ZW 1956-022

(Intern) ZW 22/S

ZW

Opmerkingen over het manuscript "Zum Matrizenkalkul II" van Dr E. Bodewig.

Bij de opstelling van dit rapport heb ik gebruik gemaakt van de resultaten van een discussie met Prof.Dr Ir A. van Wijngaarden.

Het artikel begint met de opmerking, dat $x_1y_1'+\text{-----}+x_1y_1'$ rang 1 heeft, als $x_1,\ldots,x_1$ en $y_1,\ldots,y_1$ onafhankelijke stelsels vectoren zijn. Vervolgens wordt bewezen, zonder dat dit uitdrukkelijk wordt gezegd, dat iedere matrix A van rang 1 ook in een dergelijke gedaante $x_1y_1'+\text{-----}+x_1y_1'$ te schrijven is. Ten slotte wordt de opmerking gemaakt, dat het in het bewijs gebruikte reductieproces bruikbaar is om met een automatische rekenmachine de rang van een gegeven matrix te bepalen.

Uit het bovenstaande blijkt, dat aan de formulering van het artikel beter iets kan worden gewijzigd: hoewel onder op blz.1 "Q.e.d." staat, is in het voorafgaande niet een bewering gesteld, die moet worden bewezen.

Over het bewijs valt op te merken, dat stilzwijgend verondersteld is, dat $a_{11}\neq 0$. Dit is uiteraard geen bezwaar, daar men door verwisseling van rijen en kolommen (hetgeen op de rang geen invloed heeft) in de linkerbovenhoek een element kan krijgen dat $\neq 0$ is. Een desbetreffende opmerking zou in het artikel m.i. wel op zijn plaats zijn, te meer daar deze kwestie van belang is voor de beoordeling van de geschiktheid van het proces voor een rekenmachine. Immers bij elke stap van het proces moet eerst gezocht worden naar een element $\neq 0$. Daar door dit element bovendien gedeeld moet worden, is het om praktische redenen (nl. om de orde van grootte van de bij de berekening optredende getallen in de hand te houden) wenselijk om het element te kiezen met grootste absolute waarde.

De eenvoud van het beschreven proces deed de vraag rijzen of het reeds bekend is. Hieromtrent heb ik evenwel geen duidelijk uitsluitsel gevonden. Wel wordt in het boek van J.H.M. Wedderburn (Lectures on matrices) op blz.69 een proces beschreven, waarvan het in het artikel beschreven proces een speciaal geval is. Dit proces van Wedderburn is als volgt:

Stel dat x en y twee vectoren zijn, dusdanig dat $y'Ax\neq 0$ (dergelijke vectoren bestaan als A niet de nulmatrix is). Vorm de matrix

$$A_1 = A - \frac{1}{y'Ax}Axy'A.$$

Bewezen wordt, dat de rang van $A_1$ één lager is dan de rang van A. Dit gaat als volgt: uit $Az=0$ volgt door substitutie direct dat $A_1z=0$. Als omgekeerd $A_1z=0$, dan volgt hieruit $A(z-\frac{y'Az}{y'Ax}x)=0$. Daar bovendien $A_1x=0$ en $Ax\neq 0$, volgt hieruit dat de dimensie van de nulruimte van $A_1$ één hoger is dan de dimensie van de nulruimte van A, dus dat de rang van $A_1$ één lager is dan de rang van A. Let wel dat $\frac{1}{y'Ax}$ een scalar is en dat $(Ax)(y'A)$ een "einfaches Produkt" in de zin van Bodewig is.

Het proces van Bodewig verkrijgt men hieruit door $x'=y'=(1,0,\ldots,0)$ te kiezen, hetgeen geoorloofd is als $y'Ax=a_{11}\neq 0$; dit is precies de voorwaarde van Bodewig. Verder zijn $Ax$ en $\frac{1}{y'Ax}\,y'A$ precies de door Bodewig gekozen $x_1$ en $y_1'$.

Deze opmerking over de verwantschap met de theorie in Wedderburn wil geenszins de waarde van het artikel van Dr Bodewig aantasten. Het aangeven van een voor berekening bijzonder geschikt speciaal geval van een algemeen proces kan van waarde zijn. Ter voorkoming van mogelijke kritiek door lezers is het echter misschien gewenst in het artikel toch op deze verwantschap te wijzen.

Belangrijker evenwel lijkt mij het volgende. Het beschreven proces is wat de mathematische formulering betreft geheel verschillend van, maar wat de praktische berekening betreft volkomen identiek met een uiterst voor de hand liggend proces om de rang van een matrix numeriek te bepalen.

Vorm bij een gegeven matrix A het stelsel homogene lineaire vergelijkingen, dat A als coëfficiëntenmatrix heeft. Het is uit de algebra duidelijk, dat de matrix dan en slechts dan de rang i heeft, indien het mogelijk is, i der onbekenden lineair uit te drukken in de n-i overige, zodanig dat de waarden dier n-i overige vrij zijn te kiezen. Los nu het stelsel vergelijkingen op een numeriek voor de hand liggende wijze op, nl. door successief elimineren van de onbekenden. Vindt men zo, dat i onbekenden in de n-i overige op de aangegeven wijze worden uitgedrukt, dan is de rang van A gelijk aan i.

Voert men dit uit, dan ziet men, dat de berekening volkomen dezelfde is als bij het proces van Bodewig! Het stelsel vergelijkingen is

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} .$$

Als we, evenals Bodewig, veronderstellen, dat $a_{11}\neq 0$, kunnen we $x_1$ uit de eerste vergelijking oplossen en in de volgende substitueren. Dit levert voor de $k^e$ vergelijking:

$$\left(a_{k2} - \frac{a_{k1}a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \cdots\cdots + \left(a_{kn} - \frac{a_{k1}a_{1n}}{a_{11}}\right) x_n = 0.$$

De matrix van dit stelsel vergelijkingen is precies de matrix $\overline{Q_1}$ van Bodewig. Als na i stappen de resulterende matrix de nulmatrix wordt (hetgeen dan en slechts dan zo is als de n-1 overgeschoten onbekenden vrij gekozen mogen worden), volgt hieruit dadelijk, dat A rang 1 heeft evenals bij Bodewig.

Het komt mij voor, dat deze verwantschap voor de beoordeling van de achtergronden en de toepasbaarheid bij numerieke onderzoekingen van het proces van Bodewig wel van belang is.

W. Peremans