STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 020

Een opmerking over rapport ZW 1949 - 001

H.J.A. Duparc en W. Peremans.

1952

Een opmerking over rapport ZW 1949-001.

H.J.A.Duparc en W.Peremans.

In rapport ZW 1949-001 beschouwden J.Korevaar en P.A.J.Scheelbeek een vierkante matrix (c_{rs}) van de orde $t+1$ met $c_{rs}=\binom{n+r-1}{t+s}$, waarbij n een natuurlijk getal $\geqq 2t+1$ voorstelt, en bepaalden hiervan de inverse. Hiertoe berekenden zij de determinantwaarde van de minor van een willekeurig element van deze matrix.

Wij laten thans zien dat het door hen gevondene een bijzonder geval is van een algemenere eigenschap, bewezen in een artikel Determinants and quadratic forms, van J.G.van der Corput en H.J.A. Duparc *). In dit artikel wordt de volgende stelling bewezen.

Zij $|c_{rs}|$ een determinant van de m^e orde met $c_{rs}=e_{rs}\varphi_s(y_r)$, waarbij $\varphi_s(y)$ een polynoom is in y van een graad $\leqq m-s$; waarbij

$$e_{r.s+1}=e_{rs}a_s(y_r-x_s).$$

Dan heeft men voor de minor C_{hk} van het element c_{hk} in $|c_{rs}|$ de formule

$$C_{hk}=\frac{e_{11}\ldots e_{m1}\,a_1^{m-1}a_2^{m-2}\ldots a_{m-1}p(y_h)\prod_{1\leqq\sigma<\varrho\leqq m}(y_\varrho-y_\sigma)\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_m(x_m)}{e_{h1}\,a_1\ldots a_{k-1}\,\varphi_k(x_k)q'(y_h)},$$

waarin

$$q(y)=(y-y_1)\ldots(y-y_m)$$

en

$$p(y)=\sum_{i=1}^{k}\frac{(x_i-y_1)\ldots(x_i-y_m)}{(x_i-y)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_k)}.$$

Wij passen deze stelling toe met $m=t+1$; $e_{r1}=\binom{n+r-1}{t+1}$; $a_r=\frac{1}{t+r+1}$;

$y_r=n+r-1$; $x_r=t+r$; $\varphi_r(y)=1$ $(r=1,\ldots,t+1)$.
Dan geldt voor $r=1,\ldots,t+1$

$$c_{r1}=\binom{n+r-1}{t+1}=e_{r1},$$

en verder voor $s=1,\ldots,t-1$

$$c_{r.s+1}=\binom{n+r-1}{t+s+1}=\binom{n+r-1}{t+s}\frac{n+r-t-s-1}{t+s+1}=c_{rs}a_s(y_r-x_s),$$

dus, wegens

$$\varphi_r(y)=1,$$

$e_{r.s+1}=e_{rs}\,a_s(y_r-x_s)$, zodat de door Korevaar en Scheelbeek beschouwde determinant inderdaad van het door Van der Corput en Duparc beschouwde type is. Uit hun artikel volgt dan

$$C_{hk}=\frac{\binom{n}{t+1}\ldots\binom{n+t}{t+1}}{\binom{n+h-1}{t+1}}\,\frac{p(n+h-1)\prod_{1\leqq\sigma<\varrho\leqq t+1}(\varrho-\sigma)}{(t+2)^{t-1}(t+3)^{t-2}\ldots(t+k)^{t-k+1}(t+k+1)^{t-k+1}\ldots(2t+1)q'(y_h)}$$

---

*) Proceedings Kon.Ned.Ak.v.Wetensch. 49 (9);1946; 995-1002.

$$= \frac{\binom{n}{t+1}\cdots\binom{n+t}{t+1}}{\binom{n+h-1}{t+1}} \frac{1!2!\ldots(t-1)!t!}{(t+2)^{t-1}\ldots(t+k)^{t-k+1}(t+k+1)^{t-k+1}\ldots(2t+1)}$$

$$\times \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-y_1)\ldots(x_i-y_{t+1})}{(x_i-y_h)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_k)}}{(h-1)!(-)^{t-h+1}(t+1-h)!} =$$

$$= \frac{\binom{n}{t+1}\cdots\binom{n+t}{t+1}1!\ldots t!}{\binom{n+h-1}{t+1}(t+2)^{t-1}\ldots(t+k)^{t-k+1}(t+k+1)^{t-k+1}\ldots(2t)^2(2t+1)}$$

$$\times \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{(i-n)\ldots(t+i-n)(-)^{k-i}}{(t+i-n-h+1)(i-1)!(k-i)!}}{(h-1)!(t+1-h)!(-)^{t-h+1}} .$$

Voor deze minor wordt in genoemd rapport een andere formule afgeleid. Daar werd beschouwd de minor M van het element $\binom{n+j}{t+i}$, dus van het element $e_{j+1,i}$. Wij vervangen dus in het daarvoor gevonden antwoord j+1 door h, d.w.z. j door h-1 en i door k en krijgen dan een formule

$$M=(-)^{h+k}\frac{\binom{n}{t+1}\cdots\binom{n+t}{t+1}t!(t-1)!\ldots1!}{\binom{n+h-1}{t+1}(t+2)^{t-1}(t+3)^{t-2}\ldots(t+k)^{t-k+1}(t+k+1)^{t-k+1}\ldots(2t)^2(2t+1)}$$

$$\times \frac{(n-t-1)(n-t)\ldots(n-k)}{(k-1)!(t-k+1)!} \sum_{r=0}^{h-1} \binom{k-1}{r+k-h}\binom{t-k+1}{r} \frac{1}{n-t+r-1} .$$

Wij tonen nu aan dat de beide resultaten overeenstemmen, of, wat op hetzelfde neerkomt, dat

$$\frac{1}{(h-1)!(t+1-h)!} \sum_{i=1}^{k} \frac{(i-n)\ldots(t+i-n)(-)^{i+t+1}}{(t+i-n-h+1)(i-1)!(k-i)!} =$$

$$= \frac{(n-t-1)(n-t)\ldots(n-k)}{(k-1)!(t-k+1)!} \sum_{r=0}^{h-1} \binom{k-1}{r+k-h}\binom{t-k+1}{r} \frac{1}{n-t+r-1} ,$$

dus dat

$$\frac{1}{(h-1)!(t+1-h)!} \sum_{i=1}^{k} \frac{(n-i)!(-)^{i}}{(n-i-t-1)!(i-1)!(k-i)!(t+i-n-h+1)} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{(n-t-2)!} \sum_{r=0}^{h-1} \frac{1}{(r+k-h)!(h-r-1)!r!(t-k-r+1)!(n-t+r-1)} ,$$

dus dat (stel r=h-j)

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{k} \binom{n-i}{n-k}\binom{n-t-2}{i-1} \frac{(-)^{i}}{t+i-n-h+1} = \sum_{j=1}^{h} \binom{h-1}{j-1}\binom{t+1-h}{k-j} \frac{1}{n-t-j+h-1} .$$

Deze formule tonen wij op de volgende wijze aan.

Uit

$$(1+x)^{h-1} = \sum_{j=1}^{h} \binom{h-1}{j-1} x^{j-1}$$

volgt

$$(1+x)^{h-1} x^{t+1-n-h} = \sum_{j=1}^{h} \binom{h-1}{j-1} x^{j+t-n-h},$$

dus

$$\int_{\infty}^{x} (1+\xi)^{h-1} \xi^{t+1-n-h} d\xi = \sum_{j=1}^{h} \binom{h-1}{j-1} \frac{x^{j+t+1-n-h}}{j+t+1-n-h} .$$

na vermenigvuldiging met

$$(1+x)^{t+1-h} = \sum_{u=0}^{t+1-h} \binom{t+1-h}{u} x^u$$

zien wij dat het rechterlid van (1) gelijk is aan de coëfficiënt van $x^{k+t+1-n-h}$ in de ontwikkeling van

$$(1+x)^{t+1-h} \int_{\infty}^{x} (1+\xi)^{h-1} \xi^{t+1-n-h} d\xi ,$$

dus in

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{h-t-1} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{t+1-h} \int_{0}^{\frac{1}{x}} (1+\eta)^{h-1} \eta^{n-t-2} d\eta$$

en dus gelijk aan de coëfficiënt van $x^{n+h-t-k-1}$ in de ontwikkeling van

$$x^{h-t-1}(1+x)^{t+1-h} \int_{0}^{x} (1+\eta)^{h-1} \eta^{n-t-2} d\eta$$

en dus gelijk aan de coëfficiënt van x^{n-k} in de ontwikkeling van

$$(1+x)^{t+1-h} \int_{0}^{x} (1+\eta)^{h-1} \eta^{n-t-2} d\eta . \tag{2}$$

Anderzijds heeft men

$$x^{n-t-2} = (1+x-1)^{n-t-2} = \sum_{i=1}^{n-t-1} \binom{n-t-2}{i-1} (-)^{i-1} (1+x)^{n-t-i-1} ,$$

dus na vermenigvuldiging van beide leden met $(1+x)^{h-1}$ en integratie vinden wij

$$\int_{0}^{x} (1+\eta)^{h-1} \eta^{n-t-2} d\eta = \sum_{i=1}^{n-t-1} \binom{n-t-2}{i-1} (-)^{i} \frac{(1+x)^{n-t+h-i-1}}{t+i+1-n-h} .$$

Dus

$$(1+x)^{t+1-h} \int_{0}^{x} (1+\eta)^{h-1} \eta^{n-t-2} d\eta = \sum_{i=1}^{n-t-1} \binom{n-t-2}{i-1} (-)^{i} \frac{(1+x)^{n-i}}{t+i+1-n-h} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-t-1} \sum_{v=0}^{n-i} \binom{n-t-2}{i-1} (-)^{i} \binom{n-i}{v} \frac{x^{v}}{t+i+1-n-h}$$

zodat uit het linkerlid der formule (1) eveneens de coëfficiënt is van x^{n-k} in de ontwikkeling van de uitdrukking (2).
Hiermede is formule (1) bewezen en het resultaat van rapport ZW 1949-001 als een bijzonder geval van een algemenere stelling onderkend.