STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1953 - 019

Over de bepaling van een limiet

H.J.A. Duparc en W. Peremans

1953

Over de bepaling van een limiet.

H.J.A.Duparc en W.Peremans.

Gevraagd werd te bepalen de limiet $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$, waarbij

$$U_n = \prod_{k=1}^{n} A^{-\frac{1}{k\sqrt{\log n+\alpha}}} \left(1 + \frac{A^{\frac{1}{\sqrt{\log n+\alpha}}} - 1}{k}\right) ;$$

hierin stellen A en α reële getallen ≥ 0 voor.

Stelt men $w = \sqrt{\log n+\alpha}$, dan heeft men

$$\log U_n = S_1 + S_2 ,$$

waarbij

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n}\left\{\log\left(1 + \frac{A^{\frac{1}{w}} - 1}{k}\right) - \frac{A^{\frac{1}{w}} - 1}{k}\right\} ,$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A^{\frac{1}{w}} - 1}{k} - \frac{1}{kw}\log A\right).$$

Wegens $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\frac{1}{w}} - 1 = 0$ heeft men voor voldoende grote n de relatie

$$\left|\frac{A^{\frac{1}{w}} - 1}{k}\right| < 1 , \text{ derhalve } \left|\log\left(1 + \frac{A^{\frac{1}{w}} - 1}{k}\right) - \frac{A^{\frac{1}{w}} - 1}{k}\right| \leqq C\,\frac{(A^{\frac{1}{w}} - 1)^2}{k^2} ,$$

waarbij C een geschikt gekozen constante voorstelt.

Dus

$$|S_1| \leqq C\,(A^{\frac{1}{w}} - 1)^2 \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{C\pi^2}{6}(A^{\frac{1}{w}} - 1)^2 < \varepsilon$$

als n voldoende groot is. Bijgevolg $\lim\limits_{n\to\infty} S_1 = 0$.

Verder geldt

$$\begin{aligned} S_2 &= \left(A^{\frac{1}{w}} - 1 - \frac{\log A}{w}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \left(A^{\frac{1}{w}} - 1 - \frac{\log A}{w}\right)\left(\log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\log^2 A}{2w^2} + O\left(\frac{1}{w^3}\right)\right)\left(\log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\log^2 A + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right) , \end{aligned}$$

waarbij γ de constante van Euler voorstelt.

Dus $\lim\limits_{n\to\infty} S_2 = \frac{1}{2}\log^2 A$.

Derhalve $\lim\limits_{n\to\infty} \log U_n = \frac{1}{2}\log^2 A$

en $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = e^{\frac{1}{2}\log^2 A} = A^{\frac{1}{2}\log A}$.