STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 019

Over gewicht en dichtheid van het product van topologische ruimten; en over het gewicht van de ruimte $\{0,1\}^{\nu}$

M.A. Maurice

1962

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1962-019

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Over gewicht en dichtheid van het product van topologische ruimten; en over het gewicht van de ruimte $\{0,1\}^{\nu}$.

door

M.A. Maurice

A. §1. In het rapport ZW 1962-010 van het Mathematisch Centrum is de volgende stelling genoemd

Stelling 1: Als $(X_a)_{a \in A}$ een familie van topologische ruimten is, en $X = \prod_{a \in A} X_a$ is het topologisch product, dan geldt

$$W(X) \leq \aleph ,$$

dan en slechts dan als

$$\begin{cases} W(X_a) \leq \aleph \text{ voor alle } a \in A \\ |\{a \mid W(X_a) > 2\}| \leq \aleph \end{cases}$$

We bewijzen nu

<u>Stelling 2</u>: Als $X = \prod_{a \in A} X_a$, dan geldt

$$w(X) = \aleph,$$

dan en slechts dan als voldaan is aan ten minste één der volgende twee voorwaarden

1. $w(X_a) \leq \aleph$ voor alle $a \in A$
   $|\{a \mid w(X_a) > 2\}| = \aleph$

2. $\begin{cases} \forall a \in A: w(X_a) \leq \aleph \\ \forall \aleph' < \aleph : \exists a \in A: \aleph' < w(X_a) \leq \aleph \end{cases}$
   $|\{a \mid w(X_a) > 2\}| \leq \aleph$

<u>Bewijs</u>:

I. Zij $w(X) = \aleph$.
   Uit stelling 1 volgt: $\begin{cases} w(X_a) \leq \aleph \text{ voor alle } a \in A \\ |\{a \mid w(X_a) > 2\}| \leq \aleph \end{cases}$

   Indien nu

   $|\{a \mid w(X_a) > 2\}| < \aleph$, dus $\leq \aleph'$ voor zekere $\aleph' < \aleph$

   en

   $\exists \aleph'' < \aleph : \forall a \in A : w(X_a) \leq \aleph''$,

   dan volgt, indien $\aleph^* = \max(\aleph', \aleph'')$, op grond van stelling 1: $w(X) \leq \aleph^* < \aleph$;

   contradictie.

II. Indien omgekeerd aan 1. en 2 voldaan is, dan is, op grond van stelling 1: $w(X) \leq \aleph$.

   Als nu
   $w(X) < \aleph$, dus $\leq \aleph'$ voor zekere $\aleph' < \aleph$,

dan is op grond van stelling 1

$$\begin{cases} \forall a \in A: w(X_a) \leq \aleph' < \aleph \\ |\{a \mid w(X_a) > 2\}| \leq \aleph'' \end{cases}$$

contradictie.

2 In het rapport ZW 1962-010 van het Mathematisch Centrum is de volgende (daar iets anders geformuleerde) stelling bewezen:

<u>Stelling 3</u>: Als $(X_a)_{a \in A}$ een familie volledig reguliere T_1-ruimten is, en $X = \prod_{a \in A} X_a$ is het topologisch product, dan geldt $p(X) \leq \aleph$, dan en slechts dan als

$$\begin{cases} p(X_a) \leq \aleph \text{ voor alle } a \in A \\ |A| \leq 2^{\aleph} \end{cases}$$

We bewijzen nu

<u>Stelling 4</u>:

Zij $X = \prod_{a \in A} X_a$, alle X_a $(a \in A)$ volledig regulier T_1.

I . Zij $\aleph$ een niet-limietkardinaalgetal.
Dan geldt $p(X) = \aleph$,
dan en slechts dan als aan ten minste één der volgende voorwaarden is voldaan

1. $\begin{cases} \forall a \in A : p(X_a) \leq \aleph \\ \exists a \in A : p(X_a) = \aleph \end{cases}$
$|A| \leq 2^{\aleph}$

2. $\forall a \in A : p(X_a) \leq \aleph$
$|A| = 2^{\aleph}$

II. Zij $\aleph$ een limietkardinaalgetal
Dan geldt $p(X) = \aleph$

dan en slechts dan als aan ten minste één der volgende voorwaarden is voldaan

1. $\begin{cases} \forall a \in A : p(X_a) \leq \aleph \\ \forall \aleph' < \aleph : \exists a \in A : \aleph' < p(X_a) \leq \aleph \end{cases}$

$|A| \leq 2^{\aleph}$

2. $\forall a \in A : p(X_a) \leq \aleph$

$|A| = \aleph$ of $= 2^{\aleph}$

Bewijs:

Opmerking: In het bewijs wordt de continuumhypothese gebruikt.

I. a. Uit 1. en/of 2. volgt $p(X) \leq \aleph$ (stelling 3)

Als nu $p(X) < \aleph$, dan is $p(X) \leq \aleph'$ voor zekere $\aleph' < \aleph$ en dus (stelling 3):

$$\begin{cases} p(X_a) \leq \aleph' < \aleph \text{ voor alle } a \quad A \\ |A| \leq 2^{\aleph'} < 2^{\aleph} \end{cases}$$

contradictie.

b. Uit $p(X) = \aleph$ volgt $p(X_a) \leq \aleph$ voor alle $a \in A$
$|A| \leq 2^{\aleph}$ (stelling 3)

Als nu noch aan 1. noch aan 2. is voldaan, volgt (indien men stelt $\aleph = 2^{\aleph'}$)

$$\begin{aligned} &p(X_a) \leq \aleph' \quad \text{voor alle } a \in A \\ &|A| < 2^{\aleph}, \text{ dus } \leq \aleph = 2^{\aleph'} \end{aligned},$$

maar dan is op grond van stelling 3

$$p(X) \leq \aleph' < \aleph$$

contradictie.

II. a. Uit 1 en/of 2. volgt $p(X) \leq \aleph$ (stelling 3)

Als nu $p(X) < \aleph$, dan is $p(X) \leq \aleph'$ voor zekere $\aleph' < \aleph$

en dus (stelling 3):

$$\begin{cases} p(X_a) \leq \aleph' < \aleph & \text{voor alle } a \in A \\ |A| \leq 2^{\aleph'} < \aleph \end{cases}$$

b. Uit $p(X) = \aleph$ volgt $\begin{cases} p(X_a) \leq \aleph \text{ voor alle } a \in A \\ |A| \leq 2^{\aleph} \end{cases}$ (stelling 3)

Als nu nòch aan 1. noch aan 2. is voldaan, volgt

$$\begin{cases} \exists\, \aleph' < \aleph : \forall a \in A : \quad p(X_a) \leq \aleph' \\ |A| < \aleph, \text{ dus } \leq \aleph'' \text{ voor zekere } \aleph'' < \aleph; \end{cases}$$

stelt men $\aleph^* = \max(\aleph', \aleph'')$, dan volgt

$$\begin{cases} \forall a \in A : p(X_a) \leq \aleph^* \\ |A| \leq 2^{\aleph^*} \end{cases}$$

en dus, op grond van stelling 3

$$p(X) \leq \aleph^* < \aleph .$$

B. In het rapport ZW 1962-010 van het Mathematisch Centrum is de ruimte $\{0,1\}^{\nu}$ voor elk ordinaalgetal ν gedefinieerd. We bewijzen nu de volgende stelling over het gewicht van deze ruimte:

<u>Stelling</u>: Als $\mu = \mu(\aleph)$ het eerste ordinaalgetal is van de getalklasse waarvan $\aleph$ het kardinaalgetal is, dan geldt:

1. $w(\{0,1\}^{\mu}) = \aleph$
2. $w(\{0,1\}^{\nu}) = 2^{\aleph}$ voor $\nu \geq \mu+1$, $|\nu| = \aleph$

<u>Bewijs</u>:

1. Zij

$A = \{ a \mid a = (a_i)_{i < \mu}, \ a_i = 0$ of 1 en $[(\exists\, i_0 < \mu : a_i = 0$ voor $i \geq i_0)$

of $(\exists i_0<\mu : a_i = 1$ voor $i \geq i_0)]\}$

Dan tonen we aan, dat de familie van verzamelingen

$$\{x \mid a_1 < x < a_2\} \quad (a_1 \in A,\ a_2 \in A)$$

een basis is voor de topologie van $\{0,1\}^\mu$.

Zij n.l. θ een open verzameling in $\{0,1\}^\mu$; z.b.d.a. zij

$$\theta = \theta_{b^{(1)}b^{(2)}} = \{b \mid b^{(1)} < b < b^{(2)}\} ;$$

indien $b^{(1)} = (b_i^{(1)})_{i<\mu}$ en $b^{(2)} = (b_i^{(2)})_{i<\mu}$, laat dan i_0 de eerst index zijn, waarvoor $b_i^{(2)} \neq b_i^{(2)}$; dan is dus $b_{i_0}^{(1)} = 0$, $b_{i_0}^{(2)} = 1$.

(i) $\theta_{b^{(1)}b^{(2)}} = \emptyset$ dan en slechts dan als

$$b_i^{(1)} = 1,\ b_i^{(2)} = 0 \text{ voor } i \geq i_0 + 1$$

(ii) Als $\theta_{b^{(1)}b^{(2)}} \neq \emptyset$, kies dan b $\theta_{b^{(1)}b^{(2)}}$

α. Als $\theta_{b^{(1)}b} = \emptyset$, dan bestaat er een $i_1 < \mu$ zodanig, dat

$$b_{i_1}^{(1)} = 0,\ b_{i_1} = 1 \text{ en } b_i^{(1)} = 1,\ b_i = 0 \text{ voor } i > i_1 ;$$

dan is $\theta_{bb^{(2)}} \neq \emptyset$ en er bestaat een $a \in A \cap \theta_{bb^{(2)}}$

Dus:

$$b \in \theta_{b^{(1)}a} \subset \theta_{b^{(1)}b^{(2)}} ,$$

waarin $\theta_{b^{(1)}a} \in B$ (omdat $b^{(1)} \in A$)

β. Als $\theta_{bb^{(2)}} = \emptyset$, dan bestaat er een $i_1 < \mu$, zodanig, dat

$$b_{i_1} = 0, b^{(2)}_{i_1} = 1 \quad \text{en } b_i = 1,\ b^{(2)}_i = 0 \quad \text{voor } i > i_1 \ ;$$

dan is $O_{b^{(1)}b} \neq \emptyset$, en er bestaat een $a \in A \cap \Theta_{b^{(1)}b}$

Dus:

$$b \in \Theta_{ab^{(2)}} \subset \Theta_{b^{(1)}b^{(2)}}$$

waarin

$$\Theta_{ab^{(2)}} \in B \quad (\text{omdat } b^{(2)} \in A)$$

Indien zowel $\Theta_{b^{(1)}b} \neq \emptyset$ als $\Theta_{bb^{(2)}} \neq \emptyset$,

kies dan

$$a_1 \in \Theta_{b^{(1)}b} \cap A \quad \text{en } a_2 \in \Theta_{bb^{(2)}} \cap A;$$

dan volgt

$$b \in \Theta_{a_1a_2} \subset \Theta_{b^{(1)}b^{(2)}}$$

waarin $\Theta_{a_1a_2} \in B$

Dus is B inderdaad een basis voor de topologie in $\{0,1\}^{\mu}$
Daar $|B| = \aleph$ volgt

$$w(\{0,1\}^{\mu}) \leq \aleph$$

En dus, omdat

$$2^{\aleph} = |\{0,1\}^{\mu}| \leq 2^{w},$$

volgt: $w(\{0,1\}^{\mu}) = \aleph.$

2. a. Zij $\nu = \mu + 1$.
Laat B een basis zijn voor de topologie in $\{0,1\}^{\mu+1}$
Daar elke verzameling

$$\{x \mid x < a,\ a = (a_i)_{i < \mu+1},\ a_i = 0 \text{ of } 1,\ a_{\mu} = 1\}$$

open is, en bovendien een grootste element heeft

(n.l. $a' = (a_i')_{i<\mu+1}$ met $a_i' = a_i$ voor $i<\mu$, $a_\mu' = 0$),

volgt, voor elke

$$a=(a_i)_{i<\mu+1} \quad \text{met } a_\mu = 0$$

de **existentie** van een $\theta \in B$, waarvan a het grootste element is; derhalve is

$$|B| \geqq 2^{|\mu|} = 2^{\aleph} ;$$

en dus, daar dit voor iedere basis geldt:

$$w(\{0,1\}^{\mu+1}) \geqq 2^{\aleph} ;$$

daar echter anderzijds

$$w(\{0,1\}^{\mu+1}) \leqq |\{0,1\}^{\mu+1}| = 2^{\aleph},$$

is dus

$$w(\{0,1\}^{\mu+1}) = 2^{\aleph}$$

b. Voor $\nu \geqq \mu+2$, $|\nu| = \aleph$ is (rapport ZW 1962-010)

$$p(\{0,1\}^{\nu}) = 2^{\aleph},$$

dus

$$w(\{0,1\}^{\nu}) \geqq 2^{\aleph},$$

en dus ook

$$w(\{0,1\}^{\nu}) = 2^{\aleph}.$$