STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 030

Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van getallen van Fibonacci

C.G. Lekkerkerker

1951

<u>Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van getallen van Fibonacci</u>

door

C.G. Lekkerkerker.

Enige tijd geleden onderzocht Dr E. Zeckendorf te Luik een aantal eigenschappen van de getallen van Fibonacci; zoals bekend zijn dit de getallen u_n $(n = 1,2,3,\ldots)$, vastgeldgd door

$$(1) \qquad \begin{aligned} &u_1 = 1, \quad u_2 = 2 \\ &u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n \geqslant 3). \end{aligned}$$

Onder meer liet hij zien hoe een willekeurig natuurlijk getal te schrijven is als som van enige getallen van Fibonacci, hetgeen leidt tot de vraag, of een dergelijke schrijfwijze eenduidig is. Een en ander was aanleiding tot de nu volgende opmerkingen.

Allereerst bewijs ik:

<u>Stelling A</u>. Is N een natuurlijk getal, dan bestaat er één en slechts één stel natuurlijke getallen $i_1, i_2, \ldots, i_k$, waarvoor geldt:

$$(2) \qquad N = \sum_{\nu=1}^{k} u_{i_\nu}$$

$$(3) \qquad i_{\nu+1} \geqslant i_\nu + 2 \quad (\nu = 1,2,\ldots,k-1);$$

bovendien is voldaan aan:

$$(4) \qquad u_{i_k} \leqq N < u_{i_k} + 1.$$

Vervolgens ga ik na, of er iets valt te zeggen over het getal k, dat is het aantal termen in de som in het rechterlid van (2). Daartoe voer ik eerst een symbolische notatie in voor deze som. En wel, als μ een natuurlijk getal en $1 \leqq \mu \leqq i_k$ is, stel ik

$$(5) \qquad \begin{cases} e_\mu = 0 \text{ indien } u_\mu \text{ niet optreedt als term} \\ e_\mu = 1 \text{ indien } u_\mu \text{ wel optreedt} \end{cases}$$

en noteer dan N als het volgende aggregaat van enen en nullen:

$$(6) \qquad N = \left[e_{i_k}\, e_{i_k-1} \ldots e_2 e_1 \right].$$

Dus b.v. $7 = u_2 + u_4 = [1010]$. Het eerste cijfer van het aggregaat (6) is zeker 1, het laatste kan zowel 1 als 0 zijn en er kunnen wegens (3) niet twee enen op elkaar volgen. Op grond van stelling A komt ook elk aggregaat met deze eigenschappen inderdaad voor; we spreken van toegelaten aggregaat.

Verder noem ik het natuurlijke geval $r = r(N)$, dat voldoet aan

$$(7) \qquad u_r \leqq N < u_{r+1}$$

de <u>rang</u> van N; (4) zegt dan dat i_k juist de rang van N is.

Beschouw nu alle getallen, die een bepaalde rang r hebben; het aantal daarvan is $u_{r+1} - u_r = u_{r-1}$. Zij ψ_r het arithmetisch gemiddelde van het totaal aantal enen, dat voorkomt in de toegelaten toegevoegde aggregaten, die uit r cijfers bestaan. Over ψ_r spreekt zich nu uit:

<u>Stelling B</u>. De grootheid $\frac{1}{r}\psi_r$ heeft voor $r \to \infty$ een limiet, en wel $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}) = 0,2764\ldots$.

<u>Bewijs van stelling A</u>. We laten eerst zien, en wel door volledige inductie naar N, dat aan (2), (3), (4) te voldoen is; de eenduidigheid volgt achteraf.

Voor N = 1 is de bewering triviaal. Laat nu de bewering juist zijn voor 1,2,..., N-1 en bewijzen we haar voor N. Indien N zelf een getal van Fibonacci is, zeg u_r, dan voldoet de voorstelling $N = u_r$ aan de vraag. Indien dat niet zo is, en r de rang van N is, schrijven we

$$N = u_r + (N - u_r);$$

er geldt

$$u_r < N < u_{r+1}$$

en dus

$$0 < N - u_r < u_{r+1} - u_r = u_{r-1} < N.$$

Voor $N - u_r$ bestaat er dan krachtens inductieveronderstelling een voorstelling

$$N - u_r = \sum_{\nu=1}^{p} u_{i_\nu}$$

met

$$i_{\nu+1} \geqslant i_\nu + 2 \text{ voor } \nu = 1,2,\ldots,p-1$$

en

$$i_p = r(N-u_r) \leqq r-2 \text{ wegens } N - u_r < u_{r-1}.$$

De voorstelling

(8) $$N = u_r + \sum_{\nu=1}^{p} u_{i_\nu}$$

voldoet kennelijk aan de eisen (2), (3), (4).

Dat de voorstelling (2) eenduidig is, volgt eveneens door volledige inductie naar N. Voor N =1 is het duidelijk. Laat het gelden voor de getallen kleiner dan N en beschouwen we een voorstelling van N in de gedaante (2), waarbij aan (3) voldaan is. Dan is zeker $i_k = r(N)$. Want uit $i_k > r(N)$ zou volgen $N \geqslant u_{r(N)+1}$, in tegenspraak met de definitie van r(N). En uit $i_k < r(N)$ zou volgen $i_{k-1} \leqq r(N)-3$, dus krachtens inductieveronderstelling

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} u_{i_\nu} < u_{i_{k-1}+1} \leqq u_{r(N)-2},$$

dus

$$\sum_{\nu=1}^{k} u_{i_\nu} < u_{i_k} + u_{r(N)-2} \leqq u_{r(N)-1} + u_{r(N)-2} = u_{r(N)},$$

dus wegens (7)

$$N = \sum_{\nu=1}^{k} u_{i_\nu} < N,$$

wat een tegenspraak is.

We schrijven weer $N = u_r + (N-u_r)$ en hoeven dan nog slechts op te merken, dat krachtens inductieonderstelling de voorstelling van $N - u_r$ eenduidig is.

Bewijs van stelling B. Zij ϑ de oneindig voortlopende kettingbreuk $(1,1,1,\ldots)$ en k_n de n^e naderende breuk van θ, d.w.z. $k_n = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ met $b_0 = b_1 = \ldots = b_n = 1$. Dan is

(9) $$\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = k_n$$

(10) $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \theta\right| = \left|k_n - \theta\right| = \frac{1}{u_n(\theta u_n + u_{n-1})} = O(u_n{-2})$$

Verder is dan $u_n = k_n k_{n-1} \ldots k_1$, dus

$$\frac{u_n}{\theta^n} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{\nu=1}^{n} (\theta + O(u_\nu \quad)) = \prod_{\nu=1}^{n} (1+O(u_\nu^{-2})) = \prod_{\nu=1}^{n} (1+O(\nu^{-2})),$$

zodat $\frac{u_n}{\theta^n}$ een eindige, van nul verschillende limiet α heeft:

(11) $$u_n \sim \alpha\,\theta^n.$$

Noemen we a_r het totaal aantal enen, dat voorkomt in de toegelaten aggregaten, bestaande uit r cijfers. Dan is $\varphi_r = \frac{a_r}{u_{r-1}}$. Zij verder

$$A_r = \sum_{\rho=1}^{r} a_\rho .$$

Beschouw nu een getal N met rang $r \geqslant 5$. Het derde cijfer van links in het bijbehorende aggregaat (6) is e_{r-2}. Er zijn twee mogelijkheden:

1) $e_{r-2} = 0$

2) $e_{r-2} = 1$.

In geval 1) gaat het aggregaat over in een toegelaten aggregaat bij schrapping van het cijfer e_{r-2}; daarbij kan elk toegelaten aggregaat van r-1 cijfers optreden. De aggregaten, die aan 1) voldoen, bevatten dus in totaal a_{r-1} enen.

In geval 2) begint het aggregaat met 1010; de rest bestaat òf geheel uit nullen, òf is een toegelaten aggregaat, eventueel voorafgegaan door een aantal nullen. Elk aggregaat met hoogstens r-4 cijfers kan hierbij als een zodanige rest optreden. Het aantal aggregaten, dat in geval 2) verkeert, is 1 meer dan het aantal natuurlijke getallen waarvan de rang hoogstens r-4 is, dat zijn de natuurlijke getallen, kleiner dan u_{r-3}. Genoemd aantal aggregaten is dus u_{r-3}; lettend op het vaste beginstuk 1010 bevatten deze aggregaten tezamen $2u_{r-3} + A_{r-4}$ enen.

H

Hiermee is de volgende recurrente betrekking voor a_r gevonden:

(12) $$a_r = a_{r-1} + 2u_{r-3} + A_{r-4}.$$

In de rest van het bewijs leiden we uit (12) het gedrag van ψ_r af. Allereerst leiden we uit

$$a_r - a_{r-1} = 2u_{r-3} + A_{r-4}$$
$$a_{r+1} - a_r = 2u_{r-2} + A_{r-3}$$

op grond van $u_{r-2} - u_{r-3} = u_{r-4}$, $A_{r-4} - A_{r-3} = a_{r-4}$ af:

$$a_{r+1} - 2a_r + a_{r-1} = 2u_{r-4} + a_{r-3},$$

of ook, als we ψ_r invoeren en letten op de definitie van k_r:

$$\psi_{r+1} - 2\psi_r \frac{1}{k_r} + \psi_{r-1}\frac{1}{k_r k_{r-1}} = \frac{1}{k_r k_{r-1} k_{r-2} k_{r-3}}(2 + \psi_{r-3}).$$

Stellen we $\psi_{r+1} - \psi_r = \chi_r$, dan komt er wegens (10):

$$(\chi_r + \chi_{r-1} + \chi_{r-2} + \chi_{r-3}) + \psi_{r-3} - \left\{\frac{2}{\theta} + O(u_r^{-2})\right\}\left\{(\chi_{r-1} + \chi_{r-2} + \chi_{r-3}) + \psi_{r-3}\right\} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{\theta^2} + O(u_r^{-2})\right\}\cdot(\chi_{r-2} + \chi_{r-3} + \psi_{r-3}) - \left\{\frac{1}{\theta^4} + O(u_r^{-2})\right\}\cdot(2 + \psi_{r-3}) = 0.$$

Nu is kennelijk $0 \leqslant \psi_r \leqslant r$; verder is

$$\psi_{r-3} - \frac{2}{\theta}\psi_{r-3} + \frac{1}{\theta^2}\psi_{r-3} - \frac{1}{\theta^4}\psi_{r-3} = \psi_{r-3}\cdot\frac{\theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2 - 1}{\theta^4} = 0.$$

We vinden dus de volgende betrekking voor χ_r:

(13) $$\chi_r + \chi_{r-1} + \chi_{r-2} + \chi_{r-3} - \frac{2}{\theta}(\chi_{r-1} + \chi_{r-2} + \chi_{r-3}) + \frac{1}{\theta^2}(\chi_{r-2} + \chi_{r-3}) =$$
$$= \frac{2}{\theta^4} + O(ru_r^{-2}).$$

Om de term $2\theta^{-4}$ in het rechterlid van (13) kwijt te raken, bepalen we het getal c uit

$$c\left(4 - \frac{6}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right) = \frac{2}{\theta^4}$$

en stellen $\chi_r = c + \eta_r$. Dan is $c = \dfrac{\theta^{-2}}{2\theta^2 - 3\theta + 1} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{5}\sqrt{5})$, terwijl η_r voldoet aan

$$\eta_r + \eta_{r-1} + \eta_{r-2} + \eta_{r-3} - \frac{2}{\theta}(\eta_{r-1} + \eta_{r-2} + \eta_{r-3}) + \frac{1}{\theta^2}(\eta_{r-2} + \eta_{r-3}) = O(ru_r^{-2}),$$

anders geschreven:

$$\eta_r = -\left(1 - \frac{2}{\theta}\right)\eta_{r-1} - \left(1 - \frac{2}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\right)\cdot(\eta_{r-2} + \eta_{r-3}) + O(ru_r^{-2}).$$

Omdat we nu hebben

$$1 - \frac{2}{\theta} = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = 0.382\ldots$$
$$1 - \frac{2}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} = \tfrac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5}) = 0.146\ldots,$$

bestaat er een constante z tussen 0 en 1, zodat

$$\eta_r = O(z^r) + O(ru_r^{-2}).$$

Dan is

$$\lambda_r = \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{5}\sqrt{5}) + O(z^r) + O(ru_r^{-2}),$$

$$\psi_r - \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{5}\sqrt{5})r = O(\sum_{r=1}^{\infty} z^r + \sum_{r=1}^{\infty} ru_r^{-2}) = O(1),$$

wegens (11).

Hiermee is stelling B bewezen.

Opmerking. De betekenis van stelling B kan nog als volgt toegelicht worden. We kunnen op het aantal cijfers en het aantal enen van de duale voorstelling van een natuurlijk getal N letten, en analoog aan ψ_r een functie $\overline{\psi_s}$ invoeren:

$$s = \left[{}^2\log N\right],$$

$\overline{\psi}_s$ = gemiddeld aantal enen in de duaal geschreven getallen, waarvoor s een bepaalde waarde heeft. Dan is

$$\overline{\psi_s} \sim \tfrac{1}{2}\ {}^2\log N.$$

Anderzijds is echter wegens (11):

$$n \sim \frac{\log u_n - \log\alpha}{\log\theta} \sim \frac{\log u_n}{\log\theta},$$

dus

$$r(n) \sim \frac{\log N}{\log\theta},$$

dus

$$\psi'_r \sim \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{5}\sqrt{5})\ \frac{{}^2\log N}{{}^2\log\theta} = 0.38\ldots{}^2\log N.$$

D.w.z. dat ψ_r merkbaar kleiner is dan $\overline{\psi}_s$. Anders gezegd: in de duale voorstelling van een getal komen gemiddeld minder enen voor dan in de hierboven besproken voorstelling.