STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-020

Over canonische vormen

"Actualiteiten"

H.J.A. Duparc

1950

Voordracht door H.J.A.Duparc in de serie
Actualiteiten op 16 December 1950.

Over canonische vormen.

Twee gehele rationale vormen van dezelfde graad in hetzij evenveel cogrediënte variabelen, hetzij evenveel contragrediënte variabelen, worden gelijksoortig genoemd.

Twee gehele rationale vormen van dezelfde graad, de ene in een aantal cogrediënte, de andere in evenveel contragrediënte variabelen, noemen we gelijksoortig-duaal.

Wij schrijven een p-aire vorm van de n^e graad in de gedaante

$$f(x) = \sum a_{ijk\ldots}\, x_i x_j x_k \cdots = (a'x)^n,$$

waarbij in het laatste lid de symbolische notatie is toegepast. De gelijksoortig-duale vorm schrijven we in de gedaante

$$\varphi(u) = \sum \alpha_{ijk\ldots}\, u_i u_j u_k \cdots = (\alpha u')^n.$$

In beide symbolische uitdrukkingen verstaat men onder (r's) de vorm $\sum\limits_{i=1}^{p} r_i' s_i$.

In het vervolg zullen wij het aantal coëfficiënten van de p-aire vorm van de n^e graad aanduiden met N. Men heeft dan $N = \binom{p+n-1}{n-1}$.

Men noemt twee gelijksoortig-duale vormen $f=(a'x)^n$ en $\varphi=(\alpha u')^n$ apolair als $(a'\alpha)^n=0$. De voorwaarde voor het apolair zijn is dus bilineair in de coëfficiënten van f en φ.

Een niet-symbolische methode om de uitdrukking $(a'\alpha)^n$, die men wel met $(f,\varphi)_N$ aangeeft, te berekenen, wordt ons door de formule

$$(f,\varphi)_N = \frac{1}{n!^2}\, D^n(f\varphi)$$

gegeven, waarin

$$D = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u_i}$$

Immers men heeft

$$D(f\varphi) = D\left\{(a'x)^n(\alpha u')^n\right\} = n^2 (a'\alpha)(a'x)^{n-1}(\alpha u')^{n-1},$$

en past men op het gevonden resultaat de operator D voldoende vaak toe, dan verkrijgt men de gewenste formule.

Uit het bilineair karakter van de uitdrukking $(f,\varphi)_N$ volgt nog: Is een vorm apolair met een aantal gelijksoortige ermee duale vormen, dan is die vorm ook apolair met elke lineaire combinatie dier vormen.

Met N-k gelijksoortige lineair onafhankelijke vormen zijn in het algemeen k gelijksoortig-duale vormen apolair.

Voor het geval men te doen heeft men twee vormen $f=(a'x)^n$ en $\varphi=(\alpha u')^m$ van ongelijke graad beiden in evenveel variabelen, zegt men dat f en φ apolair zijn, als

(1) $$(a'\alpha)^m (a'x)^{n-m} \equiv 0 \quad \{x\}, \text{ als } n>m;$$

(2) $$(a'\alpha)^n (\alpha u')^{m-n} \equiv 0 \quad \{u\}, \text{ als } n<m.$$

In het eerste geval heeft men

(3) $$(a'\alpha)^m a'_{i_1} a'_{i_2} \cdots a'_{i_{n-m}} = 0,$$

waarin elk der getallen $i_1, i_2, \ldots, i_{n-m}$ elk der waarden 1, 2, ..., p kan aannemen en omgekeerd volgt uit (3), geldig voor al die waarden der indices, de betrekking (1). Analoog is (2) aequivalent met

$$(a'\alpha)^n \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{m-n}},$$

waarin ieder der optredende indices wederom de waarden 1, ..., p kan aannemen.

<u>Stelling.</u> Is een vorm $f=(a'x)^n$ apolair met een echte n^e macht van een vorm (pu'), dan ligt het punt p op f.

Immers men heeft dan $(a'p)^n=0$.

<u>Stelling.</u> Is een vorm $f=(a'x)^n$ apolair met een echte k^e macht van een vorm (pu'), dan is het punt p een (n-k+1)-voudig punt van f(x)=0.

Immers men heeft in dit geval $(a'p)^k (a'x)^{n-k} \equiv 0 \ \{x\}$.

Na deze inleidende beschouwingen stellen wij ons de vraag waar het ons thans om te doen is:

Als gegeven is een willekeurige p-aire vorm $(a'x)^n$, is het dan mogelijk door een projectieve transformatie $x_i = \sum_{j=1}^{p} e_{ij} X_j$ deze vorm over te voeren in een vorm van de gedaante $(A'X)^n$ waarin de coëfficiënten $A_{ikl\ldots}$ voorgeschreven zijn?

Het is duidelijk dat men om dit doel te bereiken, de coëfficiënten e_{ij} zo moet kiezen, dat aan een aantal betrekkingen voldaan is. Het aantal voorgeschreven coëfficiënten $A_{ikl\ldots}$ mag derhalve (in het algemeen) niet groter zijn dan het aantal coëfficiënten e_{ij}. Deze opmerking echter geeft nog niet een definitief antwoord op de vraag, zoals uit de volgende gevallen zal blijken.

In het binaire gebied beschouwe men de cubische vorm $(a'x)^3$ en stelle men zich de vraag of het mogelijk is deze door een projectieve transformatie over te voeren in de gedaante $X_1^3 + X_2^3$. Hiertoe moet men aan de 4 coëfficiënten e_{ij} 4 voorwaarden opleggen, zodat men in het algemeen verwachten kan dat de gevraagde transformatie mogelijk is. Men kan dan in het algemeen de vorm $(a'x)^3$ in de canonische gedaante $X_1^3 + X_2^3$ overvoeren.

Hoewel men ook 4 voorwaarden in de e_{ij} krijgt, als men onze vorm $(a'x)^3$ in de gedaante $X_1^3 + X_1^2X_2$ wenst te brengen, is het duidelijk dat deze voorwaarden voor de e_{ij} strijdig moeten zijn, want de vereiste vorm heeft een dubbele wortel $X_1=0$, terwijl de willekeurige vorm deze niet behoeft te bezitten en een projectieve transformatie dubbele wortels in dubbele wortels overvoert.

Men had zich in het bovenstaande ook de vraag kunnen stellen of er getallen e_{ij} bestaan (i, j = 1, 2), met

$$(a'x)^3 = \sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{j=1}^{2} e_{ij}\, x_j\Big)^3 \qquad \text{resp.} \quad \Big(\sum_{j=1}^{2} e_{ij}\, x_j\Big)^2 \sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{j=1}^{2}(e_{ij}\, x_j)\Big).$$

Het is in deze vorm dat wij het onderzoek willen vervolgen.

In 1904 merkte de schaakmeester E.Lasker op, dat de algemene ternaire biquadratische vorm, die 15 coëfficiënten bezit, niet in de gedaante

$$\sum_{i=1}^{5}\Big(\sum_{j=1}^{3} e_{ij}\, x_j\Big)^4$$

te brengen is, hoewel de laatste uitdrukking 15 onbekende coëfficiënten e_{ij} bevat. Blijkbaar zijn in het algemeen de betrekkingen waaruit die coëfficiënten e_{ij} moeten worden bepaald, strijdig.

In 1918 heeft E.K.Wakeford een eenvoudig theorema gegeven, waarmee men kan uitmaken of een bepaalde vorm als canonische vorm voor zeker type van vormen kan optreden. Dit theorema, bekend als theorema van Lasker-Wakeford, luidt als volgt:

Een vorm $F(X,m) = F(X_1,\dots,X_k, m_1,\dots,m_r)$

in k variabelen $X_1,\dots,X_k$, die r parameters $m_1,\dots,m_r$ bevat, is mogelijk als canonische vorm van een vorm f(x) als er niet steeds een met f(x) gelijksoortig-duale vorm $\varphi(u)$ bestaat, die apolair is met alle vormen $\dfrac{\partial F}{\partial X_\kappa}$; $\dfrac{\partial F}{\partial m_\rho}$ $(\kappa=1,\dots,k;\ \rho=1,\dots,r)$.

Bestaat zo'n duale vorm $\varphi(u)$ wel steeds, dan is F niet een canonische gedaante van f(x).

Bij dit theorema is het niet nodig dat de grootheden $X_1, \dots, X_k$ lineair zijn in de oorspronkelijke variabelen $x_1,\dots,x_p$. Wij onderstellen slechts dat elk der X_k van een gedaante $e_{k,ij\dots}\, x_i x_j \dots$ is. Het aantal der parameters e wordt hierbij $\geq$ N-r ondersteld. In het volgende zullen wij alle coëfficiënten $e_{\kappa,ij\dots}$ op een of andere wijze aftellen en ze dan korter aangeven met e_λ.

Bij het bewijs beschouwen de identiteit

$$f(x) = F(X, m).$$

Zijn de coëfficiënten van f(x) resp. $b_1, b_2, \ldots, b_N$, dan levert deze identiteit, na uitdrukken van de grootheden X in de grootheden e_λ en x_i

$$b_\nu = g_\nu(e_\lambda, m_\rho) \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Zijn deze betrekkingen oplosbaar in de grootheden e_λ en m_ρ, wier aantal M wij $\geqq$ N onderstelden, dan is F een canonische vorm van f; zijn ze in het algemeen niet oplosbaar, dan niet. In het laatste geval zijn de functies g_ν niet onafhankelijk, d.w.z. er bestaat een functie G, zodanig dat

$$(4) \qquad G(g_\nu) \equiv 0 \qquad \{e_\lambda, m_\rho\}.$$

In het eerste geval is er geen functie G, zodanig dat $G(g_\nu)$ identiek nul is. Geldt echter (4), dan heeft men voor alle optredende waarden van λ en ρ

$$(5) \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial G}{\partial g_\nu} \frac{\partial g_\nu}{\partial e_\lambda} = 0 \;; \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial G}{\partial g_\nu} \frac{\partial g_\nu}{\partial m_\rho} = 0 .$$

Deze relaties kunnen wij op de volgende wijze interpreteren. De grootheden $g_\nu = b_\nu$ zijn de coëfficiënten van de vorm f; vat nu, afgezien van zekere getallen-factoren, de grootheden $\frac{\partial G}{\partial g_\nu}$ op als coëfficiënten van een met f gelijksoortig duale vorm φ, dan leren de relaties (5) ons, dat

φ apolair is met alle $\frac{\partial f}{\partial e_\lambda}$ en alle $\frac{\partial f}{\partial m_\rho}$;

dus

φ is apolair met alle $\frac{\partial F}{\partial e_\lambda}$ en alle $\frac{\partial F}{\partial m_\rho}$;

Wij zien dus, dat als zo'n vorm φ steeds bestaat, F niet canonisch is voor f en dat als φ niet steeds bestaat, F canonisch is voor f.

De stelling van Lasker-Wakeford is dus bewezen, zodra wij aantonen, dat een vorm φ, die apolair is met alle vormen $\frac{\partial F}{\partial e_\lambda}$, apolair is met alle $\frac{\partial F}{\partial X_k}$ en omgekeerd.

Nu heeft men in symbolische notatie $X_k = \sum e_{k,ij\ldots} x_i x_j \ldots$ Is φ apolair met alle $\frac{\partial F}{\partial X_k}$, dan is wegens

$$\frac{\partial F}{\partial e_{k,ij\ldots}} = \frac{\partial F}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial e_{k,ij\ldots}} = \frac{\partial F}{\partial X_k} x_i x_j \ldots$$

φ zeker apolair met alle $\frac{\partial F}{\partial e_{k,ij\ldots}}$. Is omgekeerd φ apolair met alle

$\frac{\partial F}{\partial x_{k,i,\ldots}}$, dan is φ apolair met $\frac{\partial F}{\partial X_k} \cdot x_i x_j \ldots$ voor alle k, i, j,...
dus wegens de definitie van apolariteit van duale vormen van ongelijke graad (in casu φ en $\frac{\partial F}{\partial X_k}$) is φ apolair met alle $\frac{\partial F}{\partial X_k}$. Hiermee is het theorema volledig bewezen.

Wij geven thans enige toepassingen.
In het binaire gebied bezit elke vorm $(a'x)^n$ een canonische gedaante $F = \sum_{i=1}^{k} X_i^{\,n}$, waarin $X_i = \sum_{j=1}^{2} e_{ij} x_j$. Wij bepalen de minimale waarde van k.

Wij beschouwen daartoe de duale binaire vorm $\varphi = (\alpha u')^n$ en onderzoeken of deze zo te bepalen is, dat deze apolair is met elk der vormen $\frac{\partial F}{\partial X_i} = n\, X_i^{\,n-1}$, dus met een echte $(n-1)^e$ macht. Om dit te beoordelen lossen wij het duale vraagstuk op en vragen of er een binaire vorm $B = (b'x)^n$ bestaat, die apolair is met elk der echte $(n-1)^e$ machten U_i^{n-1}, d,w.z. die in elk der door $U_i=0$ aangegeven punten dubbelpunten bezit. Het is duidelijk dat steeds een vorm B te vinden is, die in $\left[\frac{n}{2}\right]$ gegeven punten dubbelpunten (= dubbele wortels) bezit, maar niet steeds een die in $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ punten dubbelpunten bezit. Dus het gezochte kleinste aantal k is gelijk aan $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Elke binaire quadratische (cubische) vorm is dus te schrijven als de som van twee quadraten (derde machten).

In het p-aire gebied kunnen wij een analoge stelling formuleren.

Een p-aire vorm f van de graad n is te schrijven als som $F=\sum_{i=1}^{k} X_i^n$ van k (maar in het algemeen niet als som van k-1) n^e machten als er in het p-aire gebied wel een hyperoppervlak van de graad n bestaat dat in k-1 willekeurig voorgeschreven punten dubbelpunten (kegelpunten, ...) bezit, maar geen zo'n oppervlak dat in k zulke punten dubbelpunten bezit.

Volgens het theorema van Lasker-Wakeford is het voldoende het minimale getal k te bepalen, waarvoor een duale vorm φ niet steeds bestaat, die apolair is met elk der k uitdrukkingen $\frac{\partial F}{\partial X_i} = n X_i^{\,n-1}$, dus die k gegeven rechten tot dubbelrechten bezit en om dit uit te maken zoeken wij het minimale getal k waarvoor een vorm $B = (b'x)^n$ niet steeds bestaat, die in k gegeven punten dubbelpunten bezit.

Voorbeelden.

Er bestaat steeds een kegelsnede, die in twee gegeven punten dubbelpunten bezit (n.l. de dubbelgetelde verbindingslijn dier punten) maar niet steeds een, die in drie gegeven punten dubbelpunten bezit. Derhalve is elke ternaire quadratisch vorm te schrijven als som van tenminste 3 quadraten.

Er bestaat steeds een cubische vlakke kromme, die in drie gegeven punten dubbelpunten bezit (n.l. de cubische kromme die ontaard is in de drie verbindingsrechten dier punten), maar niet steeds een, die in 4 gegeven punten dubbelpunten bezit. Dus de ternaire cubische vorm is te schrijven als som van tenminste 4 derde machten.

Er bestaat een vierde graads vlakke kromme, die in 5 gegeven punten dubbelpunten bezit (n.l. de dubbelgetelde kegelsnede door die punten), maar in het algemeen geen die in 6 gegeven punten dubbelpunten bezit. Derhalve is iedere ternaire biquadratische vorm te schrijven als een som van tenminste 6 vierde machten.

Op analoge wijze blijkt dat de ternaire vorm van de 5^e graad te schrijven is als som van tenminste 7 vijfde machten.

Er bestaat een quadratisch oppervlak in de driedimensionale ruimte, dat dubbelpunten heeft in 3 gegeven punten (n.l. het dubbelgetelde vlak erdoor), maar geen dat dubbelpunten bezit in 4 gegeven punten. Derhalve is iedere quaternaire quadratische vorm te schrijven als een som van tenminste 4 quadraten.

Er bestaat een cubisch oppervlak, dat dubbelpunten bezit in 4 gegeven punten, maar geen dat dubbelpunten heeft in 5 gegeven punten, waaruit volgt dat de quaternaire cubische vorm te schrijven is als som van tenminste 5 derde machten.

Verder blijkt direct: De p-aire quadratische vorm is te schrijven als som van tenminste p quadraten.

Een ander type canonische gedaante leiden wij af voor de ternaire vorm $(a'x)^4$. Deze is n.l. te brengen in de gedaante $F=Q_1Q_2-Q_3^2$, waarin Q_1, Q_2 en Q_3 quadratisch zijn in de variabelen x_1, x_2 en x_3. Hiertoe onderzoeke men of er niet steeds een duale vorm $\varphi=(\alpha u')^4$ bestaat, die apolair met elk der vormen Q_i (i=1, 2, 3), dus met Q_1, Q_2 en Q_3. In het geval dat $Q_i=x_i^2$ (i= 1,2,3) levert dit op dat alle coëfficiënten α_{ijkl} van φ nul zijn, dus F is canonisch voor f. Evenzo blijkt de canonische vorm $Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$ mogelijk voor f.

Als voorbeeld van canonische vormen met parameters m geven wij nog: De binaire vorm $(a'x)^4$ is te schrijven in de gedaante $F=X^4+6mX^2Y^2+Y^4$. Een duale vorm $\varphi=(\alpha u')^4=\sum_{i=0}^{4}\alpha_i u_1^i u_2^{4-i}$, apolair met $\frac{\partial F}{\partial X}$, $\frac{\partial F}{\partial Y}$ en $\frac{\partial F}{\partial m}$, dus met $4X^3+12mXY^2$, $12mYX^2+4Y^3$ en $6X^2Y^2$ zal in het geval $X=x_1; Y=x_2$ apolair moeten zijn met $4x_1^3+12mx_1x_2^2$; $12mx_1^2x_2+4x_2^3$; $6x_1^2x_2^2$, dus alle coëfficiënten α_i (i= 0,1,2,3,4) van φ blijken nul te zijn.

Een ternaire cubische vorm $(a'x)^3$ bezit mits $8m^3\neq -1$ de canonische gedaante $F=X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 6mX_1X_2X_3$. Immers de duale vorm $\varphi=(\alpha u')^3$ apolair met alle $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ en $\frac{\partial F}{\partial m}$, dus (mits $8m^3\neq -1$) heeft [illegible] $\alpha_{ikl}=0$ voor het geval $X_i=x_i$ genomen wordt en bestaat dus niet steeds.

In 1924 gaf Turnbull voor de quaternaire cubische vorm behalve de canonische voorstelling $\sum_{i=1}^{5} X_i^3$ ook nog de voorstellingen

$$\sum_{i=1}^{p} X_i^3 + \sum_{i=p+1}^{5} K_i Q_i \qquad (p=0,1,2,3,4),$$

waarin de uitdrukkingen K_i en Q_i resp. lineair en quadratisch zijn in de grootheden x.

Tenslotte geven we nog een generalisatie van de stelling van Hasker-Wakeford.

Zijn f en g twee gelijksoortige vormen, dan zijn F=F(X,m) resp. G=G(X,m) hiervoor canonische vormen als er niet een stel getallen λ_1, λ_2 (niet beide nul) en een met f gelijksoortig duale vorm φ bestaan, waarvoor φ apolair is met alle optredende afgeleide vormen

$$\frac{\partial(\lambda_1 F+\lambda_2 G)}{\partial X} \quad ; \quad \frac{\partial(\lambda_1 F+\lambda_2 G)}{\partial m} .$$

Het bewijs verlooptanaloog aan dat van de niet gegeneraliseerde stelling. Zijn a_ν en b_ν ($\nu=1,\ldots,N$) de coëfficiënten van f resp. g dan moet voor alle λ_1, λ_2 (niet beide nul) het stelsel

$$\lambda_1 a_\nu + \lambda_2 b_\nu = h_\nu(e,m)$$

oplosbaar zijn. Hierin is wederom iedere X=X(x,e). Dit is slechts dan niet het geval als er tenminste één stel λ_1, λ_2 (niet beide nul) bestaat, zodanig dat $H(h_1,\ldots,h_N) \equiv 0 \; \{e,m\}$, dus

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial h_\nu}\frac{\partial h_\nu}{\partial e} = 0 \quad ; \quad \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial h_\nu}\frac{\partial h_\nu}{\partial m} = 0$$

dus een met f duale vorm φ, met (afgezien van getallen factoren) coëfficiënten gelijk aan $\frac{\partial H}{\partial h_\nu}$ ($\nu=1,\ldots,N$), die apolair is met alle $\frac{\partial(\lambda_1 F+\lambda_2 G)}{\partial e}$, $\frac{\partial(\lambda_1 F+\lambda_2 G)}{\partial m}$, dus als in het voorafgaande met alle

$$\frac{\partial(\lambda_1 F+\lambda_2 G)}{\partial X} \quad , \quad \frac{\partial(\lambda_1 F+\lambda_2 G)}{\partial m} .$$

Voorbeeld. f en g zijn kegelsneden; men wenst ze in de canonische vorm $F=\sum_{i=1}^{3} X_i^2$ resp. $\Gamma=\sum_{i=1}^{3} m_i X_i^2$ te brengen. Men zoeke dus een vorm $\varphi=(\alpha u')^2$ en een stel getallen λ_1, λ_2 (niet beide nul), zodanig dat φ apolair is met alle $\frac{\partial(\lambda_1 F+\lambda_2 G)}{\partial X}$, $\frac{\partial(\lambda_1 F+\lambda_2 G)}{\partial m}$, in casu met de zes vormen

$$(\lambda_1 + \lambda_2 m_i)X_i \quad ; \quad \lambda_2 m_i X_i^2 \quad (i=1,2,3).$$

Is $\lambda_1 + \lambda_2 m_i \neq 0$ voor i=1,2,3, dan is elke coëfficiënt α_{ik} van φ gelijk aan nul. Is daarentegen een der uitdrukkingen $\lambda_1 + \lambda_2 m_i = 0$ b.v. $\lambda_1 + \lambda_2 m_1 = 0$, dan vindt men $\alpha_{2k}=0$, $\alpha_{3k}=0$ (k=1,2,3), terwijl wegens $\lambda_2 \neq 0$ dan uit de apolariteit van φ en $\lambda_2 m_1 X_1^2$ volgt $\alpha_{11}=0$, dus ook dan is $\varphi=0$.

Hierbij is werkelijk gebruik gemaakt van het feit dat er geen λ_1, λ_2 (beide ongelijk nul) bestaan met $\lambda_1+\lambda_2 m_i=0$ voor meer dan één waarde van i, want dan bestaat de apolaire vorm voor zo'n stel λ_1, λ_2 wel en is de gezochte voorstelling niet canonisch. In dit geval zijn echter twee der coëfficiënten m gelijk, zodat dan van F en G zekere projectieve simultane invariant nul is, die voor f en g in het algemeen niet nul behoeft te zijn, zodat dan de omzetting in het algemeen onmogelijk is.

Ook in het geval, dat een der coëfficiënten m nul is, blijkt om dezelfde redenen de canonische voorstelling niet te bestaan.

Het is duidelijk dat dit theorema m.m. eveneens geldt, als men meer dan twee gelijksoortige vormen in een voorgeschreven canonische gedaante wenst te brengen.

Litteratuur:

E.Lasker: Math.Annalen 58 (1904), 434-440.
Zur Theorie der kanonischen Forme.

E.K.Wakeford: Proc. London Math.Soc. 2,18 (1920), 403-410.
On canonical forms.

H.W.Turnbull: Proc. Cambr. Phil.Soc. 22 (1924), 92-100.
Canonical forms of the quaternary cubic, associated with arbitrary quadrics.