B = u = 0$ en $v = 0$ voor de N.V. Nederlandsche Spoorwegen geen essentiële moeilijkheden opleveren, daar zij slechts optreden bij oninteressante of bij physisch niet realiseerbare gevallen.

Wij beschouwen thans nog andere gevallen dan $n = 5$ en zullen laten zien dat zowel bij $n \leqq 4$ als bij $n \geqq 6$ de vermoedens I en II in het algemeen niet gelden. Voor $n = 1$ en $n = 2$ behoeft niets bewezen te worden, zodat wij het onderzoek met $n = 3$ kunnen beginnen.

Men heeft dan

$$D_1 = a_1;\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_o & a_2 \end{vmatrix},\ \text{terwijl als steeds geldt } a_3 > 0.$$

Op $D_1 = 0$ geldt $D_2 = -a_o\ a_3$, zodat het teken van $D_2 = 0$ aldaar afhangt van dat van a_o. Dit deel van het vermoeden is dus bij $n = 3$ on juist.

Dubbelpunten van $D_2 = 0$ voldoen aan

$$D_{2u} = a_1 a_{2u} + a_2 a_{1u} - a_{ou} a_3 = 0;\ D_{2v} = a_1 a_{2v} + a_2 a_{1v} - a_{ov} a_3 = 0.$$

Nu geldt voor een snijpunt van $D_1 = 0$ en $D_2 = 0$ behalve $a_1 = 0$ ook nog $a_o = 0$; aan a_2 wordt aldaar geen beperking opgelegd, zodat in zo'n snijpunt D_{2u} en D_{2v} niet nul behoeven te zijn, en dat snijpunt dus geen dubbelpunt behoeft te zijn. Ook dit deel van het vermoeden blijkt voor $n = 3$ niet te gelden.

Beschouwen wij thans het geval $n = 4$. Men heeft dan

$$D_1 = a_1;\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_o & a_2 \end{vmatrix};\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_o & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}\ ;\quad a_4 > 0.$$

Verder geldt $D_3 = a_3\ D_2 - a_4\ a_1^2$.

Op $D_2 = 0$ geldt dus $D_3 = -a_4\ a_1^2 \leqq 0$. Is aldaar $a_1 \neq 0$, dan geldt dus op $D_2 = 0$, dat $D_3 < 0$ is, zodat het vermoeden juist is. Op $D_1 = 0$ echter geldt $D_3 = -a_o\ a_3^2$, zodat het teken van D_3 nu afhangt van dat van a_o en het vermoeden niet juist is.

Snijpunten van $D_2 = 0$ en $D_3 = 0$ voldoen aan $a_4\ a_1^2 = 0$, dus wegens $a_4 > 0$, aan $a_1 = 0$. In deze punten heeft men dan $a_o a_3 = 0$ dus $a_o = 0$ of $a_3 = 0$. Verder geldt aldaar

$$D_{3u} = a_{3u}D_2 + a_3D_{2u} - 2a_4a_1a_{1u} = a_3D_{2u} = a_3\,(a_2a_{1u} - \quad a_3a_{ou}),$$

welke uitdrukking voor $a_3 \neq 0$, $a_o = 0$ zeker niet nul behoeft te zijn, zodat dergelijke snijpunten geen dubbelpunten behoeven te zijn.

Beschouwen wij tenslotte nog de snijpunten van $D_1 = 0$ en $D_3 = 0$. Hier is $D_2 = -a_o\,a_3$, dus $D_3 = -a_oa_3^2 = 0$, zodat aldaar wederom geldt $a_o = 0$ of $a_3 = 0$, dus $D_2 = 0$. Evenals in het vorige geval behoeft indien $a_3 \neq 0$ is zo'n snijpunt geen dubbelpunt van $D_3 = 0$ te zijn.

Dat bij $n = 6$ de beweringen evenmin gelden blijkt bv. uit het volgende eenvoudige tegenvoorbeeld.

Wij nemen

$$a_o = u,\ a_1 = v,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 0,\ a_5 = a_6 = 1.$$

Dan heeft men, zoals na een korte berekening blijkt

$$D_1=v;\ D_2=-u;\ D_3=u(v-1);\ D_4=-v(u+v);\ D_5=-v^3-3uv-u^2+u.$$

Op $D_1 = 0$ heeft men $D_5 = u - u^2$, zodat het teken van D_5 hier niet vastgelegd is.

Op $D_2 = 0$ geldt $D_5 = -v^3$, zodat ook hier het teken van D_5 niet vastligt.

Op $D_3 = 0$ heeft men ófwel $u = 0$, hetgeen leidt tot $D_5 = -v^3$, waarvan het teken niet vastligt, ófwel $v = 1$, dus $D_5 = -u^2 - 2u - 1 = -(u+1)^2$.

Op $D_4 = 0$ geldt ófwel $v = 0$, dus $D_5 = u-u^2$, ófwel $u = -v$, dus $D_5 = u^3 + 2u^2 + u = u(u+1)^2$, waardoor ook nu het teken van D_5 niet vaststaat.

Dubbelpunten van D_5 vindt men uit

$$D_5 = 0;\ D_{5u} = -3v - 2u + 1 = 0;\ D_{5v} = -3v^2 - 3u = 0;$$

hieraan voldoet slechts $u = -1$, $v = 1$, maar dit punt ligt noch op $D_1 = 0$ noch op $D_2 = 0$.

Geen van de vermoedens I en II geldt dus in dit geval, waarbij $n = 6$ is, zodat zij ook in het algemeen bij $n = 6$ niet kunnen gelden.