STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-021

# Een integraalvoorstelling van $e^{itx \log x}$

Dr. W. Peremans

1950

# Een integraalvoorstelling van $e^{itx \log x}$

door Dr W. Peremans

In dit rapport wordt de formule

$$e^{itx \log x} = \int_0^\infty \varphi(u) e^{ix\psi(u)}\, du$$

voor positieve reële t en x bewezen; hierin is

$$\varphi(u) = \frac{t}{2\pi} \int_0^\infty e^{itus \log s}\, ds$$

en

$$\psi(u) = t \log u.$$

Het is hiertoe voldoende de formule

$$(1) \quad e^{itx \log x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\alpha} d\alpha \int_0^\infty e^{-i\xi\alpha + it\xi \log \xi} d\xi$$

te bewijzen, want hieruit volgt door de substituties

$$\alpha = t \log u \quad \text{en} \quad \xi = us$$

de gewenste formule.

Om (1) te bewijzen beschouwen we de uitdrukkingen, die uit het rechterlid van (1) ontstaan door daarin $\int_{-\infty}^{\infty}$ te vervangen resp. door $\int_0^\infty$ en $\int_{-\infty}^0$; wij tonen aan dat de beide laatste uitdrukkingen bestaan en een som hebben, die gelijk is aan $e^{itx \log x}$. Wij behandelen eerst de integraal $\int_{-\infty}^0$.

We bewijzen eerst dat voor vaste R en S>0 en $-R \leq \alpha \leq S$ de integraal

$$(2) \quad \int_0^K e^{i(t\xi \log \xi - \alpha\xi)}\, d\xi$$

voor $K \to \infty$ uniform in $\alpha$ convergeert.

Stel $\eta = t\xi \log \xi - \alpha\xi$,

dan is $\frac{d\eta}{d\xi} = t \log \xi + t - \alpha \gtreqless 0$, als $\xi \gtreqless e^{\frac{\alpha - t}{t}}$.

Als $K > e^{\frac{S-t}{t}}$, dan is voor $\xi \geq K$ de functie $\eta = t\xi \log \xi - \alpha\xi$ monotoon stijgend en als we $\xi = \varphi(\eta)$ stellen, is ook de functie $\varphi(\eta)$ monotoon stijgend, zodat men heeft

$$\left| \int_K^\infty \cos(t\xi \log \xi - \alpha\xi)\, d\xi \right| = \left| \int_{tK\log K - \alpha K}^{\infty} \frac{\cos \eta\, d\eta}{t \log \varphi(\eta) + t - \alpha} \right| <$$

$$< \frac{2}{t \log K + t - \alpha} < \frac{2}{t \log K + t - S},$$

aangezien de integrand in $\eta$ het product is van een positieve monotoon dalende functie en $\cos\eta$. Het laatste lid nadert voor $K \to \infty$ tot nul, zodat de integraal

$$\int_0^K \cos(t\xi \log \xi - \alpha\xi)\, d\xi$$

en evenzo de integraal

$$\int_0^K \sin(t\xi\log\xi-\alpha\xi)\,d\xi,$$

dus ook de integraal (2) uniform in $\alpha$ convergeert voor $K\to\infty$.
Hieruit volgt dat

$$\int_{-R}^{0} e^{ix\alpha}d\alpha\int_0^\infty e^{i(t\xi\log\xi-\alpha\xi)}d\xi$$

gelijk is aan

$$\lim_{K\to\infty}\int_{-R}^{0} e^{ix\alpha}d\alpha\int_0^K e^{i(t\xi\log\xi-\alpha\xi)}d\xi.$$

en dat hetzelfde resultaat geldt als $\int_{-R}^{0}$ wordt vervamgen door $\int_0^S$.

Men heeft

$$\int_{-R}^{0} e^{ix\alpha}d\alpha\int_0^K e^{i(t\xi\log\xi-\alpha\xi)}d\xi=\int_0^K e^{it\xi\log\xi}d\xi\int_{-R}^{0} e^{i\alpha(x-\xi)}d\alpha$$

$$= i\int_0^K \frac{e^{it\xi\log\xi}(1-e^{iR(\xi-x)})}{\xi-x}d\xi. \quad 1)$$

Het reële deel hiervan is

$$\int_0^K \frac{\sin(t\xi\log\xi+R\xi-Rx)-\sin(t\xi\log\xi)}{\xi-x}d\xi$$

en het imaginaire deel

$$\int_0^K \frac{\cos(t\xi\log\xi)-\cos(t\xi\log\xi+R\xi-Rx)}{\xi-x}d\xi.$$

Wij beschouwen eerst het reële deel, waarvoor we in plaats van $\int_0^K$ schrijven $\int_0^{x+1}$ en $\int_{x+1}^{K}$. De integraal $\int_0^{x+1}$ is gelijk aan

$$(3)\quad \int_0^{x+1}\frac{\sin(t\xi\log\xi)\{\cos(R\xi-Rx)-1\}}{\xi-x}d\xi+$$

$$+\int_0^{x+1}\frac{\cos(t\xi\log\xi)\sin(R\xi-Rx)}{\xi-x}d\xi.$$

De tweede term is gelijk aan

$$(4)\quad \cos(tx\log x)\int_0^{x+1}\frac{\sin R(\xi-x)}{\xi-x}d\xi+$$

$$+\int_0^{x+1}\frac{\cos(t\xi\log\xi)-\cos(t\,x\log x)}{\xi-x}\sin(R\xi-Rx)\,d\xi.$$

De eerste term hierin is gelijk aan

$$\cos(t\,x\log x)\int_{-Rx}^{R}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$$

en nadert voor $R\to\infty$ tot $\pi\cos(tx\log x)$. In de tweede term van (4) is de integrand het product van een begrensde integreerbare functie en de alternerende functie $\sin R(\xi-x)$ en nadert, aangezien het integratieinterval onafhankelijk van $R$ is, tot nul als $R\to\infty$. 2)

Voetnoten zie bovenaan pag. 3.

Voetnoten bij pag. 2.

---

1) Het is duidelijk dat de laatste overgang ook geoorloofd is voor het geval $\xi = x$, want de laatste integrand nadert voor $\xi \to x$ tot een eindige waarde.

2) Zie J. Wolff, Fourier'sche Reihen , pag. 1.

---

Hiermede is formule (4), dus de tweede term van formule (3) behandeld. De eerste term van (3) is gelijk aan

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sin(t\, x \log x) \int_0^{x+1} \frac{\cos(R\xi - Rx) - 1}{\xi - x}\, d\xi + \\ &+ \int_0^{x+1} \frac{\sin(t\,\xi \log \xi) - \sin(t\, x \log x)}{\xi - x} \cos R(\xi - x)\, d\xi + \\ &- \int_0^{x+1} \frac{\sin(t\,\xi \log \xi) - \sin(t\, x \log x)}{\xi - x}\, d\xi . \end{aligned} \right.$$

De derde term, onafhankelijk van R, is begrensd; de tweede term nadert voor $R \to \infty$ tot nul (zie noot 2)); de eerste term is gelijk aan

$$(6)\quad \sin(t\, x \log x) \int_{-Rx}^{R} \frac{\cos\omega - 1}{\omega}\, d\omega = \sin(t\, x \log x) \int_{Rx}^{R} \frac{\cos\omega - 1}{\omega}\, d\omega$$

aangezien $\int_{-Rx}^{R} = 0$ (de integrand is een oneven functie van $\omega$). Het laatste lid van (6) is gelijk aan

$$\sin(t\, x \log x) \int_{Rx}^{R} \frac{\cos\omega}{\omega}\, d\omega + \sin(t\, x \log x) . \log x .$$

Hierin is de laatste term, onafhankelijk van R, begrensd; de eerste term nadert voor $R \to \infty$ tot nul, aangezien $\int_1^{\infty} \frac{\cos\omega}{\omega}\, d\omega$ bestaat. Hiermede is de gehele uitdrukking (3) behandeld. Thans beschouwen we

$$(7)\quad \int_{x+1}^{K} \frac{\sin(t\,\xi \log \xi + R\xi - R\,x) - \sin(t\,\xi \log \xi)}{\xi - x}\, d\xi .$$

We splitsen deze integraal in twee termen; door de substitutie $v_1 = t\,\xi \log \xi$ (waarin $\frac{dv_1}{d\xi} = t(\log \xi + 1) > 0$ voor $\xi \geqslant x+1 > 1$, zodat $v_1$ monotoon stijgend is en dus een monotoon stijgende omkering $x = \varphi_1(v_1)$ bezit) gaat de tweede term over in

$$\frac{1}{t} \int_{t(x+1)\log(x+1)}^{tK\log K} \frac{\sin v_1\, d\, v_1}{\{\varphi_1(v_1) - x\}\{\log \varphi_1(v_1) + 1\}}$$

en dit convergeert voor $K \to \infty$ tot een eindige waarde onafhankelijk van R, aangezien de integrand het product is van een positieve monotoon dalende functie en de oscillerende functie $\sin v_1$.

De eerste term waarin we (7) splitsen gaat door de substitutie $v_2 = t\xi\log\xi + R\xi - Rx$ (waarin $\frac{dv_2}{d\xi} = t\log\xi + t + R > 0$ wegens $\xi > 1$ , zodat $v_2$ monotoon stijgend is en dus een monotoon stijgende omkering $\xi = \varphi_2(v_2)$ bezit ) over in

$$\int_{t(x+1)\log(x+1)+R}^{tK\log K+RK-Rx} \frac{\sin v_2 \, d v_2}{\{\varphi_2(v_2) - x\}\{t\log\varphi_2(v_2) + t + R\}} .$$

en dit convergeert voor $K\to\infty$ tot een eindige waarde, waarvan de modulus kleiner is dan $\frac{2}{t\log(x+1) + t + R}$, hetgeen tot nul nadert voor $R\to\infty$. Hiermede is bewezen, dat

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{K\to\infty}\int_0^K \frac{\sin(t\xi\log\xi + R\xi - Rx) - \sin(t\xi\log\xi)}{\xi - x}\,d\xi$$

bestaat en gelijk is aan

$$\pi\cos(t\,x\log x) - \int_0^{x+1}\frac{\sin(t\xi\log\xi) - \sin(tx\log x)}{\xi - x}\,d\xi +$$
$$+ \sin(t\,x\log x).\log x - \int_{x+1}^{\infty}\frac{\sin(t\xi\log\xi)}{\xi - x}\,d\xi .$$

Geheel analoog vindt men dat

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{K\to\infty}\int_0^K \frac{\cos(t\xi\log\xi) - \cos(t\xi\log\xi + R\xi - Rx)}{\xi - x}\,d\xi$$

bestaat en gelijk is aan

$$\pi\sin(tx\log x) + \int_0^{x+1}\frac{\cos(t\xi\log\xi) - \cos(t\,x\log x)}{\xi - x}\,d\xi +$$
$$- \cos(tx\log x)\,.\,\log x + \int_{x+1}^{\infty}\frac{\cos(t\xi\log\xi)}{\xi - x}\,d\xi .$$

Thans gaan wij om (1) te bewijzen de uitdrukking beschouwen, die uit het rechterlid van (1) ontstaat door daarin $\int_{-\infty}^{\infty}$ te vervangen door $\lim_{S\to\infty}\int_0^S$.

Wegens de uniforme convergentie van (2) voor $K\to\infty$ dienen we de integraal

$$i\int_0^K \frac{e^{it\xi\log\xi}(e^{-iS(\xi - x)} - 1)\,d\xi}{\xi - x}$$

te beschouwen. Hiervan beschouwen we wederom het reële en imaginaire gedeelte en bij de behandeling van elk van beide splitsen we $\int_0^K$ in $\int_0^{x+1}$ en $\int_{x+1}^K$. De integralen $\int_0^{x+1}$ leveren geheel analoog aan het bovenstaande voor $R\to\infty$

$$\pi \cos(t\, x \log x) + \int_0^{x+1} \frac{\sin(t\xi \log \xi) - \sin(t\, x \log x)}{\xi - x}\, d\xi +$$

$- \sin(tx \log x) \cdot \log x$

voor het reële deel en

$$\pi \sin(tx \log x) - \int_0^{x+1} \frac{\cos(t\xi \log \xi) - \cos(t\, x \log x)}{\xi - x}\, d\xi +$$

$+ \cos(tx \log x) \cdot \log x$

voor het imaginaire deel.

Er rest ons thans dus slechts $\int_{x+1}^{K}$ te beschouwen. Analoog aan het voorafgaande splitsen we hiervan weer af de term

$\int_{x+1}^{K} \frac{\sin(t\xi \log \xi)}{\xi - x}\, d\xi$, die voor $K \to \infty$ convergeert tot

$\int_{x+1}^{\infty} \frac{\sin(t\xi \log \xi)}{\xi - x}\, d\xi$ en bij het imaginaire deel de term

$- \int_{x+1}^{K} \frac{\cos(t\xi \log \xi)}{\xi - x}\, d\xi$, die voor $K \to \infty$ convergeert tot

$- \int_{x+1}^{\infty} \frac{\cos(t\xi \log \xi)}{\xi - x}\, d\xi$. Door optelling der gevonden resultaten ziet men, dat formule (1) bewezen is, zodra is aangetoond, dat

$$\lim_{S \to \infty} \lim_{K \to \infty} \int_{x+1}^{K} \frac{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(t\xi \log \xi - S\xi + Sx)}{\xi - x}\, d\xi$$

bestaat en gelijk aan nul is.

Wij bewijzen dit voor het geval dat in de teller van de integrand de sinus genomen wordt. Het andere geval verloopt analoog.

Stelt men $v_3 = v_3(\xi) = t\xi \log \xi - S\xi + S\, x$,

dan is $\frac{dv_3}{d\xi} = t \log \xi + t - S \gtreqless 0$, als $\xi \gtreqless e^{\frac{S-t}{t}}$.

Voor $K_1 > e^{\frac{S-t}{t}}$ en $\xi \geq K_1$ is $v_3$ een monotoon stijgende functie van $\xi$, dus $\xi = \varphi_3(v_3)$ is ook een monotoon stijgende functie van $v_3$.

Voor $K_2 > K_1$ heeft men

$$\int_{K_1}^{K_2} \frac{\sin(t\xi \log \xi - S\xi + S\, x)}{\xi - x}\, d\xi = \int_{tK_1 \log K_1 - SK_1 + Sx}^{tK_2 \log K_2 - SK_2 + Sx} \frac{\sin v_3\, dv_3}{\left\{\varphi_3(v_3) - x\right\} \left\{t \log \varphi_3(v_3) + t - S\right\}} \tag{8}$$

Aangezien in de laatste integraal de integrand bestaat uit het product van een positieve monotoon dalende functie en $\sin v_3$, convergeert het rechterlid, dus het linkerlid voor $K_2 \to \infty$.

Wij kiezen thans het getal $K_1$, dat groter is dan $e^{\frac{S-2t}{t}}$, zo klein dat $v_3(K_1) < v_3(e^{\frac{S-t}{t}}) + \frac{\pi}{2}$. Het rechterlid van (8) is in absolute waarde dan ten hoogste gelijk aan de absolute waarde van een integraal, die uit dit rechterlid ontstaat door de bovengrens te vervangen door de ondergrens, vermeerdert met $\pi$.

Wij kunnen deze schatting ook met het linkerlid van (8) uitvoeren. Men vindt dan dat de convergente integraal

$$\int_{e^{\frac{S-t}{t}}}^{\infty} \frac{\sin(t\xi \log\xi - S\xi + Sx)}{\xi - x} d\xi$$

absoluut genomen ten hoogste gelijk is aan

(9) $$\int_{e^{\frac{S-t}{t}}}^{K_3} \frac{|\sin(t\xi \log\xi - S\xi + Sx)|}{\xi - x} d\xi ,$$

waarin $K_3$ bepaald wordt door $v_3(K_3) = v_3(e^{\frac{S-t}{t}}) + \frac{3}{2}\pi$.

Wij bepalen de lengte h van het integratieïnterval $K_3 - e^{\frac{S-t}{t}}$ in (9). Door reeksontwikkeling van $t\xi \log \xi$ vindt men

$$v_3(e^{\frac{S-t}{t}} + h) = v_3(e^{\frac{S-t}{t}}) + \frac{th^2}{2(e^{\frac{S-t}{t}} + \vartheta h)},$$

waarin $0 < \vartheta < 1$. Dan geldt voor h

$$\frac{th^2}{2(e^{\frac{S-t}{t}} + \vartheta h)} = \frac{3}{2}\pi ,$$

dus $$h = \frac{\frac{3}{2}\pi\vartheta + \sqrt{\frac{9}{4}\pi^2\vartheta^2 + 3\pi t e^{\frac{S-t}{t}}}}{t}$$

$$< \frac{\frac{3}{2}\pi + \sqrt{\frac{9}{4}\pi^2 + 3\pi t e^{\frac{S-t}{t}}}}{t} .$$

De integraal (9) is derhalve ten hoogste gelijk aan

$$\frac{\frac{3}{2}\pi + \sqrt{\frac{9}{4}\pi^2 + 3\pi t e^{\frac{S-t}{t}}}}{t(e^{\frac{S-t}{t}} - x)}$$

en dit nadert tot nul als $S \to \infty$. Er rest ons thans nog om te beschouwen de integraal

$$\int_{x+1}^{e^{\frac{S-t}{t}}} \frac{\sin(t\xi \log\xi - S\xi + Sx)}{\xi - x} d\xi .$$

Stel $v_4 = v_4(\xi) = S\xi - Sx - t\xi \log \xi$,

dan is $\frac{dv_4}{d\xi} = S - t - t \log \xi > 0$ als $\xi < e^{\frac{S-t}{t}}$.

Voor $K_4 < e^{\frac{S-t}{t}}$ en $\xi \leq K_4$ is $v_4(\xi)$ een monotoon stijgende functie.

Voor $K_5 < K_4$ heeft men

$$(10)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{K_5}^{K_4} \frac{\sin(t\xi\log\xi - S\xi + Sx)}{\xi - x}\, d\xi = \\ \displaystyle = -\int_{SK_5 - Sx - tK_5\log K_5}^{SK_4 - Sx - tK_4\log K_4} \frac{\sin v_4\, dv_4}{\{\varphi_4(v_4) - x\}\{S - t - t\log\varphi_4(v_4)\}}. \end{cases}$$

Wij onderzoeken in hoeverre de noemer $\Phi(v_4) = \Psi(\xi)$ in de integrand in het rechterlid van (10) monotoon afhangt van $v_4$ dus van $\xi$. Daartoe onderzoeken wij van deze functie

$$\Psi(\xi) = (\xi - x)(S - t - t\log\xi)$$

de afgeleide

$$\Psi'(\xi) = \frac{-t\xi\log\xi + (S - 2t)\xi + tx}{\xi} = -t\log\xi + S - 2t + \frac{tx}{\xi}.$$

Deze functie $\Psi'(\xi)$ is monotoon dalend, want haar afgeleide

$$\Psi''(\xi) = -\frac{t}{\xi^2}(x + \xi)$$

is negatief. Voor $\xi = x + 1$ heeft men

$$\Psi'(x + 1) = -t\log(x + 1) + S - 2t + \frac{tx}{x + 1} > 0$$

voor voldoende grote S ; voor $\xi = e^{\frac{S-t}{t}}$ daarentegen is

$$\Psi'(e^{\frac{S-t}{t}}) = -t + t\,x\,e^{\frac{-S+t}{t}} < 0$$

voor voldoende grote S. Daar $\Psi'(\xi)$ monotoon dalend is bezit $\Psi'(\xi)$ dus één en slechts één nulpunt a , gelegen tussen $x + 1$ en $e^{\frac{S-t}{t}}$. Op het interval $(x + 1, a)$ is de functie $\Psi(\xi)$ derhalve monotoon stijgend en op het interval $(a, e^{\frac{S-t}{t}})$ is deze functie monotoon dalend.

Vervangen we in (10) de grens $K_5$ door $x + 1$ en $K_4$ door a, dan is de beschouwde integraal, absoluut genomen, ten hoogste gelijk aan $\dfrac{2}{S - t - t\log(x + 1)}$ en dit nadert tot nul voor $S \to \infty$.

Kies thans $K_4$ zo dat

$$v_4(K_4) > \max(a,\ v_4(e^{\frac{S-t}{t}}) - \frac{\pi}{2}).$$

Dan concludeert men uit formule (10) op analoge wijze als hierboven uit formule (8) dat de integraal

$$\int_a^{e^{\frac{S-t}{t}}} \frac{\sin(t\xi\log\xi - S\xi + Sx)}{\xi - x}\, d\xi,$$

absoluut genomen ten hoogste gelijk is aan

$$(11)\quad \int_{K_6}^{e^{\frac{S-t}{t}}} \frac{|\sin(t\xi\log\xi - S\xi + Sx)|}{\xi - x}\, d\xi,$$

waarin $K_6$ bepaald wordt door $v_4(K_6) = v_4(e^{\frac{S-t}{t}}) - \frac{3}{2}\pi$.

Wij bepalen de lengte k van het integratieinterval $e^{\frac{S-t}{t}} - K_6$ in (11). Door reeksontwikkeling van $t\xi\log\xi$ vindt men

$$v_4(e^{\frac{S-t}{t}} - k) = v_4(e^{\frac{S-t}{t}}) + \frac{tk^2}{2(e^{\frac{S-t}{t}} - \vartheta k)},$$

waarin $0<\vartheta<1$. Dan geldt voor k

$$\frac{tk^2}{2(e^{\frac{S-t}{t}} - \vartheta k)} = \frac{3}{2}\pi,$$

dus

$$k = \frac{-\frac{3}{2}\pi\vartheta + \sqrt{\frac{9}{4}\pi^2\vartheta^2 + 3\pi t e^{\frac{S-t}{t}}}}{t} < \sqrt{\frac{3\pi}{t} e^{\frac{S-t}{t}}}.$$

De integraal (11) is derhalve ten hoogste gelijk aan

$$\frac{\sqrt{\frac{3\pi}{t} e^{\frac{S-t}{t}}}}{K_6 - x} < \frac{\sqrt{\frac{3\pi}{t} e^{\frac{S-t}{t}}}}{e^{\frac{S-t}{t}} - x - \sqrt{\frac{3\pi}{t} e^{\frac{S-t}{t}}}}$$

en dit nadert tot nul, als $S\to\infty$.

Hiermede is op grond van de opmerking in het midden van pag. 5 de formule (1) volledig bewezen.