STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 022

Over het aantal punten van een inhomogeen-K-toelaatbaar K-overdekkingsrooster, dat op de rand van K ligt

M.A. Maurice

1962

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.),by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

STICHTING

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1962-022

Over het aantal punten van een inhomogeen-K-toelaatbaar K-overdekkingsrooster, dat op de rand van K ligt.

door

M.A. Maurice

1. Zij de functie f(x), gedefinieerd voor alle $x \in R^n$, een afstandsfunctie, (zie; Cassels, Introduction to the geometry of numbers, blz. 103).

f(x) heet symmetrisch, indien $f(-x)=f(x)$ voor alle $x \in R^n$
f(x) heet convex, indien $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$ voor alle $x,y \in R^n$
f(x) heet strikt convex, indien voor elk tweetal punten $x,y \in R^n$, dat niet met de oorsprong op een rechte lijn ligt, geldt $f(x+y) < f(x)+f(y)$.
f(x) heet begrensd, indien $f(x)=0$ alleen voor $x=0$.

Indien f(x) een afstandsfunctie is, heet de puntverzameling
$K_f(x_o, \lambda) = \{x \mid x \in R^n, f(x-x_o) \leq \lambda\}$
een straallichaam met centrum x_o en straal λ.
De verzameling $\{x \mid x \in R^n,\ f(x-x_o)=\lambda\}$ heet de rand van $K_f(x_o, \lambda)$.

N.B. In het vervolg zij f(x) een symmetrische, strikt convexe, begrensde afstandsfunctie (behalve in st. 2, waarin f(x) niet symmetrisch behoeft te zijn).
Voorts zij $\quad K=K_f=K_f(0,1)$

$$K(p)=K_f(p,1).$$

Het is duidelijk, dat dan K(p) een symmetrische (centrum p), strikt convexe begrensde puntverzameling in R^n is.

2. Zij Λ een rooster in R^n.

Onder de <u>f-afstand</u> van een punt x tot Λ verstaat men

$$a_f(x,\Lambda) = \inf_{p\in\Lambda} f(p-x)$$

<u>Lemma 1:</u> $a_f(x,\Lambda)$ is een continue functie van x.

<u>Bewijs:</u> zie <u>Cassels</u>: Introduction to the geometry of numbers, blz. 305.

Onder de f-<u>netwijdte</u> van Λ verstaat men

$$w = w_f(\Lambda) = \sup_{x\in R^n} a_f(x,\Lambda).$$

Daar een continue functie op een gesloten begrensde puntverzameling een maximum-waarde heeft, volgt

<u>Lemma 2:</u> In iedere roostercel van Λ bestaat tenminste één punt x_o, zodanig dat

$$w_f(\Lambda) = a_f(x_o,\Lambda).$$

Λ heet een <u>K-overdekkingsrooster</u>, indien

$$\bigcup_{p\in\Lambda} K(p) = R^n.$$

<u>Lemma 3:</u> Λ is dan en slechts dan een K-overdekkingsrooster, als $w_f(\Lambda) \leq 1$.

Bewijs: duidelijk.

Λ heet <u>inhomogeen-K-toelaatbaar</u>, indien $K\cap\Lambda$ leeg is, of uit louter randpunten van K bestaat.

<u>Lemma 4:</u> Λ is dan en slechts dan inhomogeen-K-toelaatbaar, als $a_f(0,\Lambda) \geq 1$.

<u>Bewijs:</u> duidelijk.

3. <u>Stelling 1:</u> Zij x_o een punt, zodanig, dat
$$a_f(x_o,\Lambda) = w_f(\Lambda).$$

a. Indien l punten $p_i \in \Lambda$ $(i=1,2,\dots l)$, zodanig zijn bepaald, dat

$$\begin{cases} f(p_i - x_o) = w & \text{voor } i=1,2,\dots,l \\ f(p - x_o) > w & \text{voor } p \in \Lambda, p \neq p_i \ (i=1,2,\dots,l) \end{cases}$$

dan is $l \geq n+1$.

b. Er bestaat een omgeving $\Omega(x_o)$ van x_o, met de eigenschap, dat

$$\forall x: x \in \Omega(x_o) \Rightarrow \left[\exists i \,(i=1,2,\dots,l): x \in K_f(p_i, w)\right].$$

Bewijs: (i) Op grond van lemma 2 is $l \geq 1$.

(ii) Er bestaat een omgeving $\Omega'(x_o)$ van x_o, zodanig dat voor alle $x \in \Omega'(x_o)$ en alle $p \in \Lambda - \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ geldt, dat $f(x-p) > w$.

Indien nu in iedere omgeving van x_o een punt is te vinden, dat buiten alle straallichamen $K_f(p_i, w)$ ligt, $(i=1,2,\dots,l)$, dan bestaat ook in $\Omega'(x_o)$ zo'n punt; zeg $\bar{x}$.

Maar dan is $f(\bar{x}-p) > w$ voor alle $p \in \Lambda$, en dus $a_f(\bar{x}, \Lambda) > w$; contradictie.

Hiermede is de bewering b. bewezen.

(iii) Daar x_o behoort tot de rand van alle straallichamen $K_f(p_i, w)$ $(i=1,2,\dots,l)$, bestaat in x_o voor elke $i=1,2,\dots,l$ een hypervlak

$$V_i(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}(x_\nu - x_{o\nu}) = 0$$

(waarbij $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $x_o (= x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on})$),

zó, dat voor alle x die voldoen aan $V_i(x) \geq 0$, $x \neq x_o$, geldt

$$x \notin K_f(p_i, w) \quad (i=1,2,\dots,l).$$

Indien nu $l \leq n$, dan hebben de ongelijkheden

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}(x_\nu - x_{o\nu}) \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,l)$$

altijd een gemeenschappelijke oplossing; zeg $\bar{x}$;

maar dan is ook $x=x_o+\lambda(\bar{x}-x_o) = \lambda\bar{x}+(1-\lambda)x_o$ een oplossing voor elke $\lambda > o$; dus is in iedere imgeving van x_o nog een punt te vinden, dat buiten alle $K_f(p_i,w)$ $(i=1,2,\ldots,l)$ ligt; contradictie. Derhalve is $l \geq n+1$.

Gevolg: Een inhomogeen-K-toelaatbaar K-overdekkingsrooster Λ bevat ten minste (n+1) randpunten van K.
Bewijs: Een inhomogeen-K-toelaatbaar K-overdekkingsrooster Λ is een rooster, dat voldoet aan $a_f(0,\Lambda)=w_f(\Lambda)=1$.

4. Stelling 2: n=2. Als f(x) een strikt convexe, begrensde afstandsfunctie is, en $K=K_f(0,1)$, dan vormen de roosterpunten van een inhomogeen-K-toelaatbaar rooster, die op de rand van K liggen, een deelverzameling van een roostercel van Λ.
Bewijs: Indien 2 roosterpunten p_o en p_1 van Λ op de rand van K voorkomen, dan zijn p_o en p_1 naburige roosterpunten, op de rechte door p_o en p_1; als nu p_o, p_1 en p_2 roosterpunten van Λ zijn op de rand van K_1 dan vormen ze dus een basis voor Λ; op grond van de strikte convexiteit van K volgt, dat nog ten hoogste één der drie punten $p_1+p_2-p_o$, $p_1+p_o-p_2$, $p_o+p_2-p_1$ op de rand van K kan liggen.
Gevolg: n=2. Indien Λ een inhomogeen-K-toelaatbaar K-overdekkingsrooster is, bevàt Λ ten minste drie lineair onafhankelijke punten van de rand van K.
Bewijs: Stelling $1^{\underline{a}}$ + stelling 2.

5. Stelling 3: n=3. Zij f(x) een strikt convexe, begrensde, symmetrische afstandsfunctie, en zij $K=K_f(0,1)$.
Indien Λ een inhomogeen-K-toelaatbaar K-overdekkingsrooster is, bevat Λ ten minste vier lineaire onafhankelijke punten van de rand van K.
Bewijs: Op grond van stelling 1 bevat de rand van K ten minste 4 Λ-punten; bijv. p_o, p_1, p_2, p_3.
(i) Indien p_o, p_1, p_2, p_2 lineair onafhankelijk zijn is aan de bewering der stelling voldaan.

(ii) Indien p_o, p_1, p_2, p_3 niet lineair onafhankelijk zijn, liggen ze in een vlak L.
$K' = K \cap L$ is een strikt convex straallichaam in L, en $\Lambda' = \Lambda \cap L$ is een inhomogeen-K'-toelaatbaar rooster in L, dat 4 punten van de rand van K' bevat.
Op grond van stelling 2 vormen deze punten een roostercel van Λ', dus een parallelogram; zij q het snijpunt der diagonalen $\overline{p_o p_2}$ en $\overline{p_1 p_3}$.

α. Als L door O gaat, is blijkbaar q=0 (K' is strikt convex). In dit geval bestaan er stukvlakken V_i in p_i (i=0,1,2,3), zodanig dat $V_1 \parallel V_3$, $V_o \parallel V_2$, $V_i \cap K = \{p_i\}$ (i=0,1,2,3).

Indien nu e de eenheidsvector in de richting evenwijdig zowel met V_1 als met V_2 is, dan ligt ieder punt λe (λ reël, $\lambda \neq 0$) buiten elk der vier straallichamen $K(p_i)$ (i=0,1,2,3).

Indien nu voorts p_o, p_1, p_2, p_3 de enige punten van Λ zijn, die op de rand van K liggen, dan is er een omgeving Ω van O te vinden, zó, dat geen enkel punt van Ω een punt van enig straallichaam $K(p)$ ($p \in \Lambda$, $p \neq p_o, p_1, p_2, p_3$) is; maar Ω bevat ook een punt λe; m.a.w. er bestaat een punt, dat niet behoort tot enig straallichaam $K(p)(p \in \Lambda)$.

Dit is in tegenspraak met het feit, dat Λ een K-overdekkingsrooster is. Dus bestaat er een $p^* \in \Lambda - L$ zodanig dat p^* op de rand van K ligt. De rand van K bevat dan echter de lineair onafhankelijke punten p_o, p_1, p_2, p^*

β. Zij nu $s_\lambda = \lambda q$ ($\lambda > o$)
dus $s_\lambda = \lambda \cdot \frac{1}{2}(p_o + p_2) = \lambda \cdot \frac{1}{2}(p_1 + p_3)$.

Hieruit volgt, dat

$$f(p_o - s_\lambda) = f(p_o - \tfrac{\lambda}{2} p_o - \tfrac{\lambda}{2} p_2) < f((1-\tfrac{\lambda}{2})p_o) + f(\tfrac{\lambda}{2} p_2) = (1-\tfrac{\lambda}{2}) f(p_o) + \tfrac{\lambda}{2} f(p_2) = 1$$

voor $o < \lambda < 2$
en dus dat

$$f(p_o - s_\lambda) > 1 \text{ voor } \lambda < o .$$

Op dezelfde wijze toont men aan, dat

$$f(p_i - s_\lambda) > 1 \text{ voor } \lambda < o \quad (i=0,1,2,3).$$

Dit betekent, dat iedere omgeving van 0 nog een punt bevat, dat tot geen der straallichamen $K(p_i)$ $(i=0,1,2,3)$ behoort. Omdat Λ K-overdekkingsrooster is, leidt men hier weer het bestaan uit af van een punt $p^* \in \Lambda - L$, dat op de rand van K ligt.