

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 027

Volume van een afgeknotte kubus in R_n ; asymptotisch gedrag

C.G. Lekkerkerker



Volume van een afgeknotte kubus in R_n ;
asymptotisch gedrag.

door

C.G. Lekkerkerker.

1. Zij $V(t)$ het volume van het lichaam in R_n , bepaald door

$$(1) \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 1 & (i = 1, \dots, n) \\ 0 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq t & (0 \leq t \leq n). \end{cases}$$

We bepalen langs meetkundige weg de functie $V(t)$. Laten Z en W de kubus resp. het vlak zijn, waarvan de vergelijking in (1) opgeschreven is.

$$(2) \text{ Triviaal is } 0 \leq V(t) \leq V(Z) = 1.$$

Op grond van symmetrieoverwegingen geldt:

$$(3) \quad V(t) + V(n-t) = V(Z) = 1.$$

Zij S de verzameling van die hoekpunten P van de kubus Z , die aan dezelfde kant van W liggen als de oorsprong O . Zij $v(P)$ de inhoud van de pyramide met top zo'n hoekpunt P , met rechten door P evenwijdig aan de coördinaatassen als ribben en met grondvlak in W . Verder bepalen we, als P een hoekpunt van Z is, de functies $k(P)$ en $d(P)$ als volgt:

$k(P)$ = aantal coördinaten van P , dat gelijk aan 1 is

$$d(P) = \begin{cases} +1 & \text{als } k(P) \text{ even is} \\ -1 & \text{als } k(P) \text{ oneven is.} \end{cases}$$

We beschouwen nu de volgende som:

$$(4) \quad \sum_{P \in S} d(P) v(P).$$

Het is een som van met teken voorziene volumina van delen van de bij O behorende pyramide. Laten we nu op een punt Q van die pyramide; we onderstellen dat Q inwendig punt is van die pyramide en dat geen enkele coördinaat van Q gelijk aan 1 is (deze onderstelling is niet essentiëel, waar het hier om volumebeschouwingen gaat). Laten r coördinaten van Q groter dan 1 zijn; noodzakelijk is $0 \leq r \leq t$. Het punt Q ligt in 1 pyramide, waarbij $k(P) = 0$, in het algemeen in $\binom{r}{m}$ pyramiden, waarbij $k(P) = m$ is. Is $k(P) = m$, dan is $d(P) = (-1)^m$. Het aantal keren, dat Q in de som (4) vertegenwoordigd is, is dus gelijk aan

$$\sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{r}{m};$$

deze uitdrukking is voor $r = 0$ gelijk aan 1, overigens gelijk aan 0.

Conclusie: de uitdrukking (4) is gelijk aan $V(t)$. Ter berekening van de som in (4) merken we op, dat er $\binom{n}{m}$ punten P in S bevat zijn, waarvoor $k(P) = m$. De bij zo'n punt behorende pyramide heeft ribbe $t-m$, omdat de uiteinden van zo'n ribbe coördinaatsom m resp. t hebben; het volume van

zo'n pyramide is dan ook bekend. We vinden dus:

$$(5) \quad V(t) = \sum_{m=0}^t (-1)^m \binom{n}{m} \frac{(t-m)^n}{n!}.$$

We merken op, dat als t een geheel getal is, de term $m=t$ bijdrage nul geeft.

2. Afleiding van een integraalvoorstelling van $V(t)$.

We gebruiken de volgende formules uit de functietheorie:

Is a een positieve constante, dan geldt:

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{-1-n} e^y dy = \frac{1}{n!},$$

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{-1-n} e^{-y} dy = 0. \quad (n \text{ een natuurlijk getal}).$$

Men kan deze formules bewijzen door beschouwing van de gesloten weg L_1 , bestaande uit het lijnsegment, dat $a-iR$ en $a+iR$ verbindt, en de linkerhelft C_1 van de cirkel met a tot middelpunt en R tot straal; en evenzo L_2 , bestaande uit dat lijnsegment en de rechterhelft C_2 van die cirkel ($R > a$). Daar e^y begrensd is voor $\operatorname{Re} y \leq a$, geldt nu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{-1-n} e^y dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1}$$

$$= \text{residu van } y^{-1-n} e^y \text{ in } 0 = \frac{1}{n!};$$

daar e^{-y} begrensd is voor $\operatorname{Re} y \geq a$ is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{-1-n} e^{-y} dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} = 0.$$

Door een eenvoudige substitutie volgt uit (6) en (7):

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{-1-n} e^{(t-m)y} dy = \begin{cases} \frac{1}{n!} (t-m)^n & \text{als } m < t \\ 0 & \text{als } m > t, \end{cases}$$

terwijl voor $m=t$ de integraal (8) ook gelijk aan nul is.

We substitueren nu (8) in de uitdrukking (5), die eigenlijk een afgebroken binomiumontwikkeling is. In de som, die dan ontstaat, mogen we rustig de sommatievariabele van 0 tot n laten lopen, omdat $n \geq t$ is en de bijkomende termen gelijk aan nul zijn. We krijgen dan:

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^n \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (-1)^m \binom{n}{m} y^{-1-n} e^{(t-m)y} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ty} y^{-1-n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} e^{-my} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ty} \left(\frac{1-e^{-y}}{y} \right)^n \frac{dy}{y}$$

In plaats van t voeren we in deze integraal liever een andere parameter in; de keuze zal later gerechtvaardigd worden. En wel stellen we:

$$t = \frac{b\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}.$$

We vinden dan:

$$(9) \quad V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\frac{1}{2}by\sqrt{n}} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}y} - e^{-\frac{1}{2}y}}{y} \right)^n \frac{dy}{y}.$$

Krachtens het gedrag van de integrand in (9) is het geoorloofd de integratieweg te vervormen, dat hij langs de imaginaire as loopt met een insluiting naar rechts om de oorsprong. Door de substitutie $y = \frac{2iv}{\sqrt{n}}$ gaat (9) over in:

$$(10) \quad V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibv} \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n \frac{dv}{v}.$$

3. Bestudering van $V(t)$ voor $n \rightarrow \infty$.

We denken b vast (met het oog hierop is de parameter t door b vervangen) en laten n tot ∞ naderen. Zij $\varepsilon > 0$.

Voor $0 < x \leq 1$ is $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \dots$

een alternerende reeks, waarvan de termen monotoon tot nul afnemen, dus

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} < 1 - \frac{1}{7}x^2.$$

Voor $x \geq 1$ is zeker $\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{1}{x}$.

We bepalen nu eerst een positief getal c , zodat geldt:

$$c > \frac{7}{2}, \quad \int_c^\infty e^{-\frac{1}{6}v^2} dv < \frac{\varepsilon}{10}, \quad e^{-\frac{1}{7}c^2} < \frac{\varepsilon}{10},$$

en daarna een natuurlijk getal n_0 , waarvoor geldt:

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{10}, \quad \sqrt{n} > c, \quad \left(\frac{6}{7} \right)^n < \frac{\varepsilon}{10} \quad (n > n_0)$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{7n} \right)^n < \frac{\varepsilon}{10} \quad (n > n_0)$$

$$\left| \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{6}v^2} \right| < \frac{\varepsilon}{10c} \quad \text{voor } 0 \leq v \leq c, \quad n > n_0.$$

De voorlaatste regel is te bewerkstelligen wegens

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c^2}{7n} \right)^n = e^{-\frac{1}{7}c^2} < \frac{\varepsilon}{10};$$

de laatste (met $0 \leq v \leq c$) volgt uit

$$\left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{6} \frac{v^2}{n} + \dots \right)^n \Rightarrow e^{-\frac{1}{6}v^2}.$$

Er geldt dan:

$$(11) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibv} \left\{ \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{6}v^2} \right\} \frac{dv}{v} \right| < \varepsilon \quad \text{voor } n > n_0.$$

We gaan eerst de volgende integraal schatten:

Bewijs:
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n \frac{dv}{v}.$$

Wegens $0 < v/\sqrt{n} \leq 1$ en $v \geq c$ geldt $\left| \frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right| = \frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{7} \frac{v^2}{n}$,
 dus $\left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n < \left(1 - \frac{v^2}{7n} \right)^n < \frac{(n+1)2v}{7n} \left(1 - \frac{v^2}{7n} \right)^n$.

Dus
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n \frac{dv}{v} < \int_c^{\sqrt{n}} \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n dv$$

$$< \int_c^{\sqrt{n}} \frac{(n+1)2v}{7n} \left(1 - \frac{v^2}{7n} \right)^n dv = \left(1 - \frac{v^2}{7n} \right)^{n+1} \Big|_c^{\sqrt{n}} =$$

$$= \left(1 - \frac{c^2}{7n} \right)^{n+1} - \left(\frac{6}{7} \right)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Vervolgens schatten we

$$\int_{\sqrt{n}}^{\infty} \left| \frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right|^n \frac{dv}{v}.$$

We hebben $\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n}}{v}$ en dus

$$\int_{\sqrt{n}}^{\infty} \left| \frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right|^n \frac{dv}{v} < \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{v} \right)^n \frac{dv}{v} =$$

$$= \frac{(\sqrt{n})^n v^{-n}}{n} \Big|_{\sqrt{n}}^{\infty} = \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{10}.$$

Nu volgt gemakkelijk

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ibv} \left\{ \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{6}v^2} \right\} \frac{dv}{v} \right|$$

$$< 2 \int_0^{\infty} \left| \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{6}v^2} \right| \frac{dv}{v}$$

$$\leq 2 \int_0^c \left| \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{6}v^2} \right| dv$$

$$+ 2 \int_c^{\sqrt{n}} \left(\frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right)^n \frac{dv}{v} + 2 \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \left| \frac{\sin v/\sqrt{n}}{v/\sqrt{n}} \right|^n \frac{dv}{v} + 2 \int_c^{\infty} e^{-\frac{1}{6}v^2} dv$$

$$< 2 \left(c \cdot \frac{\varepsilon}{10c} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{10} \right) = \varepsilon.$$

Opmerking. Feitelijk mogen we niet over $v=0$ heen integreren, maar moeten we dit punt door een instulping naar beneden vermijden. Voor de schattingen maakt dit echter niets uit.

Conclusie. Bij vaste b is

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V\left(\frac{b\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibv} e^{-\frac{1}{6}v^2} \frac{dv}{v}.$$

Noemen we het rechterlid $f(b)$, dan is de afgeleide:

$$\begin{aligned} f'(b) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} i e^{ibv} e^{-\frac{1}{6}v^2} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibv} - \frac{1}{6}v^2 dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{3b^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}(v-3ib)^2} dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{3b^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}v^2} dv = \frac{1}{2\pi} \sqrt{6\pi} e^{-\frac{3b^2}{2}}. \end{aligned}$$

Bij het bepalen van deze afgeleide hebben we geen last van de oorsprong, want die omzeilen we; het differentiëren onder het integraalteken vindt zijn rechtvaardiging in de uniforme differentiëerbaarheid van de integrand over een eindig en de exponentiële afname van de integrand en haar afgeleide voor $v \rightarrow \pm \infty$. In de formule voor $f'(b)$ mogen we wel rustig over de oorsprong heen integreren.

Voor $b=0$ is het rechterlid van (12) gelijk aan de helft van het residu van $\frac{1}{v} e^{-\frac{1}{6}v^2}$ in $v=0$, dus gelijk aan $\frac{1}{2}$. Voor willekeurige b vinden we voor het rechterlid van (12):

$$(13) \quad f(b) = \frac{1}{2} + \int_0^b \frac{1}{2\pi} \sqrt{6\pi} e^{-\frac{3x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{b\sqrt{3/2}} e^{-u^2} du.$$

De integraal in (13) is een oneven functie van b ; voor $b = -\infty$ en $b = +\infty$ vinden we resp. $f(-\infty) = 0$, $f(\infty) = 1$.

We kunnen ons resultaat als volgt interpreteren, als we even de lichaamsdiagonaal van de kubus, die door 0 gaat, door 1 voorstellen en het middelpunt van de kubus, n.l. het punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, dat op 1 ligt door M ; de lengte van 1 is gelijk aan $\sqrt{n}$. Voor $n \rightarrow \infty$ nadert het volume $V(t)$ tot 0 of 1, al naar gelang $t < \frac{n}{2}$ of $t > \frac{n}{2}$ is, indien het verschil van t met $\frac{n}{2}$ sterker oneindig wordt dan $\sqrt{n}$; het volume $V(t)$ nadert tot $\frac{1}{2}$ als genoemd verschil zwakker oneindig wordt dan $\sqrt{n}$; het nadert tot een andere waarde, geleverd door formule (13) als $\frac{2t-n}{\sqrt{n}}$ tot een eindige waarde b nadert. In het laatste geval is tevens de afstand tussen W en M eindig.