STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 025

<u>Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.</u>

Prof.dr. J. Korevaar

12 december

De nulpunten en het asymptotisch gedrag der Bessel functies

1951

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam (O).

Rapport Z.W. 1951-025

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

12 December voordracht door
Prof. Dr J. Korevaar
over:

De nulpunten en het asymptotisch gedrag der Bessel functies.

§1. Inleiding.

Een Bessel functie van de orde ν is elke oplossing $y = C_\nu(x) \not\equiv 0$ van de differentiaalvergelijking van Bessel van de orde ν :

(1) $$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Behandeld worden hier

a) De reële nulpunten van de Bessel functies. (Er zijn er oneindig veel als $C_\nu(x)$ reëel is voor reële x; hun asymptotische afstand is π).

b) Het asymptotisch gedrag der Bessel functies voor grote reële x (Als $C_\nu(x)$ reëel is voor reële x dan oscilleert $C_\nu(x)$ voor grote x met een amplitude evenredig met $x^{-\frac{1}{2}}$).

c) De niet reële nulpunten van de Bessel functies (Plaats en aantal in het bijzonder als $C_\nu(x)$ reëel is voor reële x).

Gewoonlijk worden de genoemde onderwerpen alleen behandeld voor zeer speciale Bessel functies, zoals $J_\nu(x)$. De afleidingen berusten dan vaak op een speciale integraal of reeks voor de speciale Bessel functie die onder de loupe genomen wordt.
In deze voordracht zal steeds een of andere vorm van de differentiaalvergelijking (1) als uitgangspunt worden genomen. Conclusies uit de differentiaalvergelijking zijn geldig voor alle Bessel functies, en niet alleen voor speciale Bessel functies, waarvoor een mooie integraalvoorstelling bestaat.

§2. Reële nulpunten.

Uit (1) volgt dat $u = x^{\frac{1}{2}}C_\nu(x)$ voldoet aan

(2) $$u'' + \left\{1 + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)x^{-2}\right\}u = 0.$$

Voor grote x geldt dus bijna $u'' + u = 0$. Men kan dus verwachten dat u voor grote x zich ongeveer gedraagt als $A \sin(x+\delta)$. Tot op welke hoogte is dit juist?

De functie $v = \sin k(x-\alpha)$ voldoet aan

(3) $$v'' + k^2v = 0.$$

Uit (2) en (3) volgt:

$$u''v - uv'' = -\left\{1-k^2+ \left(\tfrac{1}{4} - \nu^2\right)x^{-2}\right\} uv,$$

(4) $$\left[u'v - uv'\right]_\alpha^\beta = -\int_\alpha^\beta \left\{1-k^2 + \left(\tfrac{1}{4} - \nu^2\right)x^{-2}\right\} u(x) \sin k(x-\alpha)\,dx \quad (0<\alpha<\beta).$$

<u>Laat u reëel zijn voor $x > 0$.</u>

a) Voor $0 < k = k_1 < 1$ bestaat x_1 zo groot dat

$$1-k_1^2+ \left(\tfrac{1}{4} - \nu^2\right)x^{-2} > 0 \qquad \text{voor } x \geqslant x_1 > 0.$$

Neemt men nu in (4) $k = k_1$, $\alpha \geqslant x_1$ en $\beta = \alpha + \pi/k_1$ dan blijkt dat u tenminste één nulpunt heeft tussen α en β. De afstand tussen opvolgende positieve nulpunten van $C_\nu(x)$ is $< \pi/k_1$ als $x \geqslant x_1$. Daar dubbele nulpunten niet kunnen voorkomen (behalve voor $x = 0$) en ophopingspunten van nulpunten helemaal niet, kan men de positieve nulpunten van $C_\nu(x)$ rangschikken naar opklimmende grootte: $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots\ldots$

We hebben:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n < \frac{\pi}{k_1} \qquad \text{voor } \alpha_n \geqslant x_1(k_1).$$

b) Op soortgelijke wijze vindt men als $k_2 > 1$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n \quad \frac{\pi}{k_2} \qquad \text{voor } \alpha_n \geqslant x_2(k_2).$$

Hieruit volgt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} - \alpha_n = \pi.$$

Zonder veel moeite volgt uit de definitie van x_1 en x_2 dat

$$\alpha_n = n\pi + \gamma + O\left(\tfrac{1}{n}\right).$$

§ 3. <u>Asymptotisch gedrag.</u>

Laat $u = x^{\frac{1}{2}} C_\nu(x)$ reëel zijn voor $x > 0$, u en u' kunnen niet tegelijk nul zijn als $x > 0$. Stel nu

(5) $$u = \rho \sin\theta \quad , \quad u' = \rho \cos\theta \qquad (x > 0).$$

$\rho(x) > 0$ is eenduidig bepaald. ρ heeft een continue afgeleide.

$\theta(x)$ is eenduidig bepaald als we zijn waarde in een willekeurig punt $x_0 > 0$ kiezen en eisen, dat $\theta(x)$ continue is. Dan heeft ook $\theta(x)$ een continue afgeleide. Uit (2) volgt:

(6) $$\frac{\rho'}{\rho} = \tfrac{1}{2}\left(\nu^2 - \tfrac{1}{4}\right)x^{-2} \sin 2\theta$$

$$\theta' = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\nu^2 - \tfrac{1}{4}\right)x^{-2}(\cos 2\theta - 1)$$

Zonder moeite leidt men hieruit af dat $\theta(x) - x \to$ een limiet δ als $x \to \infty$, en

$$\theta(x) = x + \delta + O(x^{-1})$$

of preciezer

$$\theta(x) = x + \delta + \tfrac{1}{2}\left(\nu^2 - \tfrac{1}{4}\right)x^{-1} + O(x^{-2}).$$

Men vindt tevens dat

$$\rho(x) \to A > 0 \text{ als } x \to \infty \;, \text{ en}$$

$$\rho(x) = A + O(x^{-2}).$$

Tenslotte

$$C_\nu(x) = Ax^{-\frac{1}{2}}\sin(x+\delta)+\tfrac{1}{2}(\nu^2-\tfrac{1}{4})Ax^{-\frac{3}{2}}\cos(x+\delta)+O(x^{-\frac{5}{2}})$$

als $x \to \infty$.

Men vindt hier nogmaals dat $C_\nu(x)$ oneindig veel positieve nulpunten heeft met asymptotische afstand π .

§ 4. Niet reële nulpunten.

Lemma. Als $w(z)$ een analytische functie is, en we stellen $z = re^{i\varphi}$, dan wordt

$$|w(z)|^2 = f(r,\varphi),$$

en deze f voldoet aan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\varphi} = -\frac{2}{r}\,\mathrm{Im}\left\{z^2w'' + zw'\right\}\overline{w},$$

waarin $w' = w'(z)$, $w'' = w''(z)$.

Nu geldt voor de Bessel functie $w = C_\nu(z)$ blijkens (1)

$$z^2w'' + zw' = (\nu^2 - z^2)w,$$

zodat voor

$$f = |C_\nu(z)|^2 \text{ geldt}$$

(7) $$\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\varphi} = (2r\sin 2\theta)f.$$

Integreert men (7) over θ en r: $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 < r_0 \leqslant r \leqslant r_1$, dan blijkt

(8) $$f(r_0,\theta_0) - f(r_0,\theta_1) + f(r_1,\theta_1) - f(r_1,\theta_0) > 0$$

voor $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 < r_0 < r_1$.

Uit (8) kan men o.a. afleiden

a) Als $\alpha_0 > 0$ zo is dat $|C_\nu(x)| \geqslant |C_\nu(\alpha_0)|$ voor $x \geqslant \alpha_0$ (in het bijzonder als α_0 een nulpunt is van $C_\nu(z)$), dan heeft $C_\nu(z)$ geen niet reële nulpunten met $\mathrm{Re}z \geqslant 0$ buiten de cirkel $r = \alpha_0$.

Is $C_\nu(z)$ reëel voor $z = x > 0$ dan heeft $C_\nu(z)$ een kleinste nulpunt $\alpha_0 \geqslant 0$. Er kunnen dan hoogstens eindig veel niet reële nulpunten zijn in $\mathrm{Re}z \geqslant 0$.

b) Als $\beta_0 \geqslant 0$ zo is dat $|C_\nu(iy)| \geqslant |C_\nu(i\beta_0)|$ voor $y \leqslant \beta_0$ (in het bijzonder als $i\beta_0$ een nulpunt is van $C_\nu(z)$), dan heeft $C_\nu(z)$ geen niet zuiver imaginaire nulpunten met $\mathrm{Im}z \geqslant 0$ binnen de cirkel $r = \beta_0$.

c) Toepassing op $J_\nu(z)$. $J_\nu(z)$ heeft voor $\nu \geqslant -1$ geen niet reële nulpunten. Voor $\nu < -1$ kan men een cirkel of ringvormig gebied aangeven waarbinnen alle niet reële nulpunten liggen.

§ 5. Kleinste positieve nulpunt van $J_\nu(x)$.

Noem het γ_ν . Voor $\nu > -1$ is γ_ν een monotoon toenemende continue functie van ν . Als $\nu \downarrow -1$ dan $\gamma_\nu \to 0$, en als $\nu \to \infty$ dan $\gamma_\nu \to \infty$ ($\gamma_\nu/\nu \to 1$).

Voor ν tussen twee opvolgende negatieve gehele getallen $-k-1$ en $-k$ is γ_ν eveneens een monotoon toenemende functie van ν ; $\gamma_\nu \to 0$ als $\nu \downarrow -k-1$ en $\gamma_\nu \to \gamma_k$ als $\nu \uparrow -k$.

§ 6. Geboorte van niet reëele nulpunten van $z^{-\nu} J_\nu(z)$.

$w_\nu = z^{-\nu} J_\nu(z)$ is een gehele functie van z; de nulpunten van w zijn continue functies van ν. Als ν varieert kan een reëel nulpunt van w slechts dan overgaan in een niet reëel nulpunt als het een multipliciteit $\geqslant 2$ heeft, immers de niet reële nulpunten komen in toegevoegd complexe paren voor. Meervoudige nulpunten komen alleen voor in $z=0$, en alleen als $\nu = -k$ $(k = 1,2,\ldots)$. Voor $\nu = -k$ heeft w een 2k-voudig nulpunt in $z=0$. Als $-k-1 < \nu < -k$ heeft w geen nulpunt in $z=0$ (in het bijzonder dus geen meervoudig nulpunt). Als ν dichtbij $-k$ ligt ($\nu < -k$) dan ligt γ_ν dicht bij γ_k. Waar zijn de 2k nulpunten dan gebleven, die w voor $\nu = -k$ nog had in $z=0$? Die zijn van de reële as afgegaan toen ν kleiner werd dan $-k$. Als $\nu \downarrow -k-1$ dan trekken de 2k niet reële nulpunten van w zich weer samen op $z=0$, tezamen met γ_ν. Voor $\nu = -k-1$ heeft w dan een $(2k+2)$voudig nulpunt in $z=0$.
Daar de nulpunten van $J_\nu(z)$ zowel symmetrisch liggen t.o.v. de reële als t.o.v. de imaginaire as, en daar er ten hoogste twee zuiver imaginaire nulpunten kunnen zijn, zullen er precies twee zuiver imaginaire nulpunten zijn als $-2p < \nu < -2p+1$ $(p = 1,2,\ldots)$, en geen enkel als

$$-2p-1 < \nu < -2p$$

Ontstaan en gedrag van de niet reële nulpunten van $z^{-\nu}\ J_\nu\ (z)$.