

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZW 1957-021

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Dr. C.G. Lekkerkerker

zaterdag 30 november 1957

Roosterpunten in onbegrensde verzamelingen



The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

op zaterdag 30 november 1957 door

Dr. C.G. LekkerkerkerRoosterpunten in onbegrensde verzamelingen

1. In het volgende is  $f(x)$  een reële, niet-negatieve functie op het interval  $[0, \infty)$ , Lebesgue-integreerbaar over elk interval  $(0, t)$  ( $t > 0$ ). Soms zullen we voor  $f(x)$  speciaal nemen de karakteristieke functie van een Lebesgue-meetbare verzameling  $V$  op  $[0, \infty)$ . Verder doorloopt  $k$  de natuurlijke getallen. Voor  $x > 0$  zijn we er in geïnteresseerd aan welke van de volgende eigenschappen is voldaan:

$$P_1: \sum_{k=1}^{\infty} f(kx) = \infty, \text{ resp. oneindig vaak } kx \in V$$

$$P_2: \quad \quad \quad < \infty, \text{ resp. hoogstens eindig vaak } kx \in V$$

$$P_3: \quad \quad \quad = 0, \text{ resp. nooit } kx \in V.$$

$$\text{We stellen } \int_0^{\infty} f(x) dx = \gamma.$$

Stelling 1. Is  $\gamma < \infty$ , dan geldt  $P_2$  voor bijna alle  $x$ .

Bewijs. Een eenvoudige berekening en een toepassing van de stelling van Fatou leert: is  $0 < a < b$ , dan is  $\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f(kx) dx < c \gamma$ , waarbij voor  $c$  een constante te nemen is van de orde  $\log b/a$ .

Stelling 2. Is  $f(x)$  Riemann-integreerbaar en is  $\gamma = \infty$ , dan vormen de getallen  $x > 0$ , waarvoor  $P_1$  geldt, een verzameling van de tweede categorie (d.i. het complement van de vereniging van een rij nergens dichte verzamelingen).

Bewijs. Voor elk tweetal positieve getallen  $a, b$  met  $a < b$  is nu

$$(1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^N f(kx) dx = \infty.$$

De verzameling der getallen  $x > 0$ , waarvoor niet  $P_1$ , dus  $P_2$  geldt, is de vereniging van de verzamelingen

$$V_m = \left\{ x \mid \sum_{k=1}^{\infty} f(kx) < m \right\} \quad (m=1, 2, \dots).$$

Is één dezer verzamelingen overal dicht op een of ander interval  $(a,b)$ , dan is voor elke  $N$ , wegens de Riemann-integreerbaarheid van  $f(x)$ ,

$$\int_a^b \sum_{k=1}^N f(kx) dx \leq m(b-a).$$

Dit is in strijd met (1). Dus de verzamelingen  $V_m$  zijn nergens dicht.

Toepassing. Zij  $V$  een Jordan-meetbare verzameling op  $[0, \infty)$  van eindige maat, en zodanig dat  $\mu(V \cap (t, \infty)) > 0$  voor elke  $t > 0$ . Dan is de verzameling van de getallen  $x > 0$ , waarvan oneindig veel veelvouden in  $V$  liggen, wegens stelling 1 een verzameling van de maat 0, en wegens stelling 2 een verzameling van de tweede categorie.

In stelling 2 kan de voorwaarde dat  $f(x)$  Riemann-integreerbaar is, niet weggelaten worden, ook niet ingeval  $f(x)$  de karakteristieke functie van een verzameling is. Er geldt n.l.

Stelling 3. Er bestaat een Lebesgue-meetbare verzameling  $V \subset [0, \infty)$  van oneindige maat, zodanig dat géén getal  $x > 0$  de eigenschap  $P_1$  heeft.

Bewijs. Er is een verzameling  $V_1$ , bestaande uit aftelbaar veel twee aan twee disjuncte intervallen

$$V_{k,m} = \left( \frac{n_k}{m}, \frac{n_k + \xi_k}{m} \right) \quad (m=1,2,\dots,m_k; \quad k=1,2,\dots)$$

( $\xi_k > 0$  en  $m_k$  natuurlijke getallen), zodanig dat

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \xi_k \sum_{m=1}^{m_k} \frac{1}{m} \right\} = \infty.$$

Zij  $V_2$  de vereniging van de intervallen  $V_{k,1}$ . Dan is  $\mu V_1 = \infty$  en  $\mu V_2 < \infty$ , wegens 2, en hebben de getallen  $x > 0$  met oneindig veel gehele veelvouden in  $V_1$  ook reeds oneindig veel gehele veelvouden in  $V_2$ . Deze getallen  $x$  vormen dan wegens stelling 1 een verzameling  $W$  van de maat 0. Laat men uit  $V_1$  alle getallen weg, die veelvoud zijn van een getal uit  $W$ , dan ontstaat een verzameling  $V$  met de gewenste eigenschappen.

Opmerking. Voor de boven geconstrueerde verzameling  $V$  geldt bovendien, dat de getallen  $x$  waarvoor  $P_3$  geldt, een verzameling van oneindige maat vormen.

Een klasse van verzamelingen zó dat bijna altijd  $P_1$  geldt, wordt gegeven door

Stelling 4. Laten  $\rho$  en  $d$  twee vaste positieve getallen zijn met  $\rho < 1$ . Onderstel dat  $V \subset [0, \infty)$  dichtheid  $\geq \rho$  heeft op elk van een oneindige rij van disjuncte intervallen met lengte  $d$ . Dan geldt  $P_1$  voor bijna alle  $x$ .

2. De voorgaande beschouwingen laten zich generaliseren voor functies van meer veranderlijken, resp. meerdimensionale verzamelingen.

Zij  $n \geq 2$  en  $x$  een willekeurig punt van  $R_n$ , met Cartesische coördinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . We gebruiken vectoriële schrijfwijze.

In plaats van een getal  $x > 0$  met zijn veelvouden moeten we nu beschouwen een stelsel van  $n$  onafhankelijke punten  $x^1, x^2, \dots, x^n$  en de verzameling van de punten  $x$  van de vorm

$$x = u_1 x^1 + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n \quad (u_1 \text{ geheel}).$$

M.a.w. we hebben te maken met een rooster  $\Lambda$ , met willekeurige basis  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ . Noemen we  $\mathcal{U}$  het rooster van de punten met gehele coördinaten en  $X$  de matrix met kolommen  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , dan kunnen we schrijven, door  $X$  op te vatten als een affiene transformatie van  $R_n$ ,  $\Lambda = X \mathcal{U}$ . Zij  $\Omega$  de topologische groep, bestaande uit de  $n \times n$ -matrices met determinant  $> 0$ , met  $n^2$ -dimensionale, Euclidische metriek, en  $\Gamma$  de discrete ondergroep van de matrices in  $\Omega$  die  $\mathcal{U}$  invariant laten, dat zijn de geheeltallige matrices met determinant 1. Dan is de ruimte der roosters te identificeren met de factorgroep  $\Omega / \Gamma$ , of ook voor te stellen door een geschikt te kiezen fundamenteelgebied  $F$  in  $\Omega$  naar de discrete ondergroep  $\Gamma$ . Zij  $G$  de verzameling der roosters  $\Lambda$  in  $F$  met  $\det \Lambda \leq 1$ . Het volume van  $G$  is eindig (Siegel, Weil).

Zij nu  $f(x)$  een niet-negatieve functie op  $R_n$ , die Riemann - dan wel Lebesgue-integreerbaar is over elke begrensde kubus. Stel

$$\int_{R_n} f(x) dx = \gamma, \quad \sum_{u \in \mathcal{U}} f(Xu) = F(X) \quad (X \in \Omega).$$

Men merke op dat, in tegenstelling met het eendimensionale geval,  $X$  over een andere ruimte varieert dan  $x$ . Uit bekende resultaten kan

men nu afleiden: als  $\gamma$  eindig is, dan is ook  $\int_{tG} F(X) dX < \infty$  voor elke  $t > 0$ . Dus:

Stelling 5. Als  $\gamma < \infty$ , dan is bijna overal  $F(X) < \infty$ .

Evenzo laten de stellingen 2,3,4 zich generaliseren. Ingeval van stelling 2 komt men tot de uitspraak dat er, onder analoge voorwaarden, voor bijna alle stellen van  $n-1$  onafhankelijke punten  $x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$  een overal dichte verzameling van punten  $x^n$  is, zodanig dat  $F(X) = \infty$  ( $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ). De constructie in het bewijs van stelling 3 leent zich niet voor generalisatie; men behoeft hier een metrisch resultaat van Cassels in de theorie van de benadering van irrationale door rationale getallen.

De onder 1. genoemde resultaten zijn gevonden in discussies met Prof. de Bruijn, Prof. Koksma, Mevr. van Aardenne-Ehrenfest en de Heer Kesten, naar aanleiding van een opgave in de "American Mathematical Monthly".

Voor uitvoeriger uiteenzettingen en volledige bewijzen zie men [1].

- [1] C.G. Lekkerkerker, Lattice points in unbounded point sets (verschijnt binnenkort in Indagationes).