STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957-024

Meetkunde der getallen en diofantische approximaties

Voordracht gehouden op het decembersymposium van het Wiskundig Genootschap te Den Haag op maandag 23 december 1957 door

Dr. C.G. Lekkerkerker

MC

1957

Meetkunde der getallen en diofantische approximaties

Voordracht gehouden op het decembersymposium van het Wiskundig Genootschap te Den Haag op maandag 23 december 1957 door

Dr C.G. Lekkerkerker

1. In de getallentheorie ontmoet men wel problemen van de volgende aard. Als $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ een gegeven, reële functie van n veranderlijken ($n \geq 2$) van eenvoudig type en μ een positief getal is, is dan te voldoen aan de ongelijkheid

$$(1) \qquad |f(x_1,x_2,\ldots,x_n)| < \mu$$

voor gehele waarden van de veranderlijken? Bij de behandeling van zulke problemen blijkt het nuttig om de verzameling van de punten $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ in R_n, met reële coördinaten x_i, te beschouwen, waarvoor voldaan is aan (1). Het gaat er dan om, of deze verzameling punten met gehele coördinaten, zgn. roosterpunten, bevat.

Het bovenstaande is het uitgangspunt van de meetkunde der getallen. Daarin worden systematisch relaties onderzocht, die bestaan tussen figuren en roosters in de n-dimensionale Euclidische ruimte R_n en wordt een groot aantal stellingen betreffende ongelijkheden in gehele getallen afgeleid. Nauw hieraan aansluitend, kunnen de begrippen en resultaten van de meetkunde der getallen toegepast worden bij verschillende benaderingsproblemen. Globaal gesproken, gaat het er bij zulke problemen om, een gegeven reëel getal of stelsel reële getallen te benaderen door waarden van voorgegeven functies voor gehele waarden der variabelen. In het volgende zullen we onder meer twee klassieke benaderingsproblemen behandelen.

2. We werken eerst alleen in het platte vlak. We denken daarin een rechthoekig assenstelsel gegeven, met oorsprong O. Punten geven we aan met $x=(x_1,x_2)$, y, $x^{(1)}$, a,b, enz.; we tellen ze op als vectoren. We gebruiken de volgende begrippen en notaties:

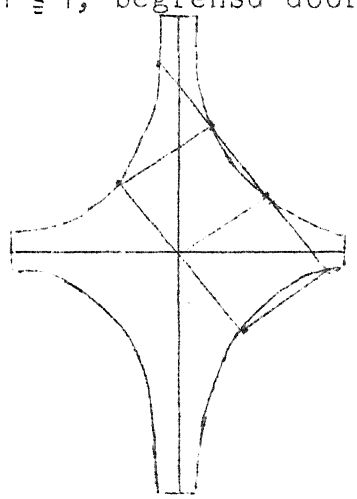
Sterverzameling: figuur S in R_2 die voldoet aan de eisen:

1) O is inwendig punt van S
2) elke halfrechte vanuit O heeft als doorsnee met S een segment Ox.

rooster: verzameling Λ van de punten x van de vorm
$x = u_1 a + u_2 b$ (u_1, u_2 geheel),
waarbij a en b gegeven punten zijn, niet op een rechte door O.

determinant $d(\Lambda)$: oppervlakte van het parallelogram $O, a, b, a+b$.
homogeen minimum $\mu(S, \Lambda)$: grootste getal $\mu \geqq 0$ (evt. ∞), waarvoor het inwendige van μS geen punt $x \neq 0$ van Λ bevat
determinant van S: $\Delta(S) = \inf d(\Lambda)$ $[\mu(S, \Lambda) = 1]$
kritiek rooster Λ: $\mu(S, \Lambda) = 1$ en $d(\Lambda) = \Delta(S)$
inhomogeen minimum: $\sigma(S, \Lambda) = \inf \sigma \left[\bigcup_{x \in \Lambda} (\sigma S + x) = R_2\right]$.

3. Als voorbeeld beschouwen we het sterlichaam S: $|x_1 x_2| \leqq 1$, begrensd door twee orthogonale hyperbolen, en het rooster Λ_0 met basis $a = (-1, 1)$, $b = (\vartheta + 1, \vartheta)$, waarbij $\vartheta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$. We beschouwen ook de affiene transformaties Ω_t, bepaald door



$$\Omega_t = x_1' = t\, x_1, x_2' = t^{-1} x_2 \quad (t > 0).$$

Ze laten S invariant en heten automorfieën van S.

Een willekeurig punt $x = (x_1, x_2)$ van Λ_0 is van de vorm

$$x = u_1 a + u_2 b = (-u_1 + \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}u_2\sqrt{5},\ u_1 - \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}u_2\sqrt{5}) \quad (u_1, u_2 \text{ geheel}),$$

zodat $x_1 x_2 = u_2^2 + u_1 u_2 - u_1^2$, dus $|x_1 x_2| \geqq 1$ als $x \neq 0$. Dus Λ_0, en evenzo $\Omega_t \Lambda_0$ $(t > 0)$, heeft geen punt $\neq 0$ binnen S. Verder is $d(\Lambda_0) = d(\Omega_t \Lambda_0) = \sqrt{5}$.
Een elementaire meetkundige beschouwing leert dat de roosters $\Omega_t \Lambda_0$ de enige kritieke roosters zijn van S, en ook van

$$S_{\alpha,\beta}: |x_1 x_2| \leqq 1, \quad |x_1| \leqq \alpha, \quad |x_2| \leqq \beta \qquad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

als maar bijv. $\alpha/\beta \geqq 16$.

Laat nu ξ een willekeurig irrationaal getal zijn. Passen we het vorige toe op het rooster der punten

$$x = -p.(\sqrt{5}, 0) + q.(\xi\sqrt{5}, 1) = ((q\xi - p)\sqrt{5}, q) \qquad (p, q \text{ geheel}),$$

dan vinden we het resultaat van Hurwitz, dat voor oneindig veel verschillende breuken p/q geldt $|\xi - p/q| < 5^{-\frac{1}{2}} q^{-2}$.

Dat dit resultaat niet verscherpt kan worden, is ook gemakkelijk meetkundig aan te tonen.

4. Zij K een begrensd, convex lichaam in R_n, met O als inwendig punt ($n \geq 2$; O oorsprong van rechthoekig assenstelsel). Als rooster beschouwen we nu uitsluitend het fundamentele rooster $\mathcal{U}$, bestaande uit de punten met gehele coördinaten. We noemen k punten ($k \leq n$) onafhankelijk, als ze niet in een (k-1)-dimensionaal hypervlak door O liggen. Verder stellen we:

$$\mu_n(K) = \inf \mu \ \left[\mu K \text{ bevat n onafhankelijke roosterpunten} \right].$$

$$\sigma(K) = \inf \sigma \ \left[\bigcup_{u \in U} (\sigma K + u) = R_n \right].$$

Laten $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ n onafhankelijke roosterpunten in $\mu_n K$ zijn, en zij P het parallelotoop, opgespannen door de vectoren $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$. Dan is P bevat in $n\mu_n K$ en elk punt $g \in R_n$ te schrijven als u+x met $u \in U$, $x \in P$. Daaruit volgt de relatie van Jarník:

$$\sigma(K) \leq n\mu_n(K). \tag{2}$$

5. Met behulp van (2) valt te bewijzen de

Stelling van Kronecker. Laten gegeven zijn q lineaire vormen

$$L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{im}x_m.$$

Dan bestaat bij elk getal $\varepsilon > 0$ en bij elk stelsel reële getallen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ een roosterpunt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ met

$$\left| L_i(u_1, u_2, \ldots, u_m) - \beta_i - u_{m+i} \right| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

mits voldaan is aan de volgende voorwaarde: er zijn geen gehele getallen $h_1, h_2, \ldots, h_q$, niet alle nul, waarvoor

$$h_1 L_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \ldots + h_q L_q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

een vorm met gehele coëfficiënten is.

Bewijs. Zij M een positief getal, K het parallelotoop

$$\left| L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) - x_{m+i} \right| \leq \varepsilon/n, \quad |x_j| \leq M \quad (i = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, m),$$

en H de strook $\left| L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) - x_{m+i} \right| \leq \varepsilon/n$ $(i = 1, \ldots, q)$. We letten op de roosterpunten in K. Er zijn twee mogelijkheden:

a) Bij geschikte keuze van M bevat K n onafhankelijke roosterpunten. Dan is $\mu_n(K) \leqq 1$. Dus $\sigma(K) \leqq n$, dus $\sigma(nK) \leqq 1$. Dus geldt de bewering van de stelling.

b) De strook H bevat geen n onafhankelijke roosterpunten. Dan liggen de roosterpunten in H in een (n-1)-dimensionaal vlak V met vergelijking

$$L_{q+1}(x_1,x_2,\dots,x_n) = h_1x_1 + h_2x_2 + \dots + h_nx_n = 0,$$

waarbij we mogen onderstellen dat de coëfficiënten h_i gehele getallen zijn. Men kan aantonen, dat de vorm L_{q+1} een lineaire combinatie is van de vormen $L_1,L_2,\dots,L_q$. Daaruit valt af te leiden dat niet voldaan is aan de voorwaarden van de stelling.