STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957 - 020

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. J.P. van Rooijen
20 november 1957

Bernstein-polynomen

MC
1957

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1957-020

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr J.P. van Rooijen

20 november 1957

Bernstein-polynomen

Gegeven is de begrensde functie $f(x)$ op het gesloten interval $0 \leq x \leq 1$. De bijbehorende Bernstein-polynomen luiden bij definitie:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad . \qquad (1)$$

~~Door de substitutie~~ $x = \frac{\bar{x}}{a}$ kan ~~men~~ terstond ~~overgaan~~ op ~~het~~ interval $(0,a)$; dus:

$$B_n(\bar{x}) = \frac{1}{a^n} \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{ak}{n})\binom{n}{k} \bar{x}^k (a-\bar{x})^{n-k} \quad .$$

Eigenschappen:

1. Uit (1) volgt onmiddellijk: $B_n(0)=f(0)$, $B_n(1) = f(1)$.
2. Indien $f(x) \gtrless 0$, dan tegelijk $B_n(x) \gtrless 0$.
3. Is $f(x) = f_1+f_2+f_3+\ldots$ of $f(x) = cg(x)$,

   dan ook: $B_n[f] = B_n[f_1] + B_n[f_2] + B_n[f_3] + \ldots$

   en evenzo: $B_n[f] = cB_n[g]$.

En uit $c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3+\ldots+c_mf_m=0$

volgt: $c_1B_n[f_1] + c_2B_n[f_2] + \ldots + c_mB_n[f_m] = 0$.

4. $$\int_0^1 B_n(x)dx = \sum_0^n f(\tfrac{k}{n})\binom{n}{k} \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$$

$$= \sum_0^n f(\tfrac{k}{n})\binom{n}{k} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

$$= \sum_0^n \frac{1}{n+1} f(\tfrac{k}{n}) \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx \quad .$$

Transformatie: Uit (1) volgt terstond:

$$B_n(x) = \sum_0^n f(\tfrac{k}{n})\binom{n}{k} x^k \sum_{\lambda=0}^{n-k} (-1)^\lambda \binom{n-k}{\lambda} x^\lambda$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\lambda=0}^{n-k} (-1)^\lambda f(\tfrac{k}{n})\binom{n}{k}\binom{n-k}{\lambda} x^{k+\lambda} \qquad (\text{stel } k+\lambda = \nu)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^{\nu-k} f(\tfrac{k}{n})\binom{n}{k}\binom{n-k}{\nu-k} x^\nu$$

of: $$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^{\nu-k} f(\tfrac{k}{n})\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{k} x^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{\nu-k} \binom{\nu}{k} f(\tfrac{k}{n})$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \Delta^\nu f(0)\, x^\nu \quad . \qquad (2)$$

Enige analogie met de interpolatieformule van Newton is wel te onderkennen, want:

$$N_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{x}{\nu} \Delta^\nu f(0).$$

Uit (2) vloeit blijkbaar voort:

$$B_n'(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \Delta^\nu f(0)\, \nu x^{\nu-1}$$

$$= n \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n-1}{\nu-1} \Delta^\nu f(0)\, x^{\nu-1}$$

$$= n \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \left[\Delta^\nu f(\tfrac{1}{n}) - \Delta^\nu f(0) \right] x^\nu .$$

Soortgelijke uitkomsten gelden voor hogere afgeleiden.
Belangrijke eigenschappen der Bernstein-polynomen:

I. Is $m \leq f(x) \leq M$, dan ook: $m \leq B_n(x) \leq M$.
II. Totale schommeling van $B_n(x) \leq$ totale schommeling van $f(x)$.
Immers:

$$B_n'(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(\tfrac{k+1}{n}) - f(\tfrac{k}{n}) \right] \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} .$$

Dus: $$B_n(x_\mu) - B_n(x_{\mu-1}) = n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(\tfrac{k+1}{n}) - f(\tfrac{k}{n}) \right] \binom{n-1}{k} \int_{x_{\mu-1}}^{x_\mu} x^k (1-x)^{n-k-1} dx$$

En: $$\sum \left| B_n(x_\mu) - B_n(x_{\mu-1}) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(\tfrac{k+1}{n}) - f(\tfrac{k}{n}) \right| \leq \text{totale sch. van } f(x).$$

III. Is $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_m$ en voorts: dan geldt hetzelfde voor de Bernstein-polynomen.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^{m-2} f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots x_2^{m-2} f(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \ldots x_m^{m-2} f(x_m) \end{vmatrix} \gtrless 0$$

IV. Is $f(x)$ continu, dan $B_n(x) \xrightarrow{n:\infty} f(x)$, gelijkmatig.

Generalisering van de Bernstein-polynomen.

A. Volgens: $B_n^{x}(x) = (n+1) \sum\limits_{k=0}^{n} C_k \, f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$,

waarin de C's de getallen van Newton-Cotes voorstellen, bepaald door:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx \sim h \sum_{k=0}^{n} C_k \, f(a+\frac{kh}{n}) \quad .$$

B. Volgens: $B_n^{xx}(x) = (n+1) \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt.$

C. Is $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ begrensd binnen de m-dimensionale kubus $0 \leq x_i \leq 1$, dan definieert men naar analogie met de elementaire Bernstein-polynomen:

$$B_{n_1 \ldots n_m}(x_1 \ldots x_m) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{k_m=0}^{n_m} \binom{n_1}{k_1} \ldots \binom{n_m}{k_m} f(\frac{k_1}{n_1} \ldots \frac{k_m}{n_m}) x_1^{k_1} (1-x_1)^{n_1-k_1} \ldots$$
$$\ldots x_m^{k_m} (1-x_m)^{n_m-k_m} \quad .$$

Literatuur:

S. Bernstein: Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités. Communications de la Société mathématique de Charkow. Tome XIII (1912).

Dezelfde: Sur le domaine de convergence des polynomes $B_n[Y(x), x]$. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome 202 (1936).

W. Wegmüller: Ausgleichung durch Bernstein-polynome. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. Heft 36 (1938).

G.G. Lorentz: Bernstein polynomials. University of Toronto Press (1953).