



Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

M. van Herwijnen

BEELDEN:
Een studie naar de mathematische morfologie van Serra

Afdeling Toegepaste Wiskunde

Notitie AM-N8701

Juni

A study to the mathematical morphology of Serra

The Centre for Mathematics and Computer Science is a research institute of the Stichting Mathematisch Centrum, which was founded on February 11, 1946, as a nonprofit institution aiming at the promotion of mathematics, computer science, and their applications. It is sponsored by the Dutch Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

GgKb u

BEELDEN

Een studie naar de Mathematische Morfologie van Serra

door

Marjan van Herwijnen
Universiteit van Amsterdam
Vakgroep Mathematische Fysica

februari 1987

INHOUD

	pag.
1. Inleiding	1
2. Serra	2
2.1. Mathematische Morfologie	2
2.2. Ruimte	3
2.3. Binaire Morfologische Transformaties	4
2.4. Afstanden	10
2.5. Grijswaarden	14
2.6. Skeletten	21
3. Toepassingen op de computer	24
4. Nieuwe Equivalentie Relatie	27
Appendix A: Plaatjes	34
Appendix B: Notaties	41
Appendix C: Referenties	42

1. INLEIDING

Doordat beeldverwerking in veel verschillende vakgebieden toegepast wordt, zoals geneeskunde, biologie, geografie, sterrenkunde, weersvoorspelling, enz., vindt er versnippering plaats. De methoden die door praktijkmensen worden ontwikkeld zijn begrijpelijkerwijs niet breed toepasbaar. Een gunstige uitzondering hierop wordt gevormd door het werk van J. Serra en consorten, dat uitgebreid wordt beschreven in [33].

In hoofdstuk 2 heb ik getracht een overzicht te geven van gedeeltes van de theorie die door Serra in dit boek behandeld wordt, met name in de hoofdstukken I, II, III, VI, XI en XII. (Tevens worden enkele artikelen vergeleken die over hetzelfde onderwerp handelen.) De notatie [blz.x, Serra], verwijst altijd naar een bladzijde uit het boek van J. Serra [33]. Het boek van Serra behandelt de Mathematische Morfologie, een theorie die alleen transformaties toelaat, welke aan bepaalde eisen voldoen. De object ruimte (de ruimte van beelden) is in beginsel een ruimte van deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$, met daarop een topologie, de zogenaamde Hit or Miss topologie.

De meeste transformaties die ik noem, heb ik op een Olivetti p.c. geïmplementeerd. De plaatjes hiervan staan in Appendix A. Hoofdstuk 3 handelt over de wijze waarop deze transformaties geprogrammeerd kunnen worden.

Aan de theorie zoals Serra die opzet, zitten enkele onvolkomenheden. In hoofdstuk 4 ga ik hier op in.

Mijn dank gaat uit naar de medewerkers van de afdeling Toegepaste Wiskunde van het CWI en naar de leden van de werkgroep beeldanalyse. Verder wil ik Freek Wiedijk van de FVI danken voor zijn suggesties bij het programmeerwerk, Ed Kuijper voor zijn hulp bij het Spider pakket en Sjouke Mauw voor zijn meedenken en ondersteuning aan het gehele werk. Als laatste gaat mijn dank uit naar Henk Heijmans voor zijn begeleiding van mijn stage en voor zijn waardevolle ideeën bij het verbeteren van een deel van de theorie van Serra.

2. SERRA

2.1. MATHEMATISCHE MORFOLOGIE

Door het gebruik van de computer bij het analyseren van beelden, kan een heleboel routinewerk worden opgeheven en kunnen dingen onderzocht worden die anders ondoenlijk waren, zoals bijvoorbeeld het berekenen van oppervlakte-verhoudingen. In het wiskundige vlak van de beeldverwerking zijn echter enkele problemen ontstaan.

Ten eerste moet het object op een beeldscherm verschijnen. Zo'n beeldscherm bestaat uit pixels, waardoor het object gedigitaliseerd moet worden. De onderliggende ruimte verandert van continu naar diskreet, waardoor bepaalde begrippen, zoals afstand en samenhang, veranderd moeten worden. Op de overgang van continu naar discreet zal ik verder niet ingaan. In hoofdstuk VII van Serra [33] is hierover echter meer te vinden.

Ten tweede moet het object bewerkt worden om er de gewenste informatie uit te halen. Dit bewerken gebeurt met behulp van transformaties en/of metingen. Transformaties bewerken een beeld zodat er een nieuw beeld ontstaat (rand, geërodeerd beeld, enz.), en metingen geven een bepaalde waarde aan een beeld (afstand, oppervlakte, enz.). Aan de hand van deze waarde zou er weer een transformatie op het beeld kunnen worden toegepast. De transformaties en metingen moeten aan bepaalde eisen voldoen, willen de bewerkingen korrekt verlopen. Dit wil zeggen dat het resultaat van de bewerking nuttig moet zijn voor de kennis over het originele object. Hiertoe introduceert Serra de *Mathematische Morfologie* [blz.7, Serra], een theorie die gebaseerd is op een collectie transformaties en metingen die aan een aantal principes moeten voldoen. Hieronder worden alleen de principes's voor transformaties gegeven; die voor metingen zijn analoog hieraan. Een transformatie die aan de onderstaande vier principes's voldoet wordt morfologisch genoemd. Stel E is een topologische vektorruimte over de reële ruimte $\mathbb{R}$. X, X_i, Z, Z', Δ zijn deelverzamelingen van E , dus elementen van $P(E)$, de machtsverzameling van E . $\psi: P(E) \rightarrow P(E)$ is een transformatie en $h \in E$ en $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Zie appendix B voor de gebruikte definities. De vier principes zijn dan als volgt geformuleerd:

1. invariantie onder translatie:

$$\psi(X_h) = [\psi(X)]_h$$
2. compatibiliteit onder schaal-verandering:
 Als ψ van een schaalparameter λ afhangt, i.e. $\psi = \psi_\lambda$, dan moet gelden: $\psi_\lambda(X) = \lambda \psi_1(X/\lambda)$
3. principe van de lokale kennis:

$$\forall Z' \text{ begreund } \exists Z \text{ begreund: } [\psi(X \cap Z)] \cap Z' = \psi(X) \cap Z'$$
4. ψ is semi-continu:

$$\forall X_i, \text{ rij gesloten verzamelingen met } X_i \rightarrow \Delta \text{ voor } i \rightarrow \infty \text{ en } \forall \psi, \text{ stijgende transformatie,}$$

$$\text{voldoet de rij getransformeerde verzamelingen, } \psi(X_i), \text{ aan: } \psi(X_i) \rightarrow \psi(\Delta) \text{ voor } i \rightarrow \infty.$$
 (zie ook 2.2.)

Ik zal de vier principes hieronder één voor één verduidelijken aan de hand van een voorbeeld. Neem een mikroskopisch onderzoek van een tumor, waarbij van een preparaat een 'foto' gemaakt wordt om, met behulp van transformaties, de oppervlakte verhouding tussen twee verschillende weefsels te bepalen. Voordat je echter een transformatie kan toepassen, moet je op de één of andere manier de lokatie van bepaalde punten in de foto kunnen weergeven. Dit doe je door de foto in een coördinatenstelsel te plaatsen. Hierbij mag het voor het resultaat van de transformatie niet uitmaken waar je de oorsprong neerlegt (1). Verder moet het preparaat sterk worden vergroot. Ook bij deze schaalverandering moet het resultaat na een transformatie in de juiste verhouding staan tot het resultaat van een vergelijkbare transformatie op een foto zonder schaalverandering (2). In wezen bestudeer je op het beeldscherm maar een klein gedeelte van het preparaat. Pas je op dit gedeelte een transformatie toe, dan moet dit voor een begrepsd deel van de uitkomst gelijk zijn aan een begrepsd deel van de uitkomst van de transformatie op het gehele preparaat (3). In een foto is op sommige plekken vaak moeilijk te bepalen wat het beeld is; er zitten vage plekken in, die door de te lage resolutie 'fuzzy' zijn. Dit is vaak aan de randen van objecten. Er is dan een smalle reep tussen twee verzamelingen, waarvan je niet weet bij welke verzameling ze hoort. Dit blijft altijd bestaan, welke resolutie je ook neemt. Deze reep kan echter wel steeds smaller gemaakt worden, zodat je in de limiet op een echte rand uitkomt. Deze convergentie moet na toepassing van de transformatie behouden blijven (4).

2.2. RUIMTE

In het vorige hoofdstuk is de Mathematische Morfologie geïntroduceerd. Deze theorie werkt op E , een topologische vektorruimte over $\mathbb{R}$. Meestal wordt $E = \mathbb{R}^n$ genomen. De transformaties en metingen die aan deze principes's voldoen, werken op verzamelingen uit die continue ruimte. In deze ruimte, $P(\mathbb{R}^n)$, willen we een topologie definiëren. Hiervoor gebruikt Serra de door Matheron geïntroduceerde *Hit or Miss Topologie* [blz.74, Serra; blz.4, Matheron]. De "nabijheid" van twee gesloten verzamelingen wordt hierin bepaald door het aantal kompakte verzamelingen die ze beiden raken en door het aantal open verzamelingen waarmee ze beiden disjunkt zijn. Voor de precieze definitie zie Matheron en Serra. Deze topologie is gedefinieerd op $F(E)$, de ruimte van gesloten deelverzamelingen van E .

In deze topologische ruimte worden upper-semi-continue (u.s.c.) transformaties als volgt beschreven:

St.2.2.5 Zij E en E' twee ruimtes die Hausdorff, lokaal kompakt en separabel zijn.

Zij $\psi: F(E) \rightarrow F(E')$, stijgend.

(Voor de definities van deze begrippen zie appendix B). Dan geldt:

$$\psi \text{ is u.s.c.} \Leftrightarrow (F_i \downarrow F \text{ in } F(E)) \rightarrow (\psi(F_i) \downarrow \psi(F) \text{ in } F(E'))$$

De ruimte $\mathbb{R}^n$ voldoet aan de eisen voor E. De omschrijving betekent dat een stijgende transformatie ψ van $F(E)$ naar $F(E')$ u.s.c. is, wanneer voor iedere rij gesloten verzamelingen die naar F convergeert, de getransformeerde rij gesloten verzamelingen naar de getransformeerde van F convergeert. Dit is equivalent met het vierde principe van de Mathematische Morfologie.

Een beperking van deze stelling is echter dat deze alleen voor stijgende transformaties geldt, terwijl we in de beeldverwerking niet alleen stijgende transformaties gebruiken.

Een andere beperking is dat semi-continuïteit uitgaat van de ruimte van gesloten verzamelingen, of van de ruimte van open verzamelingen. Hierdoor ontstaan er problemen met de duale eigenschap van bepaalde transformaties (zie 2.3.). Een ander probleem dat hierdoor ontstaat is, dat er een groot aantal verzamelingen worden uitgesloten. Serra stelt voor om dit laatste probleem op te heffen door alleen naar de afsluiting (of het inwendige) van verzamelingen te kijken en hiermee de bewerkingen uit te gaan voeren. Hierdoor worden er geen verzamelingen meer uitgesloten, maar het probleem van de dualiteit blijft bestaan. Beter lijkt het om een equivalentie relatie in te voeren die verzamelingen, die erg op elkaar lijken, gelijk stelt. In hoofdstuk 4. wordt hier verder op in gegaan.

We hebben het nu steeds over continue ruimtes gehad, maar het plaatje of de foto waarmee uiteindelijk gewerkt moet gaan worden is een gedigitaliseerde versie van het originele continue objekt. Het vierde principe stelt je nu in staat om van een continue naar een discrete ruimte te gaan. Doordat de discrete ruimte een deel is van de continue ruimte, en de discrete morfologische transformaties een deel van de continue morfologische transformaties, zou de Mathematische Morfologie ook een discrete ruimte moeten kunnen beschrijven. Dit is echter niet zo eenvoudig. De eerste drie principe's kunnen wel vrij eenvoudig worden omgeschreven voor een diskrete ruimte. Dit wordt gedaan door alleen dié translaties toe te laten die het discrete rooster in zichzelf overvoeren, en door alleen met gehele getallen te vermenigvuldigen. De eis dat ψ semi-continu moet zijn, geeft echter meer problemen. Serra gaat hier niet verder op in, en laat dit vierde principe in diskrete ruimtes vervallen. In een later artikel [34] laat hij het vierde principe zelfs bij continue ruimtes weg!

2.3. BINAIRE MORFOLOGISCHE TRANSFORMATIES

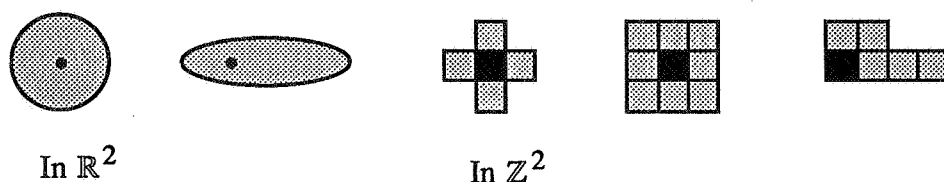
Vanaf nu nemen we voor de ruimte E de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ of het grid $\mathbb{Z}^n$ (zie 2.4 voor de definitie van grid). De tekeningen die de transformaties verduidelijken zijn echter alleen in de discrete ruimte $\mathbb{Z}^2$ gemaakt, en ze zijn te vinden in appendix A.

Het beeldscherm is geheel opgebouwd uit vlakjes en elk vlakje apart stelt een punt van $\mathbb{Z}^2$ voor. Aan elk punt van $\mathbb{Z}^2$ wordt een getal toegevoegd dat slechts de waarden 0 (=wit) of 1 (=zwart) kan aannemen, wat wil zeggen dat we met binaire beelden werken. Dit is te vergelijken met de indikator-functie $X_X: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0,1\}$ met $X_X(x)=1$ als $x \in X$ en $X_X(x)=0$ als $x \notin X$.

Zie hiervoor tekening 1a en b in Appendix A. Het zwarte gedeelte, de punten met waarde 1, stelt de

objektverzameling voor, en de witte punten de *achtergrond*.

De transformaties die Serra definieert, werken allemaal met een zogeheten *strukturerend element*. Dit is een kompakte deelverzameling van de ruimte E , die vaak de vorm heeft van een omgeving van een punt uit die ruimte. De nieuwe waarde van een punt na een transformatie hangt alleen af van de waarden van de punten uit die omgeving van dat ene punt, dus van de punten uit het strukturerend element. Het punt zelf hoeft niet noodzakelijk in die omgeving te liggen, alhoewel dat in de praktijk bijna altijd het geval is. Zie tekening 2.3.1 voor enkele voorbeelden van strukturerende elementen.



tekening 2.3.1

De twee eenvoudigste transformaties die Serra gebruikt zijn de erosie en dilatie. Dit zijn speciale gevallen van de Hit or Miss Transformatie, welke de stijgende morfologische transformaties van $P(E)$ genereert. Alle stijgende morfologische transformaties zijn namelijk opgebouwd uit de vereniging, het produkt en/of het complement van Hit or Miss Transformaties. De Hit or Miss Transformatie is echter weer opgebouwd uit een erosie en een dilatie.



De getransponeerde verzamelingen van tekening 2.3.1

tekening 2.3.2

Stel $X \in P(E)$ is de objektverzameling waarop de transformaties worden uitgevoerd (Zie tek. 1a en b). X is bevat in een grotere verzameling, $Z \in P(E)$, die het beeldscherm kan voorstellen. $B, B^1, B^2 \in P(E)$ zijn de strukturerende elementen en $B^\sim = \{x: -x \in B\}$ is de getransponeerde verzameling van B , dat wil zeggen B gespiegeld in de oorsprong. (Zie tekening 2.3.2) (Zie tek. 1c, d en e).

De erosie van de objektverzameling X bestaat uit die punten x , waarvoor B_x geheel binnen X valt. Dit is het geval als alle punten die door B_x worden bedekt de waarde 1 hebben. Zo'n punt x krijgt in de geërodeerde verzameling de waarde 1. Valt B_x niet in zijn geheel binnen de verzameling X , dan krijgt x de waarde 0, en gaat dus tot de achtergrond behoren. (Zie tek. 2a en b).

Def.2.3.1 De Erosie van X met B is: $X \ominus B^\sim = \{x: B_x \subset X\} = \bigcap_{b \in B^\sim} X_b$.

We nemen nu de achtergrond als objectverzameling, X^c , en laten hier de erosie op los. Daarna nemen we weer het complement, en de transformatie op X die we dan krijgen, noemen we dilatie. Dit is dus de duale van de transformatie erosie met betrekking tot het complement.

Def.2.3.2 De *Dilatie* van X met B is: $X \oplus B^c = (X^c \ominus B)^c$.

De gedilateerde verzameling van X is dus het complement van de geërodeerde van X^c . Ze bestaat uit die punten waarvoor B_x niet binnen X^c valt. Dit is gelijk aan de verzameling punten waarvoor de doorsnede van B_x en X niet leeg is, of nog anders gezegd: waarvoor B_x , X raakt (notatie: $B_x \uparrow X$) (Zie tek. 3a en b).

St.2.3.3 $X \oplus B^c = \{x: B_x \cap X \neq \emptyset\} = \{x: B_x \uparrow X\} = \cup_{b \in B^c} X_b$.

De Hit or Miss Transformatie (HMT) werkt met twee structurerende elementen B^1 en B^2 , en is gelijk aan de doorsnede van de erosie van X met B^1 en de erosie van X^c met B^2 (Zie tek. 13a en b).

Def.2.3.4 De *HMT* van X met $B = (B^1, B^2)$ is:

$$\begin{aligned} X \otimes B^c &= (X \ominus B^{-1}) \cap (X^c \ominus B^{-2}) = \{x: B_x^1 \subset X \wedge B_x^2 \subset X^c\} = \\ &= (X \ominus B^{-1}) \cap (X \oplus B^{-2}) \end{aligned}$$

Nemen we nu het structurerend element $B^2 = \emptyset$, dan ontstaat de erosie van X met B^1 .

De tekens $\ominus$ en $\oplus$ in de definities van erosie en dilatie zijn gelijk aan de Minkowski aftrekking ($X \ominus B = \cap_{b \in B} X_b$) en optelling ($X \oplus B = \cup_{b \in B} X_b$). Hier wordt over de verzameling B doorsneden of verenigd. De erosie wordt echter gedefinieerd door $\{x: B_x \subset X\}$ wat gelijk is aan $\cap_{b \in B^c} X_b$. Door nu in de definitie al de getransponeerde te gebruiken, kunnen dezelfde tekens worden gebruikt als voor de Minkowski aftrekking en optelling.

Een aantal eigenschappen van erosie en dilatie zijn:

- | | | |
|-----|--|--|
| 1. | $X \oplus \{0\} = X \ominus \{0\} = X$ | $\{0\}$ is het eenheids element van erosie en dilatie. |
| 2. | $X \oplus \{x\} = X \ominus \{x\} = X_x$ | translatie over x . |
| 3a. | $X \oplus (B \cup B') = (X \oplus B) \cup (X \oplus B')$ | erodeer X met B in gedeeltes. |
| 3b. | $X \ominus (B \cup B') = (X \ominus B) \cap (X \ominus B')$ | dilateer X met B in gedeeltes. |
| 4a. | $(X \cap Y) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Y \ominus B)$ | |
| 4b. | $(X \cup Y) \oplus B = (X \oplus B) \cup (Y \oplus B)$ | |
| 5a. | $X \subset X' \Rightarrow \forall B: X \ominus B \subset X' \ominus B$ | $\ominus$ is een stijgende transformatie. |
| 5b. | $X \subset X' \Rightarrow \forall B: X \oplus B \subset X' \oplus B$ | $\oplus$ is een stijgende transformatie. |
| 6a. | $B \subset B' \Rightarrow \forall X: X \ominus B \supset X \ominus B'$ | |
| 6b. | $B \subset B' \Rightarrow \forall X: X \oplus B \subset X \oplus B'$ | |
| 7a. | $(X \oplus B) \oplus B' = X \oplus (B \oplus B')$ | associativiteit. |
| 7b. | $(X \ominus B) \ominus B' = X \ominus (B \oplus B')$ | |

Deze eigenschappen komen bijna allemaal uit Serra [blz.45-48, Serra], op 4b en 6b na. Deze zijn vrij eenvoudig met behulp van dualiteit uit 4a resp. 6a af te leiden.

De eigenschappen 7a en b geven de mogelijkheid om dilatie of erosie met een groot structurerend element, dat zelf een dilatie is van kleinere structurerende elementen, in gedeeltes te doen. Dit heeft voordelen bij het programmeren omdat hierdoor hoofdzakelijk kleinere structurerende elementen gedefinieerd hoeven te worden.

Zijn erosie en dilatie nu morfologische transformaties in $\mathbb{R}^n$? Om een antwoord te vinden op deze vraag heb ik de vier principe's van de Mathematische Morfologie gecontroleerd:

1. Invariantie onder translatie.

Een verzameling dilateren is onafhankelijk van de keuze van de oorsprong, dus te bewijzen:

$$\psi(X_h) = [\psi(X)]_h, \text{ met } \psi(X_h) = X_h \oplus B \text{ en } [\psi(X)]_h = \{x+h: B_x \uparrow\uparrow X\} = \{x: B_{-h+x} \uparrow\uparrow X\} = X \oplus B_{-h}.$$

$$\text{Bewijs: } X_h \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_{h+b} = \bigcup_{b-h \in B} X_b = \bigcup_{b \in B-h} X_b = X \oplus B_{-h}. \quad \text{q.e.d.}$$

Het bewijs voor erosie gaat via de dualiteits-eigenschap.

2. Compatibiliteit onder schaalverandering.

Te bewijzen: $\psi_\lambda(X) = \lambda \psi_1(X/\lambda)$.

Bewijs: Kies $\psi_\lambda(X) = X \oplus \lambda B$. Dan is aan de voorwaarde voldaan.

Idem voor erosie.

3. Het principe van de lokale kennis.

Te bewijzen: $\forall Z \exists Z'$ zodat geldt: $((X \cap Z) \oplus B) \cap Z' = (X \oplus B) \cap Z'$, met Z en Z' begrens.

Bewijs: Kies een begrensde verzameling Z willekeurig. Neem dan $Z' = Z \ominus B$. Z' is dan ook begrens en er geldt:

$$\begin{aligned} ((X \cap Z) \oplus B) \cap Z' &= ((X \cap Z) \oplus B) \cap (Z \ominus B) = & (\forall A: A \cap A^c = \emptyset) \\ [((X \cap Z) \oplus B) \cap (Z \ominus B)] \cup [(Z \ominus B)^c \cap (Z \ominus B)] &= & ((Z \ominus B)^c = Z^c \oplus B) \\ [((X \cap Z) \oplus B) \cup (Z^c \oplus B)] \cap (Z \ominus B) &= \\ [((X \cap Z) \cup Z^c) \oplus B] \cap (Z \ominus B) &= & ((X \cap Z) \cup Z^c = X \cup Z^c) \\ [(X \cup Z^c) \oplus B] \cap (Z \ominus B) &= \\ [(X \oplus B) \cup (Z^c \oplus B)] \cap (Z \ominus B) &= \\ [(X \oplus B) \cap (Z \ominus B)] \cup [(Z^c \oplus B) \cap (Z \ominus B)] &= \\ (X \oplus B) \cap (Z \ominus B) &= (X \oplus B) \cap Z'. \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

Dit was het bewijs voor dilatie. Het bewijs voor erosie is veel eenvoudiger.

Bewijs: Neem weer $Z' = Z \ominus B$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} ((X \cap Z) \ominus B) \cap Z' &= ((X \cap Z) \ominus B) \cap (Z \ominus B) = \\ ((X \ominus B) \cap (Z \ominus B)) \cap (Z \ominus B) &= (X \ominus B) \cap (Z \ominus B) = (X \ominus B) \cap Z'. \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

4. semi-continuïteit.

Dilatie is continu, en dus ook semi-continu, mits $X \in F$ en $B \in K$.

Erosie is semi-continu (niet continu) mits $X \in F$ en $B \in K \setminus \{\emptyset\}$.

Voor het bewijs van deze twee beweringen verwijs ik naar blz.20 van Matheron [23]

Willen alle bovenstaande principes's geldig zijn, dan moeten erosie en dilatie aan een paar eisen voldoen. Ten eerste moet de verzameling waarop een erosie of dilatie wordt uitgevoerd gesloten (of open) zijn. Ten tweede moet het structurerend element kompakt zijn, en bij een erosie ook nog ongelijk aan $\emptyset$.

Zoals in hoofdstuk 2.2. al vermeld werd, geeft vooral de eis dat alleen op gesloten (of alleen op open) verzamelingen een erosie of dilatie mag worden uitgevoerd, problemen. Er geldt namelijk: $X \oplus B = (X^c \ominus B)^c$. Als X gesloten is, dan is X^c open in $\mathbb{R}^n$, en omgekeerd. Dus of de erosie of de dilatie werkt op een niet-gesloten verzameling. Dit kan opgeheven worden door in een ruimte te werken die alleen uit gesloten verzamelingen bestaat, bijvoorbeeld de ruimte $F(E)$ met de Hit or Miss topologie. Werken we in $\mathbb{Z}^n$, dan is niet duidelijk wanneer een verzameling open of gesloten is. Als we zouden definiëren dat voor alle begrensde verzamelingen in $\mathbb{Z}^n$ geldt: $X^0 = X^- = X$, dus dat alle verzamelingen open en gesloten zijn, dan zou misschien het bovenstaande probleem voor discrete ruimtes opgelost kunnen worden.

Twee heel belangrijke morfologische transformaties zijn opening en closing. Deze twee zijn opgebouwd uit één erosie en één dilatie, en zijn elkaars duale.

Def.2.3.5 De *opening* van X met B is: $X_B = (X \ominus B^\sim) \oplus B$.

Def.2.3.6 De *closing* van X met B is: $X^B = (X \oplus B^\sim) \ominus B$.

De opening maakt de rand van X aan de buitenkant gladder en verwijdert ruis die kleiner is dan B en zich buiten X bevindt (Zie tek. 4a en b). De closing daarentegen maakt de rand van X aan de binnenkant gladder en verwijdert kleinere ruis binnen X . (Zie tek. 5a en b)

Belangrijke eigenschappen van opening en closing zijn:

- $X_B \subset X \subset X^B$ (anti-) extensiviteit
- $X \subset X' \Rightarrow X_B \subset X'_B$ en $X^B \subset X'^B$ stijgend
- $(X_B)_B = X_B$ en $(X^B)^B = X^B$ idempotent

We noemen een verzameling X open met betrekking tot B als geldt: $X_B = X$.

En we noemen een verzameling X gesloten met betrekking tot B als geldt: $X^B = X$.

Als X open en gesloten is met betrekking tot B , dan heet X (Serra-) *regulier* m.b.t. B [blz.144, Serra].

Twee transformaties die gebruik maken van de Hit or Miss transformatie zijn de verdunning (thinning) en de verdikking (thickening). De verdunning van X wordt verkregen door van de verzameling X de HMT van X af te trekken (Zie tek. 14a en b). Bij de verdikking wordt deze er juist mee verenigd. De definities zijn als volgt:

Def.2.3.7 De *verdunning* van X met $B=(B_1, B_2)$ is: $X \circ B = X \setminus (X \otimes B)$

Def.2.3.8 De *verdikking* van X met $B=(B_1, B_2)$ is: $X \odot B = X \cup (X \otimes B)$

Het is eenvoudig in te zien dat de volgende eigenschappen gelden:

- $X \circ B \subset X \subset X \odot B$ (anti-) extensiviteit
- $(X \odot B) = (X^c \circ B^*)^c$ met $B^* = (B_2, B_1)$ dualiteit
- $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \Rightarrow X \circ B = X \odot B = X$
- $\{0\} \in B_1 \Rightarrow \forall B_2: X \odot B = X$
- $\{0\} \in B_2 \Rightarrow \forall B_1: X \circ B = X$

De transformatie verdunning wordt vaak gebruikt om een skelet van de verzameling X te bepalen. Hiervoor wordt het structurerende elementen een aantal keren gebruikt, maar dan steeds een kwart-slag gedraaid. Meer hierover in hoofdstuk 2.6.

Een andere transformatie die zeer bruikbaar is, is de conditionele dilatie.

Def.2.3.9 De *conditionele dilatie* van Y in X met B is: $Y \oplus B; X = (Y \oplus B) \cap X$

Deze transformatie wordt gebruikt om bijvoorbeeld kleine verzamelingen van een beeld te verwijderen. Dit wordt gedaan door eerst een aantal (zeg n) erosies toe te passen op het oorspronkelijke beeld X . Op het dan ontstane beeld Y worden conditionele dilaties toegepast, net zolang tot er niets meer verandert. Die deeltjes van het beeld die groot genoeg waren, zijn weer identiek aan het begin, en de te kleine deeltjes zijn verdwenen (Zie tek. 10a en b). Het verschil met de transformatie 'opening' (hier n dilaties na n erosies) is, dat hierbij de deeltjes die overgebleven zijn, ook veranderd zijn en dat is vaak niet de bedoeling (Zie tek. 6a en b).

Een tegenhanger van de conditionele dilatie is natuurlijk de conditionele erosie.

Def.2.3.10 De *conditionele erosie* van Y in X met B is: $Y \ominus B; X = (Y \ominus B) \cup X$

Hiermee worden de kleine gaten in de oorspronkelijke verzameling X opgevuld. De werking gaat analoog aan die van de conditionele dilatie (Zie tek. 11a en b).

Een laatste voorbeeld dat ik in dit hoofdstuk wil geven, is het *mediaan filter* voor de ruimte $\mathbb{Z}^2$ en binaire beelden. Voor grijswaarde-beelden en continue ruimtes wordt het mediaan filter in hoofdstuk 2.5. behandeld. Stel B heeft de vorm zoals in tekening 1c en de verzameling X heeft een matrix vorm, (x_{ij}) , met $x_{ij} \in \{0,1\}$. Dan wordt het mediaan filter, med , op X met B als volgt gedefinieerd:

Def.2.3.11 $\forall x_{ij}: \text{med}(x_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{als } x_{i-1j} + x_{ij-1} + x_{ij} + x_{ij+1} + x_{i+1j} \geq 3 \\ 0 & \text{als } x_{i-1j} + x_{ij-1} + x_{ij} + x_{ij+1} + x_{i+1j} \leq 2 \end{cases}$

Of ook: plaats x_{01} , x_{10} , x_{11} , x_{12} en x_{21} in een rij van opeenvolgende grootte en neem de middelste uit de rij. Hiervoor is het wel noodzakelijk dat het structurerend element B een oneven aantal elementen heeft. Uit tekening 9a en b blijkt dat dit ook een zeer goede transformatie is om ruis weg te werken. Wat hier in één slag wordt gedaan, gebeurt met erosies en dilaties ($(X_B)^B$ of $(X^B)_B$) in vier slagen (Zie tek 7a, b, 8a en b). Bovendien worden scherpe hoeken in een object door het mediaan filter niet zo sterk afgerond als met erosies en dilaties. Voor problemen bij het programmeren van dit filter verwijs ik naar hoofdstuk 3.

2.4. AFSTANDEN

Objekten die op een beeldscherm staan, zijn opgebouwd uit vlakjes. Deze vlakjes kunnen worden voorgesteld door punten; pixels of vertices genaamd. De verzameling van die punten wordt geordend, waardoor wordt aangegeven of twee punten wel of niet buren van elkaar zijn. Dit kan worden voorgesteld door een matrix, en wordt een grid genoemd. Serra geeft de volgende definitie voor een grid in $\mathbb{Z}^1$ [blz 173, Serra]:

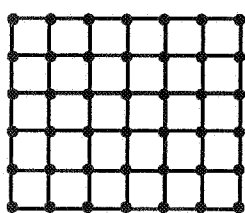
Def.2.4.1 Een *grid* in $\mathbb{Z}^1$ is gedefinieerd door twee verzamelingen:

1. een deelverzameling Y van $\mathbb{Z}^1$ wiens elementen vertices (punten) genoemd worden.
2. een deelverzameling D van $Y \times Y$ van paren punten, wiens elementen edges (kanten) genoemd worden.

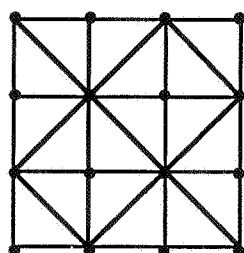
Deze twee verzamelingen moeten aan twee eisen voldoen:

3. Er bestaat een sub-groep t van translaties in $\mathbb{Z}^1$ waarvoor de grid, i.e. Y en D , invariant zijn (t-invariantie conditie)
4. Als (y^1, y'^1) en (y^2, y'^2) twee willekeurige kanten zijn, dan moeten de punten van $\mathbb{Z}^1$ tussen y^1 en y'^1 disjunkt zijn met die tussen y^2 en y'^2 (niet-kruisen conditie), i.e.
 $(y^i - y^j)(y'^i - y'^j) \geq 0$ en $(y^i - y^j)(y'^i - y'^j) \geq 0$ voor $i, j = 1, 2$

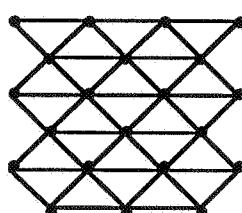
Deze definitie kan worden uitgebreid naar $\mathbb{Z}^2$ door bij de t-invariantie conditie ook te eisen dat de translatie vectoren in minstens twee verschillende richtingen moeten werken. Tevens moet de tweede eis (4.), waarin $y^i = (y_1^i, y_2^i) \in \mathbb{Z}^2$, voor minstens één van de verzameling coördinaten y_1^i of y_2^i gelden. In tekening 2.4.1.a, b en c staan voorbeelden van grids, die aan de definitie voor $\mathbb{Z}^2$ voldoen.



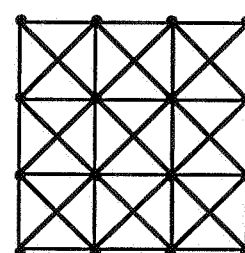
a. vierkant-grid



b. octagonaal-grid



c. hexagonaal-grid



d. octagonaal-"grid"

tekening 2.4.1

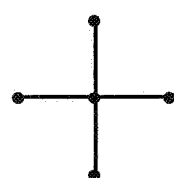
Door de niet-kruisen conditie wordt in tekening 2.4.1.d niet voldaan aan de definitie voor grid zoals Serra die geeft. Bij bepaalde toepassingen worden echter wel kruisende kanten gebruikt, zoals bijvoorbeeld bij 8-samenhangende componenten (zie tekening 2.4.3.b). Hiervoor zou de tweede eis als volgt veranderd moeten worden:

4'. Als (y^1, y'^1) en (y^2, y'^2) twee willekeurige kanten zijn, dan moeten de punten van Y tussen y^1 en y'^1 disjunkt zijn met die tussen y^2 en y'^2 (niet-snijden conditie).

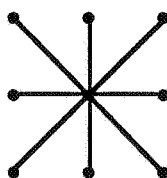
Deze eis voorkomt dat je twee parallelle kanten die een eindpunt gemeen hebben, als één kant beschouwt. Twee kanten mogen elkaar echter wel kruisen. Het octagonale "grid" uit tekening 2.4.1.d voldoet nu wel aan de definitie.

Serra werkt voornamelijk met het hexagonale grid, omdat dit voordelen heeft bij rotaties en bij het construeren van graphen van X en X^c . Deze twee graphen zijn namelijk symmetrisch, en bij het vierkante- en/of octagonale grid vaak niet [zie blz. 181, Serra]. De meeste beeldschermen hebben echter een rechthoekige ondergrond, en geen driehoekige. Hierdoor is het verstandig om ook het vierkante- en octagonale-grid te bestuderen, en niet alleen het hexagonale.

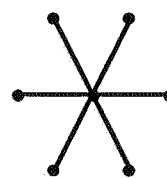
In hoofdstuk 2.3. wordt vaak met een structurerend element B gewerkt. Zo'n element is afhankelijk van het soort grid dat gebruikt wordt. Voor elk grid kan een basis-element gedefinieerd worden. Neem hiervoor één punt uit de verzameling Y en voeg hier al zijn burens aan toe. Twee punten zijn burens als ze door een kant verbonden zijn. Zie tekening 2.4.2 voor de basiselementen die behoren bij de bovenstaande drie soorten grids.



a. 4-s.h. basiselement



b. 8-s.h. basiselement



c. hexagonaal basiselement

tekening 2.4.2

In een topologische vektorruimte over $\mathbb{R}$ heet een verzameling X samenhangend (s.h.) als tussen elk paar punten van X een continue kromme te trekken is die bevat is in X . Deze definitie van samenhang is om te vormen naar een digitale binaire ruimte met behulp van een graph. De verzameling X is nu een deelverzameling van Y , en bestaat uit die punten van Y die waarde 1 hebben.

Def.2.4.3 Een *graph* (X,D) is een grid dat niet hoeft te voldoen aan de 1^e eis van invariantie van X en D onder een subgroep van translaties.

Een graph wordt het eenvoudigst geconstrueerd door het verwijderen of toevoegen van kanten aan een grid, al naar gelang de vorm van X . Een graph (X,D) bestaat uiteindelijk uit dié kanten van het grid, die twee punten met waarde 1 met elkaar verbindt. De rest van de kanten zijn verwijderd.

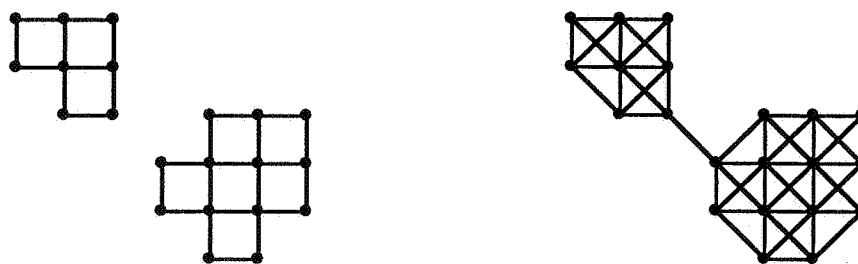
Def.2.4.4 Een *pad* in een graph is een geordende rij punten $X' \subset X$ waarbij elk paar opeenvolgende punten een kant van D is.

Merk op dat een pad geen richting heeft; als er een pad is van x naar x' , dan is er ook een pad van

x' naar x . Wat hier een pad genoemd wordt is een keten in de Graphentheorie. De definitie van samenhang van X in een digitale binaire ruimte wordt als volgt:

Def.2.4.5 X is *samenhangend* als er tussen elk paar punten van X een pad is.

Deze definitie lijkt eenduidig: X is samenhangend of niet. Maar doordat er verschillende soorten grids bestaan, en doordat er verschillende soorten graphen gebouwd kunnen worden, zijn er ook verschillende soorten van samenhang. Zo bestaat er bijvoorbeeld de hexagonale samenhang en de vierkante samenhang. Onder deze laatste valt weer de 4- en de 8-samenhang (tek.2.4.3). Hoewel er nog meer vormen van samenhang bestaan, komen de hiergenoemde het vaakst voor.



a. twee 4-samenhangende componenten b. één 8-samenhangend component

tekening 2.4.3

De meest algemene definitie van afstand tussen twee punten is de volgende:

Def.2.4.6 In een graph (X,D) is de afstand tussen twee punten $x, x' \in X$ de lengte van het kortste pad van x naar x' .

Een andere mogelijkheid is om dilatie te gebruiken. Als structurerend element wordt dan meestal een structurerend basiselement genomen, maar dat is natuurlijk niet noodzakelijk. De punten die afstand 1 tot een punt x hebben, zijn die punten die er bij een dilatie van x met B_0 , het basis element, zijn bijgekomen. Wordt deze nieuwe verzameling nogmaals met B_0 gedilateerd, dan hebben de nieuwe punten afstand 2 tot x .

Def.2.4.7 $B_1 = x \oplus B_0$ en $B_{i+1} = B_i \oplus B_0$. De afstand tussen x en x' is nu:

$$d(x, x') = \inf\{n: x' \in B_n\}$$

Wordt voor B_0 het 4-samenhangende basiselement genomen, dan is de afstand tussen $x=(x_1, x_2)$ en $x'=(x'_1, x'_2)$:

Def.2.4.8
$$d_4(x, x') = |x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2|$$

Stelt B_0 het 8-samenhangende basiselement voor, dan krijg je:

Def.2.4.9
$$d_8(x, x') = \max(|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|)$$

Behalve afstanden tussen punten bestaan er ook afstanden tussen verzamelingen en afstand-transformaties. Een afstand tussen twee begrensde verzamelingen kan als volgt gedefinieerd worden:

Def.2.4.10 Neem weer voor B_0 een basiselement en definieer nu:

$$B_1 = X \oplus B_0, \quad B'_1 = X' \oplus B_0, \quad B_{i+1} = B_i \oplus B_0 \quad \text{en} \quad B'_{i+1} = B'_i \oplus B_0.$$

$$d_H(X, X') = \inf\{n: X' \subset B_n \text{ en } X \subset B'_n\}$$

Deze afstand heet de Hausdorff metriek.

Merk op dat geldt: $d_H(X, X') = \sup\{d(x, x'): x \in X \text{ en } x' \in X'\}$, dat wil zeggen dat de afstand tussen twee verzamelingen gelijk is aan de afstand van de twee verst van elkaar gelegen punten uit die twee verzamelingen.

Als laatste wil ik een afstand-transformatie behandelen, en wel die van G. Borgefors [4][5]. Deze transformatie kent aan ieder punt van het object X een waarde toe die gelijk is aan de afstand tot het dichtst bijliggende punt van X^c . Om dit voor een object uit te voeren worden maskers gebruikt zoals in tekening 2.4.4 getekend voor een vierkant grid. Voordat de transformatie kan worden uitgevoerd, moeten de punten van X^c de waarde 0 krijgen en die van X de waarde oneindig. De konstanten d_i met $i=1,2$ hebben verschillende waarden, afhankelijk van het soort afstand dat gewenst is.

d_2	d_1	d_2
d_1	0	

voor: van links naar rechts en
van boven naar beneden.



	0	d_1
d_2	d_1	d_2

voor: van rechts naar links en
van beneden naar boven.



tekening 2.4.4

De werking van deze maskers gaat als volgt:

Het eerste masker wordt over het gehele beeld van links naar rechts en van boven naar beneden bewogen. Ondertussen worden nieuwe waarden berekend voor de pixels die zich onder de nul bevinden. Hiervoor worden de konstanten d_1 en d_2 bij de waarde van de onderliggende pixels opgeteld. De nieuwe waarde van het pixel waar de 0 op ligt is dan gelijk aan het minimum van deze sommen en van z'n eigen waarde. Het masker wordt dan een plaatsje opgeschoven naar rechts. Is het masker aan het eind van de regel, dan gaat hij terug naar het begin en een regel naar beneden. Als één van de konstanten de waarde ∞ heeft, dan zal deze geen invloed hebben op het berekenen van de afstand. Als het eerste masker klaar is wordt het tweede masker over het beeld bewogen, en wel van rechtsbeneden naar linksboven. Na afloop heeft elk pixel van X als waarde de afstand tot het dichtst bijliggende punt van X^c .

Neem $x=(0,0)$ en $x'=(m_1,m_2)$, met $m_1 \geq m_2$. (Als $m_2 > m_1$, dan verwisselen m_1 en m_2 in de onderstaande formules van plaats). Om de afstand tussen deze twee punten te berekenen, nemen we de objectverzameling X gelijk aan $\mathbb{Z}^2 \setminus \{x'\}$. Voor verschillende waarden van d_1 en d_2 kan nu de bijbehorende afstand berekend worden:

4-afstand:	$d_1=1; d_2=\infty$	$d_4(x,x') = m_1+m_2$
8-afstand:	$d_1=1; d_2=1$	$d_8(x,x') = m_1$
een afstand met $d_2 < 2d_1$:		$d(x,x') = m_2d_2 + (m_1-m_2)d_1 = d_1m_1 + (d_2-d_1)m_2$
chamfer(3,4) afstand:	$d_1=3; d_2=4$	$d_{3,4}(x,x') = 1/3 (3m_1+m_2)$
chamfer(5,7) afstand:	$d_1=5; d_2=7$	$d_{5,7}(x,x') = 1/5 (5m_1+2m_2)$
pseudo-euclidisch:	$d_1=1; d_2=\sqrt{2}$	$d_{p.e.}(x,x') = m_1 + (\sqrt{2}-1)m_2$
euclidische afstand:		$d_e(x,x') = \sqrt{(m_1^2+m_2^2)}$

De bedoeling is nu om de euclidische afstand het dichtst te benaderen. Omdat we in een digitale ruimte werken willen we dit doen met gehele getallen. Borgefors gaf als best benaderende afstand de chamfer(3,4) afstand. Latere onderzoeken geven echter de chamfer(5,7) afstand.[25]

Stap je van de eis van gehele getallen af, dan geven L. Dorst en A.W.M. Smeulders [9] de waarden $d_1=.948$ en $d_2=1.340$, dus niet de pseudo-euclidische afstand zoals je zou verwachten.

Een andere manier om de euclidische afstand beter te benaderen is door de maskers te vergroten. Hierboven zijn ze 3×3 , maar maskers van 5×5 of 7×7 behalen betere resultaten. Een nadeel is echter dat de rekentijd kwadratisch omhoog gaat.

De keuze van de afstand-transformatie is echter ook afhankelijk van wat ermee gedaan moet worden.

2.5. GRIJSWAARDEN

In de topologische vektorruimte over $\mathbb{R}$ kon een punt tot nu toe slechts de (grijs-)waarden 0 of 1 aannemen. Dit kan uitgebreid worden met meerdere grijs-waarden die tussen 0 en 1 inliggen. Een beeld stelt dan een *funktie* voor, die aan alle punten een waarde tussen 0 en 1 toekent: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$. Voor het gemak kunnen we door schaling ook nemen: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Bekijken we het beeld weer in een rooster, dan krijgen we de gedigitaliseerde funktie $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$. Wordt het bereik van de funktie beperkt tot het interval $[0,m]$ (in $\mathbb{Z}$ of $\mathbb{R}$), dan wordt de funktie een *picture* genoemd. Dit is meestal van toepassing op een beeldscherm, waar maar een beperkt aantal funktie-waarden (0-255) bereikbaar zijn.

Hoe kan zo'n beeld nu voorgesteld worden? In het binaire geval is het duidelijk; een punt behoort tot het object (heeft waarde 1) of niet (waarde 0). Met grijswaarden ligt dit allemaal niet zo duidelijk. Er is boven het vlak $\mathbb{R}^2$ (of $\mathbb{Z}^2$) een heel landschap ontstaan, met bergen en dalen. Waar het beeld licht van kleur is, bevinden zich hoogten en daar waar het donker is de dalen. Door nu te

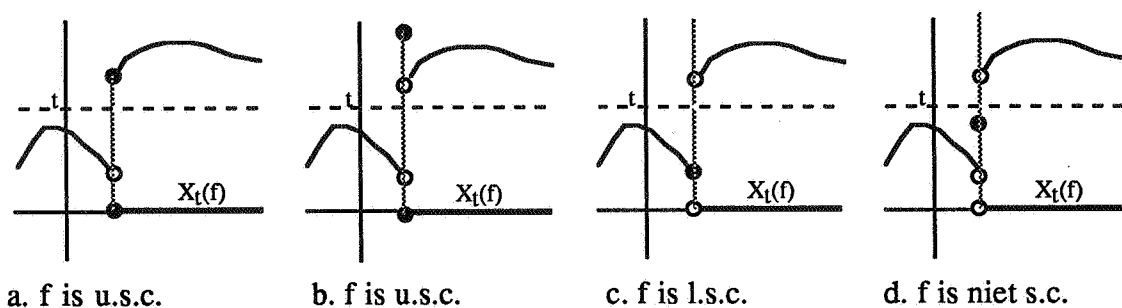
stellen dat alleen die pixels die een funktiewaarde boven een bepaalde vastgestelde waarde hebben, tot het object behoren, gaan we weer terug naar een binaire beeld. Het landschap wordt als het ware doorsneden door een horizontaal vlak op hoogte t . Die punten die met hun funktiewaarde boven het vlak zitten, behoren tot $X_t(f)$, de nivo-doorsnede (cross-section) op hoogte t . De definitie is als volgt:

Def.2.5.1 De nivo-doorsnede van X op t is: $X_t(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \geq t\}$ $(-\infty \leq t \leq \infty)$

De grijswaarde functie f moet aan bepaalde voorwaarden voldoen, willen we op het door nivo-doorsneden verkregen binaire beeld de transformaties uit hoofdstuk 2.3. kunnen toepassen. De object verzameling, hier $X_t(f)$, moet dan namelijk gesloten zijn (of open). Met behulp van stelling 2.5.2 krijgen we dan als voorwaarde voor de grijswaarde functie f dat deze upper-semi-continu moet zijn.

St.2.5.2 $X_t(f)$ is gesloten voor alle $t \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow f(x)$ is upper-semi-continu.

Enkele voorbeelden van grijswaarde functies, hier met $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, staan in tekening 2.5.1



tekening 2.5.1

St.2.5.3 Elke u.s.c. functie f , is weer te bepalen uit z'n nivo-doorsneden $X_t(f)$ door het supremum te nemen: $f(x) = \sup\{t: x \in X_t(f)\}$.

Verder geldt voor $X_t(f)$ de volgende eigenschappen:

1. $s < t \Rightarrow X_s(f) \supset X_t(f)$.
2. $X_t(f) = \bigcap_{s < t} X_s(f)$.

Omgekeerd geldt dat een familie van gesloten verzamelingen X_t $(-\infty \leq t \leq \infty)$, die voldoet aan de bovenstaande twee eigenschappen, een u.s.c. functie genereert.

Dezelfde eigenschappen kunnen voor l.s.c. functies verkregen worden door met $X_t^-(f) = \{x: f(x) > t\}$ te werken. Voor l.s.c. functies f is dit altijd een open verzameling. Dus ook als we met l.s.c. functies werken, is de mathematische morfologie van toepassing. In het vervolg worden alleen resultaten gegeven voor u.s.c. functies. Voor l.s.c. functies gelden echter analoge resultaten. Het resultaat dat elke u.s.c. functie door z'n nivo-doorsneden is bepaald, is van groot belang daar nu alle eigenschappen die we voor verzamelingen hadden, via de nivo-doorsneden kunnen worden

overgebracht naar u.s.c. functies. Hieronder wordt dit eerst voor een aantal eenvoudige transformaties gedaan, waarin f een functie en g een picture voorstelt:

- Translatie; f_h [idem voor g_h]. Hierbij geldt $f_h(x) = f(x-h)$.
 $X_t(f_h) = \{x: f_h(x) \geq t\} = \{x: f(x-h) \geq t\} = \{x+h: f(x) \geq t\} = (X_t(f))_h$.
- Vermenigvuldiging van f t.o.v. de t-as; λf [λg , $\lambda \geq 0$]
 $X_t(\lambda f) = \{x: \lambda f(x) \geq t\} = \{x: f(x) \geq t/\lambda\} = X_{t/\lambda}(f)$.
- Vermenigvuldiging van x t.o.v. het $\mathbb{R}_2$ -vlak; $f(\lambda x)$, $\lambda \geq 0$ [idem $g(\lambda x)$]
 $X_t(f(\lambda x)) = \{x: f(\lambda x) \geq t\} = \{x/\lambda: f(x) \geq t\} = 1/\lambda \cdot X_t(f(x))$.
- Optelling; $f(x) + \mu$ [$g(x) + \mu$, $0 < \mu < \infty$]
 $X_t(f(x) + \mu) = \{x: f(x) + \mu \geq t\} = \{x: f(x) \geq t - \mu\} = X_{t-\mu}(f(x))$.
- Complement; $-f$
 $X_t(-f) = \{x: -f(x) > t\} = \{x: f(x) < -t\} = \{x: f(x) \geq -t\}^c = X_{-t}(f)^c$.
 Complement; $m-g$
 $X_t(m-g) = \{x: m-g(x) > t\} = \{x: g(x) < m-t\} = \{x: g(x) \geq m-t\}^c = X_{m-t}(g)^c$.

Voor de picture g ontstaan problemen bij vermenigvuldiging (b.) en optelling (d.). Het bereik van de getransformeerde picture g zou namelijk buiten het bereik van g kunnen vallen. Een eenvoudige oplossing hiervoor is niet te geven, en Serra stapt hier geheel overheen. Nu we de eenvoudige transformatie bekeken hebben, gaan we onderzoeken hoe dilatie en erosie werken op functies. Laat f een u.s.c. functie en B een kompakte verzameling in $\mathbb{R}^2$.

Def.2.5.4 De dilatie van f met B : $X_t(f \oplus B) = X_t(f) \oplus B$

Dit is een juiste definitie, want er geldt:

- $X_t \subset X_s \Rightarrow X_t \oplus B \subset X_s \oplus B$
- $X_t \downarrow X_s \Rightarrow X_t \oplus B \downarrow X_s \oplus B$

Hieruit volgt dat $X_t(f) \oplus B$ de nivo-doorsnede is van een nieuwe u.s.c. functie $f \oplus B$. Via deze nivo-doorsnede kunnen we de funktiewaarden van $f \oplus B$ ook direkt bepalen:

St.2.5.5 $(f \oplus B)(x) = \sup\{f(y): y \in B_x^\sim\}$

bewijs: $X_t(f \oplus B) = X_t(f) \oplus B = \sup\{x: B_x^\sim \cap X_t(f) \neq \emptyset\} =$
 $= \sup\{x: \exists y \in B_x^\sim : y \in X_t(f)\} = \sup\{x: \exists y \in B_x^\sim : f(y) \geq t\}.$

Dan wordt:

$$(f \oplus B)(x) = \sup\{t: x \in X_t(f \oplus B)\} = \sup\{t: \exists y \in B_x^\sim : y \in X_t(f)\} =$$

$$= \sup\{f(y): y \in B_x^\sim\}. \quad \text{q.e.d.}$$

Evenzo kunnen we de erosie van f met B definiëren:

Def.2.5.6 De *erosie* van f met B : $X_t(f \ominus B) = X_t(f) \ominus B$.

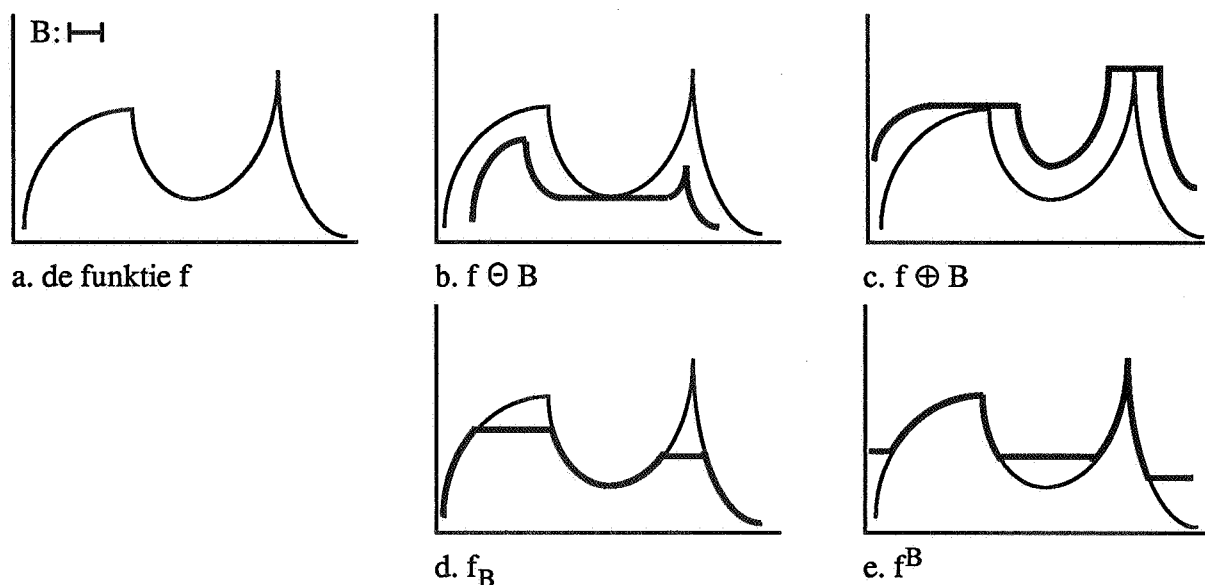
St.2.5.7 $(f \ominus B)(x) = \inf\{f(y) : y \in B_x^\sim\}$

In de discrete ruimte, waarin de funktie f slechts een beperkt aantal gehele waarden aan kan nemen, wordt de erosie van één punt x berekend door het minimum te nemen van de waarden van de punten die zich onder B_x bevinden. Voor de dilatie wordt dan het maximum van die waarden genomen.

In tekening 2.5.2.b. en c. zien we een erosie en een dilatie uitgevoerd op een funktie f . Het strukturerend element B is hier een horizontaal lijnstuk ter lengte 1. Evenals bij de erosie en dilatie op verzamelingen kunnen ook hier opening en closing gedefinieerd worden (tekening 2.5.2.d. en f.):

Def.2.5.8 De *opening* van f met B : $f_B = (f \ominus B^\sim) \oplus B$

Def.2.5.9 De *closing* van f met B : $f^B = (f \oplus B^\sim) \ominus B$



tekening 2.5.2

We hebben nu dilatie van een verzameling met een verzameling behandeld, en dilatie van een funktie met een verzameling. Gaan we nog een stapje verder, dan is dilatie van een funktie met een funktie het gevolg. Hiervoor moeten eerst twee nieuwe begrippen ingevoerd worden:

Def.2.5.10 De *umbra*, $U(X)$, van een verzameling $X \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ is:

$$U(X) = \{(x, t') : \exists t \geq t' : (x, t) \in X\}$$

Def.2.5.11 De *umbra*, $U(f)$, van een funktie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is: $U(f) = \{(x, t) : f(x) \geq t\}$

Def.2.5.12 De umbra $U(X)$ gespiegeld in de x -as: $U(X)^\wedge = \{(x, t) : (x, -t) \in U(X)\}$

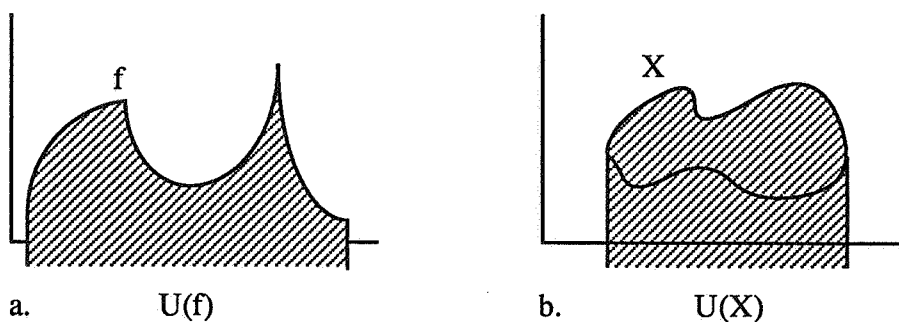
Bekijk voor de umbrae de tekeningen 2.5.3.a en b.

Dilatatie en erosie van een functie met een verzameling kunnen nu ook met behulp van de umbrae gedefinieerd worden:

$$\text{Def.2.5.13} \quad U(f \oplus B) = U(f) \oplus B$$

$$\text{Def.2.5.14} \quad U(f \ominus B) = U(f) \ominus B^\wedge$$

Hierin stelt B een strukturerend element voor in de 'grijswaarden' ruimte. De punten van B kunnen verschillende waarden t aannemen. In het binaire geval konden die punten alleen de waarde 1 aannemen. B wordt nu dus genoteerd door een verzameling $\{(x,t)\}$, waar eerst van een verzameling $\{(x)\}$ sprake was.



tekening 2.5.3

Dat de definities 2.5.13 en 14 goede definities zijn, volgt uit het feit dat voor de umbrae van verzamelingen geldt:

$$a. \quad B_{x,t}^\sim \uparrow U(X) \Leftrightarrow U^\sim(B_{x,t}) \uparrow U(X)$$

$$b. \quad (B_{x,t}^\wedge)^\sim \subset U(X) \Leftrightarrow U((B_{x,t}^\sim)^\wedge) \subset U(X) \Leftrightarrow [U^\wedge(B_{x,t})]^\sim \subset U(X)$$

Hieruit volgt dat $U(X) \oplus B = U(X) \oplus U(B)$ en dat $U(X) \ominus B^\wedge = U(X) \ominus U^\wedge(B)$. Wordt hierin voor X de umbra van een u.s.c. functie f genomen, dus $U(f) = X$, dan volgt hieruit de juistheid van de definities.

Merk op dat bij erosie het strukturerend element B wordt gespiegeld. Dit is het gevolg van het feit dat $U^\wedge(f) = [U(-f)]^c$. Hierdoor wordt vanuit dilatatie, via dualiteit, de erosie van een functie met een verzameling verkregen:

$$\begin{aligned} U(f \ominus B) &= U(-((-f) \oplus B)) = [U^\wedge((-f) \oplus B)]^c = [U^\wedge(-f) \oplus U^\wedge(B)]^c = \\ &= [U^\wedge(-f) \oplus B^\wedge]^c = [U(f)^c \oplus B^\wedge]^c = U(f) \ominus B^\wedge \end{aligned}$$

Merk verder op dat het niet uitmaakt of de functie-waarden van $f \oplus B$ via de nivo-doorsneden of via de umbrae verkregen worden. Er geldt namelijk: $x \in X_t(f) \Leftrightarrow (x,t) \in U(f)$.

Stel nu dat B de umbra is van een u.s.c. functie g . Dan kan direkt uit de laatste twee definities de volgende definitie worden verkregen:

$$\text{Def.2.5.15} \quad U(f \oplus g) = U(f) \oplus U(g)$$

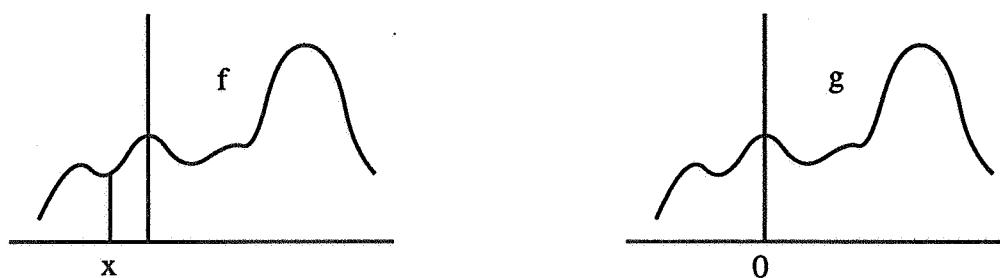
Def.2.5.16 $U(f \ominus g) = U(f) \ominus U^{\wedge}(g)$

De functie-waarden van $f \oplus g$ en $f \ominus g$ zelf, worden:

$$G.2.5.17 \quad (f \oplus g)(x) = \sup\{f(y) + g(x-y) : y \in \mathbb{R}^2\}$$

$$G.2.5.18 \quad (f \ominus g)(x) = \inf\{f(y) - g(x-y) : y \in \mathbb{R}^2\}$$

Merk op dat de formule voor erosie van twee functies niet symmetrisch is, dus als f en g van de vorm zijn zoals in tekening 2.5.5, dan wordt bij het berekenen van de erosie van het punt x niet de top bij g meegenomen.

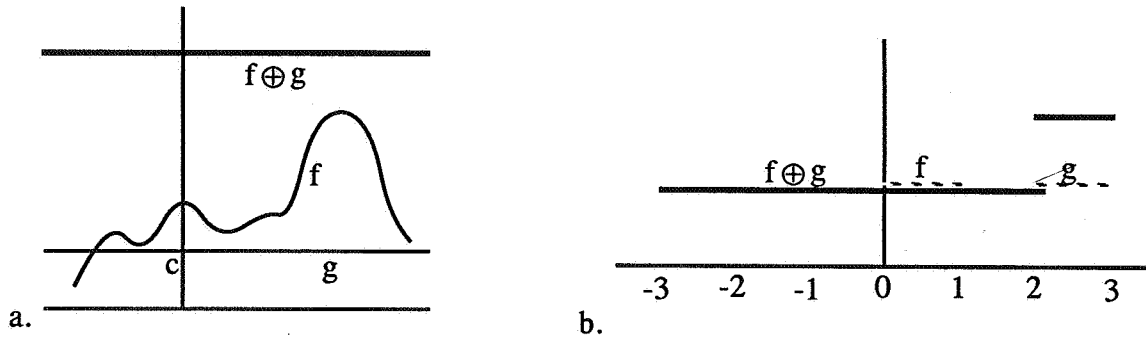


tekening 2.5.5

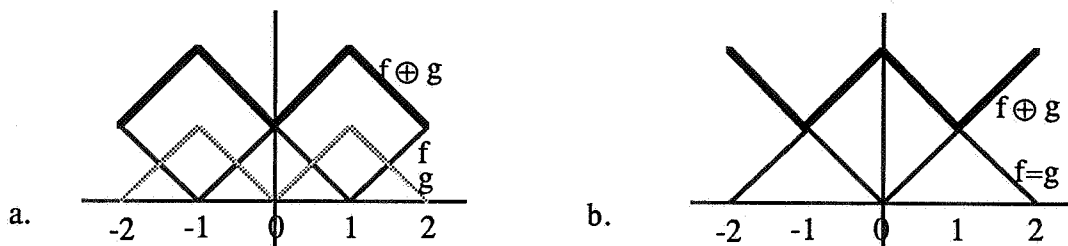
Ook hieruit kunnen weer opening, closing, enz. gedefinieerd worden.

Van de erosie van een functie met een verzameling kon nog een plaatje getekend worden. Dit wordt moeilijker als we de erosie van een functie met een functie willen tekenen. Voor het geval dat g identiek is aan een horizontaal lijnstuk op de x -as, is de erosie en dilatie met g equivalent aan die met dat horizontale lijnstuk (= verzameling). Enkele voorbeelden van die eenvoudige functies zijn op een compact deelverzameling van $\mathbb{R}^2$:

- a. $f(x) = cx$ en $g(x) = cx$ ($c > 0$)
 $(f \oplus g)(x) = \sup\{cy + c(x-y) : y, x-y \in K\} = \sup\{cx : y, x-y \in K\} = f(x)$
- b. $f(x)$ willekeurig en $g(x) = c$
 $(f \oplus g)(x) = c + \sup\{f(y) : y, x-y \in K\}$
 zie tekening 2.5.6.a
- c. $f(x) = 1_{[0,1]}(x)$ en $g(x) = 1_{[2,3]}(x)$ op $K = [-3,3]$
 $(f \oplus g)(x) = \sup\{1_{[0,1]}(y) + 1_{[2,3]}(x-y) : y, x-y \in [-3,3]\} = (1_K + 1_{[2,3]})(x)$
 zie tekening 2.5.6.b
- d. zie tekening 2.5.7.a met $K = [-2,2]$
- e. zie tekening 2.5.7.b met $K = [-2,2]$



tekening 2.5.6



tekening 2.5.7

De meeste transformaties worden bij Serra eerst in de continue ruimte gedefinieerd, en daarna geschikt gemaakt voor discrete ruimtes. Met het *mediaan filter* is dit niet het geval. Dit filter vindt zijn oorsprong in de discrete ruimte [blz.475, Serra]. Stel dat een punt in de discrete ruimte m grijswaarden kan aannemen ($\forall x: f(x) \in \{0, 1, \dots, m-1\}$). Het mediaan filter wordt dan als volgt berekend:

Def.2.5.15 Neem een punt x , en zijn omgeving B_x . Zet alle waarden van de punten uit B_x in een rij van opeenvolgende grootte. De middelste waarde uit die rij is de nieuwe waarde van x ; $(med(f))(x)$
 Voorwaarde: het aantal punten in B moet oneven zijn.

Voor binaire beelden, dus met $m=2$, kan het mediaan filter ook als volgt berekend worden:

St.2.5.16 $(med(f))(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } |\{y \in B_x: f(y)=1\}| \geq |\{y \in B\}| \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

Dit is te vergelijken met de transformaties erosie en dilatie. Het mediaan-filter is namelijk ook een lokale transformatie die voor één punt de nieuwe waarde haalt uit een omgeving, B , van dat punt. Bij erosie moeten alle punten uit die omgeving waarde 1 hebben, wil het nieuwe punt waarde 1 krijgen. Bij dilatie moet minstens één punt waarde 1 hebben, en bij het mediaan-filter moet minstens de helft van het aantal punten waarde 1 hebben.

2.6. SKELETTEN

Een voorbeeld van een niet-morfologische transformatie is het skelet. Deze transformatie is oorspronkelijk in $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd, en is moeilijk om te vormen naar een transformatie in een discrete ruimte. Dit zal verderop in het hoofdstuk blijken. Een skelet, $S(X)$, van X is een verzameling in $\mathbb{R}^2$ die aan de volgende voorwaarden moet voldoen:

1. De samenhang van $S(X)$ moet gelijk zijn aan die van X .
2. $S(X)$ moet een lijn van dikte 0 zijn.
3. $S(X)$ moet in het midden van X liggen.
4. $S(X)$ moet gebaseerd zijn op een afstand.

Een probleem is dat er voor het skelet van een verzameling X in $\mathbb{R}^2$ al twee, vrijwel identieke definities zijn, die aan deze voorwaarden voldoen, namelijk:

Def.2.6.1 Het *skelet* van X , $S(X)$, is een verzameling punten uit X waarvoor geldt:
 B_x is een maximale bol, d.w.z. B_x is de grootste bol, met x als middelpunt, die bevat is in X en er bestaat geen grotere bol B'_y , met $B_x \subset B'_y \subset X$.
 (Th. Motzkin (1935))

Def.2.6.2 De *medial axis* van X , $Me(X)$, is een verzameling punten uit X waarvoor geldt:
 De bol B_x , met x als middelpunt, raakt de rand van X op twee of meer punten.
 (H. Blum (1962))

Deze definities komen uit Serra [blz.375, Serra]. Als eerste gaan we de definitie van Th. Motzkin nader onderzoeken. Hiervoor moeten we eerst bepalen op wat voor soort verzamelingen we het skelet gaan toepassen. We gaan uit van open verzamelingen ($X \in G(\mathbb{R}^n)$). Hierdoor worden meteen die verzamelingen die hun eigen skelet zijn, zoals lijnen, uitgesloten. Verder wordt verondersteld dat X niet leeg is (voor het gemak) en dat de maximum bollen begrensd zijn. Door een nieuwe verzameling $s_\rho(X)$ te definiëren kan het skelet geschreven worden als een vereniging van verzamelingen.

Def.2.6.3 $s_\rho(X)$ is de verzameling middelpunten van de maximale open bollen met straal $\rho > 0$ die bevat zijn in X ; $\{x \in X: \rho B_x^0 \subset X \text{ en } \rho B_x^0 \text{ is maximaal}\}$

St.2.6.4 $S(X) = \bigcup_{\rho > 0} s_\rho(X)$

Een belangrijke stelling van Ch. Lantuéjoul (1977) laat zien dat het skelet geschreven kan worden als een combinatie van erosies en dilaties.

St.2.6.5 $S(X) = \bigcup_{\rho > 0} \bigcap_{\mu > 0} (X \ominus \rho B^0) \setminus (X \ominus \mu B^0)_{\mu B^0}$

Omdat $S(X)$ de vereniging is van de middelpunten van de maximale open bollen die bevat zijn in X ,

is de verzameling X weer te verkrijgen uit $S(X)$ door de vereniging van de maximale open bollen te nemen:

$$\text{St.2.6.6} \quad X = \bigcup_{\rho > 0} s_{\rho}(X) \oplus \rho B^0$$

Ook bij de tweede definitie van het skelet worden alleen de open, niet lege verzamelingen beschouwd. Om nu het skelet van H. Blum, ook wel medial axis geheten, in formule weer te geven, moeten er een groot aantal verzamelingen en punten gedefinieerd worden. Dit doe ik hier niet, maar de definities zijn te vinden op blz. 381 en 382 van Serra. Het verband tussen $S(X)$ en $\text{Me}(X)$ wordt weergegeven door de volgende twee eigenschappen:

- $\text{Me}(X) \subset S(X)$
- $(\text{Me}(X))^{\circ} = (S(X))^{\circ}$

Hieruit blijkt dat de skeletten, op enkele punten na, identiek zijn.

De twee skeletten zijn invariant onder translatie en schaalverandering, en ze zijn semi-continu [blz.387, Serra]. Ze voldoen echter niet aan het principe van de lokale kennis, waardoor het géén morfologische transformaties zijn.

Bij het digitaliseren van de skelet-transformatie ontstaan grote problemen.

Een eerste voor de hand liggende mogelijkheid om het skelet te digitaliseren is natuurlijk het vervangen van de bollen door een vierkant, octagon of hexagon, waarna deze continue vlakken benaderd worden door ze in een grid van punten te plaatsen. Hierdoor ontstaan echter allerlei fouten [zie blz 388, Serra]. Een tweede mogelijkheid is om met behulp van erosies en dilaties de digitale versie van het skelet te bepalen. Neem hiervoor B als structureel basiselement (zie tekening 2.4.2).

Dan kan de digitale versie van 2.6.4 t/m 2.6.6 als volgt beschreven worden:

- $s_n(X) = (X \ominus nB) \setminus (X \ominus nB)_B$
- $S(X) = \bigcup_n s_n(X)$
- $X = \bigcup_n s_n(X) \oplus nB \quad n=0,1,2,\dots$

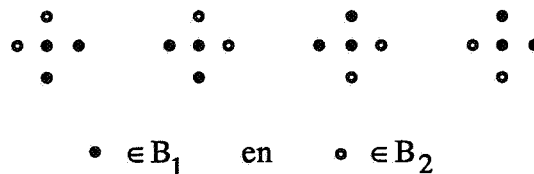
Een nadeel van deze constructie is, dat als X samenhangend is, $S(X)$ dit niet hoeft te zijn. Aangezien dit een eigenschap is, waarvoor je het skelet juist zou willen gebruiken, wordt ook deze vorm niet vaak gebruikt. Alleen voor de codering van beelden, bij opslag, is hij zeer bruikbaar.

Een derde mogelijkheid om een skelet te bepalen is met behulp van verdunning (zie def.2.3.6). In plaats van verdunning met één structurerend element B , wordt een rij structurerende elementen $\{B^i\}$ gebruikt.

$$\text{Def.2.6.11} \quad X \circ \{B^i\} = (\dots((X \circ B^1) \circ B^2) \dots \circ B^i \dots)$$

Door voor de rij $\{B^i\} = \{(B^1_1, B^1_2)\}$, $i=1,2,3,4$ de elementen te nemen zoals ze staan afgebeeld in tekening 2.6.2, wordt er bij elke verdunning met $\{B^i\}$ van alle kanten van de verzameling X een laagje afgeschraapt. Passen we een verdunning toe met een oneindige rij $\{B^i\}$, met B^i van dezelfde vorm maar wel steeds een kwartslag gedraaid, dan geldt voor een eindige verzameling X dat er na een eindig aantal stappen een "vast" resultaat is behaald. Dat wil zeggen dat de verzameling bij nog

verder verdunnen niet meer verandert. Het dan behaalde resultaat is een soort skelet. De tekeningen 16 t/m 23 in appendix A geven enkele voorbeelden van zulke skeletten.



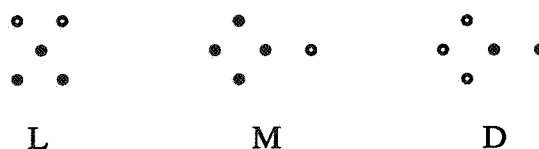
tekening 2.6.2

Het is afhankelijk van de vorm van het structurerend element, aan welke specifieke eigenschappen het skelet voldoet. Hierdoor is de keuze van het structurerend element afhankelijk van waar het skelet voor nodig is. Serra geeft voor het hexagonale rooster een aantal structurerende elementen, bevat in het basis structurerend element, die alleen voor een bepaald specifiek skelet gebruikt kunnen worden. Deze elementen vormen gezamenlijk het Golay-alphabet [14]. Voordeel van de manier waarop Serra de skeletten bouwt is, dat het zeer snel uitgevoerd kan worden op de computer. Dit komt omdat er niet voor elk punt dat weggehaald wordt voorwaarden gesteld worden, zoals bij Hilditch [26] het geval is.

De voorwaarden waaraan het digitale skelet, $S(X)$, eigenlijk moet voldoen worden:

1. De samenhang van $S(X)$ moet gelijk zijn aan die van X .
2. $S(X)$ moet een lijn van dikte 1 zijn.
3. $S(X)$ moet in het midden van X liggen.
4. $S(X)$ moet gebaseerd zijn op een digitale afstand.

Deze voorwaarden zijn echter te veeleisend; ze vormen een contradictie. Neem namelijk een lijn met dikte 2. Het skelet heeft dan of dikte 2, of ligt niet in het midden. Serra laat als oplossing de derde voorwaarde vervallen. De eerste en de vierde eis blijven bestaan, en de tweede eis wordt slechts aan het eind van de transformatie gecontroleerd. De enige structurerende elementen uit het Golay-alphabet die voldoen aan de eerste eis, zijn de letters L, M en D (zie tekening 2.6.3)



tekening 2.6.3

Merk op dat het zeer belangrijk is, om eerst de ruis uit het beeld te verwijderen, voordat de skelet operatie wordt uitgevoerd. Als er zich namelijk in een verzameling X een achtergrondpixel bevindt, dan ontstaat er een heel ander skelet, dan wanneer dit er niet is. Dit geldt voor alle soorten skeletten. Vergelijk hiervoor tekening 20a met 20b.

3. TOEPASSINGEN OP DE COMPUTER

Natuurlijk heb ik ook bekeken hoe bepaalde morfologische transformaties met behulp van een computer op een beeldscherm uit te voeren zijn. Ik had de beschikking over een Olivetti p.c. met kleurenbeeldscherm, en als programmeertaal gwbasic. Het kleurenbeeldscherm had 16 verschillende kleuren, maar alleen in de tekst mode; in de grafische mode waren het er maar vier. Hierdoor waren de mogelijkheden voor grijswaardenplaatjes al aardig geslonken. Ik ben begonnen met het implementeren van de transformaties erosie en dilatie op binaire beelden. Voordat je ergens een transformatie op kan loslaten moet er een plaatje zijn. In de beeldverwerking wordt gebruik gemaakt van video-opnames of van scan-apparatuur, die een foto in bitvorm kunnen overzetten. Deze mogelijkheden had ik niet, dus er moest met behulp van gwbasic een tekening gemaakt worden. Gwbasic heeft bepaalde grafische statements die hiervoor gebruikt kunnen worden zoals:

```
line (begincoördinaat)-(eindcoördinaat),kleur,[B[F]]
circle (middelpuntcoördinaat),straal,kleur
pset (coördinaat),kleur
paint (coördinaat),kleur
```

Als de B in de statement line meegegeven wordt, dan wordt er een rechthoek tussen de coördinaten gegeven in plaats van een lijn. Wordt ook nog de F meegegeven, dan wordt deze rechthoek opgevuld met een kleur. Pset kleurt op de meegegeven coördinaat één pixel. Paint kleurt het vlak waarin de coördinaat zich bevindt en dat omgeven is door lijnen in dezelfde kleur. Met behulp van de randomfunctie rnd en de statement pset, kan ruis worden nagebootst:

```
for i=1 to 100: pset(int(rnd*50),int(rnd*50)),3: next i
```

De transformatie erosie is een locale transformatie. De nieuwe waarde van een pixel wordt berekend uit de waarden van een aantal omliggende pixels. De eerste manier waarop ik erosie heb geprogrammeerd was dan ook door het hele plaatje te doorlopen en van elk pixel apart de nieuwe waarde uit te rekenen. Dit kan gedaan worden door in een 'loop', van alle punten in een vastgestelde omgeving B_x , van x, te bekijken wat voor waarde ze hebben. Bij erosie kan met de loop gestopt worden als je een punt bent tegengekomen met waarde 0 (nieuwe waarde van x wordt 0) en bij dilatie kan gestopt worden als je een punt bent tegengekomen met waarde 1 (nieuwe waarde van x wordt 1). Op deze manier duurde een transformatie op een plaatje van 50 bij 50 pixels ruim een minuut. Dat was veel te lang om er leuke dingen mee te doen. Met behulp van de statements get en put uit gwbasic, kon ik de duur van de transformaties echter aanzienlijk versnellen. Deze statements werken als volgt:

```
get (linksbovencoördinaat)-(rechtsondercoördinaat),array
put (linksbovencoördinaat),array,string
```

Met get kan een plaatje van een beeldscherm worden opgepakt in een array. Met put kan het plaatje weer op het beeldscherm worden geplaatst. Aan put kan een string worden meegegeven, die de logische operatoren pset, preset, and, or en xor kan zijn. Is de string pset, dan wordt het plaatje op het beeldscherm geplaatst. Dat wat er nog staat, verdwijnt van het scherm. Geef je de operator preset mee, dan wordt het 'negatieve' plaatje neergezet. De operatoren and, or en xor

werken met wat er al op het beeldscherm staat volgens de tabellen in tekening 3.1. De transformatie erosie kan nu met behulp van de operator `and` gevormd worden, door het plaatje dat geërodeerd moet worden op te pakken met `get`. Daarna wordt het plaatje, volgens de vorm van het strukturerend element B , met de operator `and` over het oude plaatje heen geplaatst. Stel: N het aantal elementen van B ; BX de rij x -coördinaten van B en BY de rij y -coördinaten van B . Dan kan erosie als volgt geprogrammeerd worden:

```
get (0,0)-(49,49),plaatje
for k=1 to N
  put (BX(k),BY(k)),plaatje,and
next k
```

Voor de transformatie dilatie wordt de operator `or` genomen in plaats van `and`. Verder gaat deze analoog. Op deze manier duren de transformaties nog geen seconde, waardoor je snel verschillende transformaties achter elkaar kan toepassen.

<code>and</code>	0	1	2	3	<code>or</code>	0	1	2	3	<code>xor</code>	0	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	1	2	3
1	0	1	0	1	1	1	1	3	3	1	1	0	3	2
2	0	0	2	2	2	2	3	2	3	2	2	3	0	1
3	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	0

tekening 3.1

De pixels in grijswaarde beelden op de Olivetti kunnen de waarden 0, 1, 2 of 3 hebben. Wordt een grijswaarde beeld geërodeerd met B , dan wordt het minimum genomen van alle pixels die zich in de omgeving B_x van x bevinden (zie 2.5.7). Als we weer met behulp van de statements `get` en `put` deze operatie uit willen voeren, dan moeten we ook nu voor de erosie de operator `and` gebruiken. Deze werkt echter niet zoals we zouden willen. Bekijk in de tabel (1 `and` 2). Deze krijgt waarde 0, wat niet het minimum is van 1 en 2. Dit komt omdat er gewerkt wordt met de binaire vorm van de getallen, er wordt bit voor bit gekeken (01 `and` 10 wordt 00). Dit probleem geldt ook voor dilatie (bekijk de tabel van `or`). Door dit probleem valt weer een kleur af, waardoor je de kleuren 0, 1 en 3 overhoudt. Het verschil met binaire plaatjes is hierdoor zo klein geworden, dat ik geen plaatjes gemaakt heb met deze drie kleuren.

Een stelling van Serra [blz.56, Serra] is:

St.3.1 Elke stijgende transformatie ψ op $P(\mathbb{R}^n)$, die invariant is onder translatie, is een vereniging van erosies en een doorsnede van dilaties.

Deze stelling heeft als belangrijk gevolg dat alle stijgende morfologische transformaties opgebouwd zijn uit erosies (of dilaties). Alle morfologische transformaties die op de Olivetti geïmplementeerd moeten worden, kunnen dus op de één of andere manier met behulp van `get` en `put` gemaakt

worden. Er hoeft voor deze transformaties dus niet meer voor elk pixel apart bekeken te worden welke waarde het zal krijgen.

Het mediaanfilter voor binaire beelden (zie def. 2.3.10) is een morfologische transformatie, dus dit filter kan, volgens stelling 3.1, door middel van erosies en/of dilaties beschreven worden. Stel dat het structurerend element B van de vorm is als in tekening 1c, dus van grootte vijf. Stel verder dat A_1 een structurerend element is van drie pixels en dat bevat is in B . Er zijn dan 10 verschillende A_i 's. Een pixel x krijgt bij het mediaanfilter de waarde 1 als er minstens drie pixels in B_x zijn, die waarde 1 hebben. Als er zo'n drietal is, dan zit deze tussen de A_i 's; zeg het is A_j . De erosie van X met A_j geeft dan de waarde 1 aan pixel x , en bij het verenigen met de overige $(X \ominus A_i)$'s, blijft de waarde van x 1. Zijn er echter geen drie pixels met waarde 1 in B_x , dan krijgt x bij alle erosies van X met A_i de waarde 0. Door vereniging van alle $(X \ominus A_i)$'s blijft de waarde 0.

Conclusie: $\text{med}(X) = (X \ominus A_1) \cup (X \ominus A_2) \cup \dots \cup (X \ominus A_{10})$

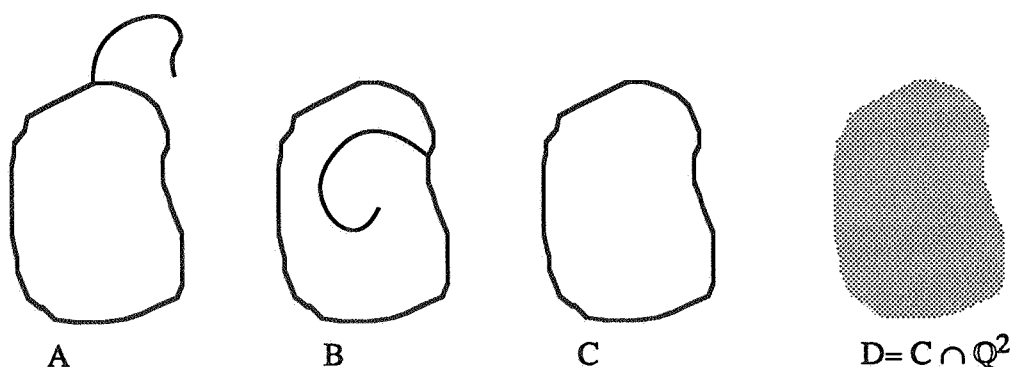
Ondanks het feit dat dit tien erosies en negen verenigingen zijn, gaat het berekenen van het mediaanfilter op deze manier een stuk sneller (ruim 1 seconde).

Alle overige plaatjes in Appendix A zijn ook op de Olivetti met behulp van put en get getekend.

4. EEN NIEUWE EQUIVALENTIE RELATIE

Serra gebruikt alleen gesloten verzamelingen voor zijn bewerkingen in de continue ruimte. Dit is hij gedwongen te doen, omdat hij volgens de Mathematische Morfologie werkt. Deze theorie heeft als vierde eis, dat alle transformaties en operaties die toegepast worden semi-continu zijn, en de semi-continuïteit gaat weer uit van de ruimte van gesloten verzamelingen (of van de ruimte van open verzamelingen). Door alleen met gesloten verzamelingen te werken, worden veel verzamelingen uitgesloten, en een heel belangrijke eigenschap, de dualiteit van transformaties, bestaat niet meer. Serra heft het probleem van het uitsluiten van verzamelingen op door alle transformaties op de afsluiting van een verzameling te nemen in plaats van op de verzameling zelf. Hij voert dus in feite een equivalentie relatie in, waarbij twee verzamelingen equivalent zijn, als hun afsluiting gelijk is. Het probleem van de dualiteit blijft echter bestaan. Bovendien geldt niet dat als twee verzamelingen equivalent zijn, hun complementen ook equivalent zijn. Dit laatste kan voorkomen worden door alleen naar verzamelingen te kijken waarvoor dit wel geldt. Hiervoor voer je gladde, reguliere verzamelingen in. Een reguliere verzameling bij Serra is een kompakte verzameling X , waarvoor geldt: $\exists r > 0$ zodat $X = X^{rB} = X_{rB}$ [blz.144, Serra]. Hiermee worden echter nog meer verzamelingen uitgesloten. Bekijk hiervoor de vier voorbeelden in tekening 4.1. Alleen de verzamelingen B en C zitten volgens de definitie van equivalentie van Serra in dezelfde equivalentie klasse. De overige zijn niet equivalent aan elkaar. Bovendien is bij hem alleen de verzameling C regulier. De overige verzamelingen worden dus uitgesloten.

Bekijkt men echter vanuit de beeldverwerking naar een verzameling in de continue ruimte, dan heeft men in het achterhoofd de gedigitaliseerde versie van die verzameling. Dit betekent dat het er niet toe doet of de rand er wel of niet bij hoort. Een punt in de wiskundige zin van het woord bestaat dan niet, evenmin als een wiskundige lijn.



tekening 4.1

We willen verzamelingen zoals A, B en C dus in dezelfde equivalentie klasse stoppen, en om de dualiteit te behouden, willen we ook dat hun complementen in eenzelfde klasse zitten. Hier wordt aan voldaan wanneer we stellen: $X \cong Y \Leftrightarrow X^0 = Y^0$, waarbij X^0 het inwendige en X^- de afsluiting van X voorstelt. (Zie Appendix B)

A, B en C zijn in dat geval equivalent aan elkaar, evenals hun complementen. De vierde verzameling vormt echter een probleem. D is namelijk equivalent aan de lege verzameling; maar het complement van D beperkt tot C ($= C \cap (C \setminus Q^2)$) is niet equivalent aan het complement van $\emptyset$ beperkt tot C ($= D$). Als we de definitie van equivalentie symmetrisch maken, door ook $X^{-0} = Y^{-0}$ te eisen, dan wordt dit probleem opgeheven, omdat dan D niet meer equivalent is met de lege verzameling. Er ontstaan echter later in de opbouw problemen met D. Om dit te voorkomen gaan we verzamelingen zoals D uitsluiten, door alleen reguliere verzamelingen te beschouwen. Het begrip regulier wordt hiervoor opnieuw gedefinieerd, waarbij verzamelingen zoals D niet regulier zijn, en verzamelingen zoals A, B en C wel.

Def.4.1 De *equivalentie* van twee verzamelingen X en Y ($X \equiv Y$) wordt als volgt gedefinieerd:

$$X \equiv Y \Leftrightarrow X^{0-} = Y^{0-} \wedge X^{-0} = Y^{-0}.$$

Def.4.2 De *equivalentie klasse* van een verzameling X is:

$$\underline{X} = \{ Y \in P \mid Y \equiv X \}.$$

Def.4.3 De klasse van reguliere verzamelingen noemen we R.

Een verzameling X is *regulier* als hij equivalent is aan zijn afsluiting:

$$R = \{ X \in P \mid X \equiv X^- \}.$$

St.4.4 Als er één verzameling uit een equivalentie klasse regulier is, dan zijn alle verzamelingen uit die equivalentie klasse regulier; het is een reguliere equivalentie klasse:

$$X \in R \wedge Y \equiv X \Rightarrow Y \in R$$

$$\text{bewijs: } X \in R \Rightarrow X^- \equiv X \Rightarrow X^{-0-} = X^{0-} \wedge X^{-0-} = X^{-0} \Rightarrow X^{-0-} = X^{0-}$$

$$Y \equiv X \Rightarrow X^{0-} = Y^{0-} \wedge X^{-0} = Y^{-0}$$

$$\text{Uit deze twee regels volgt: } X^{-0-} = Y^{0-} \wedge X^{-0-} = Y^{-0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y^{-0-} = X^{0-} = Y^{0-} \Rightarrow Y^- \equiv Y \Rightarrow Y \in R$$

q.e.d.

L.4.5 De afsluiting van het inwendige van een verzameling X is gelijk aan de vereniging van de afsluiting van alle open verzamelingen die in X bevat zijn:

$$X^{0-} = \cup \{ O^- \mid O \subset X, O \text{ open} \}$$

bewijs: " $\subset$ ": Neem $O = X^0$. Dan is O open en bevat in X, dus

$$X^{0-} = O^- \subset \cup \{ O^- \mid O \subset X, O \text{ open} \}$$

" $\supset$ ": Kies x willekeurig uit $\cup \{ O^- \mid O \subset X, O \text{ open} \}$.

Dan is er een $O \subset X$, open met $x \in O^-$.

Er geldt: $O \subset X \Rightarrow O \subset X^0 \Rightarrow O^- \subset X^{0-}$, dus $x \in X^{0-}$ q.e.d.

L.4.6 De afsluiting van het inwendige nemen is idempotent:

$$X^{0-0-} = X^{0-}$$

bewijs: " $\subset$ ": $X^{0-} \subset X^{0-} \Rightarrow X^{0-0-} \subset X^{0-} \Rightarrow X^{0-0-} \subset X^{0--} = X^{0-}$

" $\supset$ ": $X^0 \subset X^{0-} \Rightarrow X^{00} = X^0 \subset X^{0-0-} \Rightarrow X^{0-} \subset X^{0-0-}$

q.e.d.

G.4.7 Evenzo is het inwendige van de afsluiting nemen idempotent:

$$X^{-0-0} = X^{-0}$$

bewijs: $X^{-0-0} = X^{cc-0-0} = X^{co-0-c} = X^{co-c} = X^{cc-0} = X^{-0}$

q.e.d.

St.4.8 $X^- \equiv X \Leftrightarrow X^0 \equiv X$

bewijs: " $\Rightarrow$ ": $X^- \equiv X \Rightarrow X^{-0-} = X^{0-} \Rightarrow X^{-0-0} = X^{0-0} \Rightarrow X^{-0} = X^{0-0} \Rightarrow X^0 \equiv X$

" $\Leftarrow$ ": $X^0 \equiv X \Rightarrow X^{0-0} = X^{-0} \Rightarrow X^{0-0-} = X^{-0-} \Rightarrow X^{0-} = X^{-0-} \Rightarrow X^- \equiv X$

q.e.d.

Opmerking: Uit stelling 4.8 volgt dat als een verzameling regulier is, z'n inwendige en afsluiting bevat zijn in de equivalentie klasse van die verzameling. Anderzijds geldt dat, als het inwendige van een verzameling in de equivalentie klasse van die verzameling zit, die verzameling regulier is. Evenzo voor de afsluiting.

St.4.9 Elke gesloten verzameling is regulier:

$$X \in F \Rightarrow X \in R$$

bewijs: $X \in F \Rightarrow X^- = X \Rightarrow X \equiv X^- \Rightarrow X \in R$.

q.e.d.

St.4.10 Elke open verzameling is regulier:

$$X \in G \Rightarrow X \in R$$

bewijs: $X \in G \Rightarrow X^0 = X \Rightarrow X \equiv X^0 \Rightarrow X \in R$.

q.e.d.

Opmerking: De bovenstaande twee stellingen geven aan dat alle open en gesloten verzamelingen regulier zijn. Bij het beperken tot de reguliere verzamelingen blijven er dus al meer verzamelingen over dan bij Serra het geval was. Het nemen van de afsluiting of van het inwendige van een verzameling, betekent het regulier maken van deze verzameling. De open en gesloten verzamelingen zijn echter niet de enige reguliere verzamelingen. Dit blijkt uit de volgende omschrijving van regulariteit:

St.4.11 Een verzameling X is regulier als het inwendige van zijn rand leeg is:

$$X \in R \Leftrightarrow (\delta X)^0 = \emptyset$$

bewijs: " $\Rightarrow$ ": Neem aan dat X regulier is. Stel dan: $x \in (\delta X)^0$. Dan geldt:

$$x \in (X^- \setminus X^0)^0 = X^{-0} \setminus X^{0-} \Rightarrow x \in X^{-0} \wedge x \notin X^{0-} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in X^{-0-} \wedge x \notin X^{0-} \Rightarrow X^{-0-} \neq X^{0-} \Rightarrow X \notin R.$$

Dit laatste is in tegenspraak met de aanname, dus het inwendige van de rand moet leeg zijn.

" $\Leftarrow$ ": Neem nu aan dat $(\delta X)^0 = \emptyset$. Dan geldt:

$$X^{-0} \setminus X^{0-} = \emptyset \Rightarrow X^{-0} \subset X^{0-} \Rightarrow X^{-0-} \subset X^{0--} = X^{0-}.$$

$$\text{Verder geldt: } X \subset X^- \Rightarrow X^0 \subset X^{-0} \Rightarrow X^{0-} \subset X^{-0-}.$$

Uit deze twee inclusies volgt dat $X^{-0-} = X^{0-}$, en dus dat X regulier is.

q.e.d.

Het volgende lemma is nodig in het bewijs van stelling 4.13.

L.4.12 A, B open $\Rightarrow (A \cap B)^- = (A \cap B)^-$

bewijs: Neem twee open verzamelingen A en B . Dan geldt:

$$"\supset": A \cap B \subset A \cap B^- \Rightarrow (A \cap B)^- \subset (A \cap B^-)^-.$$

" $\subset$ ": Neem een punt $x \in (A \cap B^-)^-$, willekeurig. Nu te bewijzen dat x raakpunt is van $A \cap B$, want dan geldt dat x in $(A \cap B)^-$ zit.

We weten al dat x raakpunt is van $A \cap B^-$, dat wil zeggen dat voor elke O , open om x geldt: $O \cap A \cap B^- \neq \emptyset$. Kies zo'n O , en neem een punt y uit $O \cap A \cap B^-$. Uit $y \in O \cap A$ volgt dat er een U open om y is, met $U \subset O \cap A$. Omdat y ook raakpunt is van B volgt dat $U \cap B \neq \emptyset$. Dus: $U \cap B \subset O \cap A \cap B \Rightarrow O \cap A \cap B \neq \emptyset$.

Conclusie: x is een raakpunt van $A \cap B$, en dus geldt: $x \in (A \cap B)^-$.

q.e.d.

Algemeen gelden de volgende twee gelijkheden: $(X \cup Y)^- = X^- \cup Y^-$ en $(X \cap Y)^0 = X^0 \cap Y^0$.

De onderstaande stelling voegt hier voor reguliere verzamelingen nog een gelijkheid aan toe:

St.4.13 $X, Y \in R \Rightarrow (X \cup Y)^0 = X^0 \cup Y^0$.

bewijs: Neem twee reguliere verzamelingen X en Y . Dan geldt:

$$"\supset": X^0 \cup Y^0 = (X^0 \cup Y^0)^- \subset (X \cup Y)^0.$$

" $\subset$ ": Kies $x \in (X \cup Y)^0 = \bigcup \{O^- \mid O \subset X \cup Y, O \text{ open}\}$.

Dan is er een O , open en bevat in $X \cup Y$ met $x \in O^-$.

Definieer twee open verzamelingen: $O_X = O \cap X^0$ en $O_Y = O \cap Y^0$.

Nu te bewijzen: $x \in (O_X)^- \cup (O_Y)^-$.

[want als $x \in (O_X)^-$, dan $\exists O' \subset X$, open met $x \in O'^-$, namelijk $O' = O_X$, en dus geldt: $x \in (O_X)^- \cup (O_Y)^-$.

Analoog voor $x \notin (O_X)^- \Rightarrow x \in (O_Y)^-$.]

Stel: $x \notin (O_X)^- \wedge x \notin (O_Y)^- \Rightarrow x \in ((O_X)^- \cup (O_Y)^-)^c$.

Dan is er een U , open met $x \in U \subset ((O_X)^- \cup (O_Y)^-)^c \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in U \wedge x \notin (O_X)^- \wedge x \notin (O_Y)^-$.

Definieer $V \equiv U \cap O$. V is open, en verder geldt voor V :

a) $V = U \cap O \subset O \subset X \cup Y \subset X^- \cup Y^-$.

b) $V \cap X^0 = U \cap O \cap X^0 \subset U \cap (O \cap X^0)^- = (U \cap O_X)^- = \emptyset$.

c) $V \cap Y^0 = \emptyset$. (analoog aan b)).

Uit a), b) en c) volgt dat $V \subset X^- \setminus X^0 \cup Y^- \setminus Y^0 = \delta X \cup \delta Y$.

Definiëer nu $V' \equiv V \setminus \delta Y$. Voor V' geldt:

$$V'^- = (V \setminus \delta Y)^- = (V \cap (\delta Y)^c)^- = (V \cap (\delta Y)^{c-})^- = (V \cap (\delta Y)^{0c})^- = \\ (V \cap (\emptyset)^c)^- = V'^- = (U \cap O)^- = (U \cap O)^-.$$

Omdat $x \in U$ en $x \in O^-$, geldt dat $x \in V'^-$, en dus is $V' \neq \emptyset$. (1).

[Stel namelijk $V' = \emptyset$, dan zou ook $V'^- = \emptyset$. Tegenspraak.]

Maar er geldt ook: $V' \subset \delta X \Rightarrow V'^0 = V' \subset (\delta X)^0 = \emptyset$. (2).

De uitspraken (1) en (2) zijn in tegenspraak met elkaar.

Conclusie: $x \in (O_X)^- \cup (O_Y)^-$.

q.e.d.

G.4.14 De vereniging van twee reguliere verzamelingen is weer regulier:

$$X, Y \in R \Rightarrow X \cup Y \in R$$

$$\text{bewijs: } (X \cup Y)^{-0-} = (X^- \cup Y^-)^{0-} = X^{-0-} \cup Y^{-0-} = X^{0-} \cup Y^{0-} = (X \cup Y)^{0-}.$$

q.e.d.

St.4.15 Het complement van een reguliere verzameling is weer regulier:

$$X \in R \Rightarrow X^c \in R$$

$$\text{bewijs: } X \in R \Rightarrow X^- \equiv X \Rightarrow X^{-0-} = X^{0-} \Rightarrow X^{-0-c} = X^{0-c} \Rightarrow X^{c0-0} = X^{c0-} \Rightarrow \\ \Rightarrow X^{c0} \equiv X^c \Rightarrow X^c \in R.$$

q.e.d.

G.4.16 De doorsnede van twee reguliere verzamelingen is weer regulier:

$$X, Y \in R \Rightarrow X \cap Y \in R$$

$$\text{bewijs: } X, Y \in R \Rightarrow X^c, Y^c \in R \Rightarrow X^c \cup Y^c \in R \Rightarrow (X \cap Y)^c \in R \Rightarrow X \cap Y \in R.$$

q.e.d.

Vanaf nu beschouwen we alleen reguliere verzamelingen. Hierboven hebben we gezien dat twee verzamelingen uit dezelfde equivalentie klasse als 'gelijk' worden beschouwd. We gaan daarom vanaf nu alleen met de equivalentie klassen van reguliere verzamelingen werken, in plaats van met de verzamelingen zelf. Daarvoor moeten we eerst definiëren wat het complement, de vereniging en de doorsnede van equivalentie klassen zijn.

Merk op dat niet voor alle verzamelingen deze operaties gedefinieerd zijn, maar slechts voor reguliere verzamelingen. Omdat we vanaf nu alleen met deze verder gaan werken, is het niet nodig om ook voor niet-reguliere verzamelingen de vereniging en de doorsnede te gaan definiëren.

Def.4.17 $(\underline{X})^c = (\underline{X^c})$
 $\underline{X} \cup \underline{Y} = \underline{X \cup Y}$ voor $X, Y \in R$
 $\underline{X} \cap \underline{Y} = \underline{X \cap Y}$ voor $X, Y \in R$

Dat dit goede definities zijn, volgt uit de volgende stelling:

St.4.18 De operaties uit defenitie 4.17 zijn onafhankelijk van de keuze van de representant.

bewijs: -Er geldt: $X \equiv Y \Leftrightarrow X^c \equiv Y^c$. Hieruit volgt dat, als X en Y in dezelfde equivalentie klasse zitten, hun komplementen ook in dezelfde equivalentie klasse zitten.

-Neem nu $X_1, X_2 \in \underline{X}$ en $Y_1, Y_2 \in \underline{Y}$. Dan geldt:

$$1) (X_1 \cup Y_1)^{0^-} = X_1^{0^-} \cup Y_1^{0^-} = X_2^{0^-} \cup Y_2^{0^-} = (X_2 \cup Y_2)^{0^-}.$$

$$2) (X_1 \cup Y_1)^{-0} = (X_1 \cup Y_1)^{0^-0} = (X_2 \cup Y_2)^{0^-0} = (X_2 \cup Y_2)^{-0}.$$

Uit 1) en 2) volgt dat $X_1 \cup Y_1$ en $X_2 \cup Y_2$ equivalent zijn aan elkaar, en dus zitten ze in dezelfde equivalentie klasse, namelijk in $\underline{X \cup Y}$.

-Voor de doorsnede volgt het bewijs uit het feit dat dit de duale is van de vereniging.

q.e.d.

Nu is het tijd om opnieuw erosie en dilatie te gaan definiëren. We doen dit met behulp van de oude definitie op de equivalentie klassen:

Def.4.19 De erosie van $\underline{X}$ met B is: $\underline{X} \oplus B = \underline{X^{0^-} \oplus B}$

De dualiteit op equivalentie klassen met betrekking tot het complement is:

Def.4.20 $\underline{X} \ominus B = (\underline{X^c} \oplus B)^c$

St.4.21 De dilatie van X met B is dan: $\underline{X} \ominus B = \underline{X^{-0} \ominus B}$

bewijs: $\underline{X} \ominus B = (\underline{X^c} \oplus B)^c = (\underline{X^{c0^-} \oplus B})^c = (\underline{X^{-0c} \oplus B})^c = \underline{X^{-0} \ominus B}$

q.e.d.

De transformaties zijn onafhankelijk van de uit de equivalentie klasse gekozen representant. Dit is eenvoudig in te zien, daar voor elke twee verzamelingen, X_1 en X_2 , uit dezelfde equivalentie klasse geldt dat $X_1^{0^-} = X_2^{0^-}$.

Met behulp van erosie en dilatie, en de operaties uit definitie 4.17 zijn de overige morfologische transformaties op equivalentie klassen te definiëren.

We hebben in dit hoofdstuk tot nu toe alleen met binaire beelden gewerkt. Nu moeten we deze theorie uitbreiden naar beelden met meer dan twee grijswaarden. We moeten dus gaan bepalen wanneer twee grijswaarden functies equivalent zijn, en wat een reguliere functie is. Net zoals bepaalde transformaties op functies gedefinieerd werden via hun nivo doorsneden, kunnen we ook equivalentie en regulariteit definiëren via diezelfde nivo doorsneden.

Def.4.22 De equivalentie van twee functies f en g wordt gedefinieerd door:

$$f \equiv g \Leftrightarrow \forall t: X_t(f) \equiv X_t(g)$$

Def.4.23 Een functie f is regulier als geldt:

$$f \in R \Leftrightarrow \forall t: X_t(f) \in R$$

Uit de volgende stelling blijkt dat alle semi-continue functies regulier zijn.

St.4.24 f is semi-continu $\Rightarrow f \in R$

bewijs: Als f s.c. is, dan is f u.s.c. of l.s.c.

Stel f is u.s.c. Dan geldt:

$$X_t(f) \in F \quad \forall t \Rightarrow X_t(f) \in R \quad \forall t \Rightarrow f \in R \quad (\text{via St.4.9})$$

Stel f is l.s.c. Dan geldt:

$$X_t(f) \in G \quad \forall t \Rightarrow X_t(f) \in R \quad \forall t \Rightarrow f \in R \quad (\text{via St.4.10})$$

q.e.d.

Het omgekeerde van stelling 4.24 geldt niet. Bekijk tekening 2.5.1.d. Deze functie is niet semi-continu, maar wel regulier. Een u.s.c. functie is te vergelijken met een gesloten verzameling. Van een willekeurige verzameling X kunnen we de afsluiting X^- nemen, dat wil zeggen de kleinste gesloten verzameling waar X in bevat is. Evenzo kunnen we voor een functie f een afsluiting f^- , en het inwendige f^0 definiëren met behulp van z'n nivo doorsneden:

Def.4.25 $X_t(f^-) = (X_t(f))^- \quad \forall t$ en $X_t(f^0) = (X_t(f))^0 \quad \forall t$

Met behulp van de volgende limieten kunnen $f^-(x)$ en $f^0(x)$ direkt berekend worden:

Def.4.26 $f(x+) = \lim_{y \downarrow x} f(y)$ en $f(x-) = \lim_{y \uparrow x} f(y)$

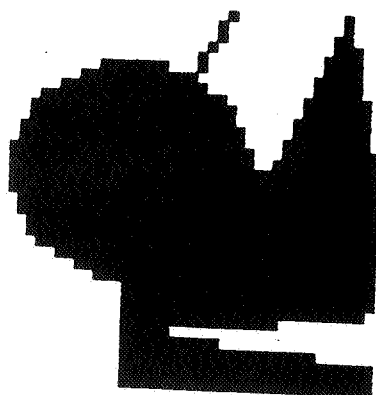
St.4.27 $f^-(x) = \max\{f(x+), f(x-)\}$ en $f^0(x) = \min\{f(x+), f(x-)\}$

Uit definitie 4.25 blijkt, dat bij het nemen van de afsluiting van een functie, alle nivo-doorsneden gesloten worden. Gevolg is dat alle functies op deze manier u.s.c. gemaakt worden. Analoog houdt het nemen van het inwendige van een functie in, dat deze l.s.c. gemaakt wordt.

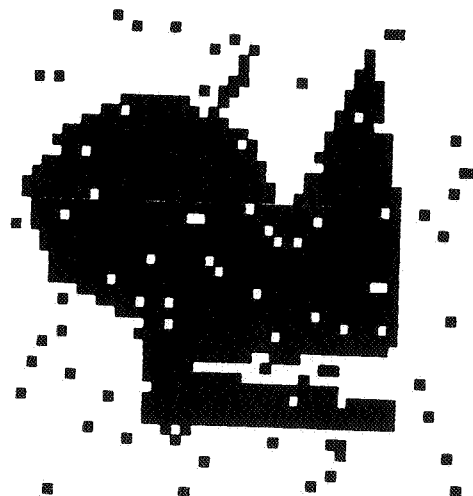
Als we nu in het vervolg, analoog aan verzamelingen, alleen de reguliere functies beschouwen, dan kan een vergelijkbare theorie opgebouwd worden voor reguliere functie-klassen in plaats van semi-continue functies.

Het is zeer wel denkbaar dat er een topologie op de ruimte van equivalentie-klassen gedefinieerd kan worden.

APPENDIX A



1a. De verzameling X



1b. X' , de verzameling X met ruis



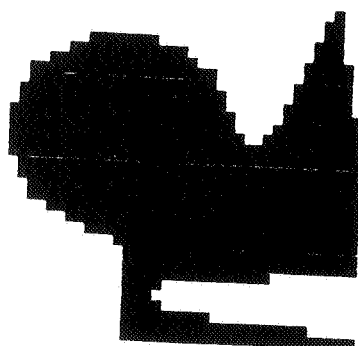
1c. Het structurerend element B



1d. B_1



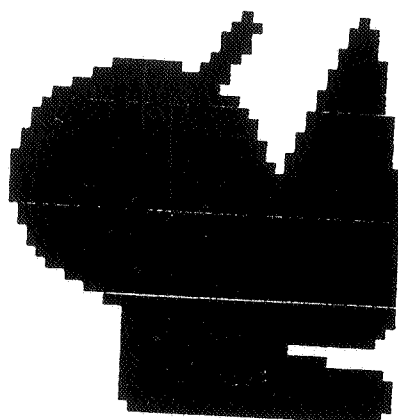
1e. B_2



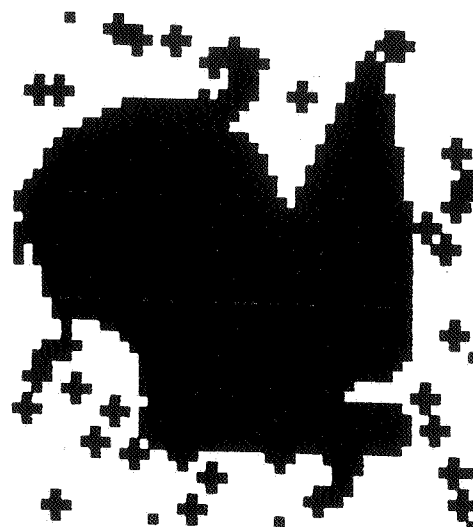
2a. $X \ominus B$



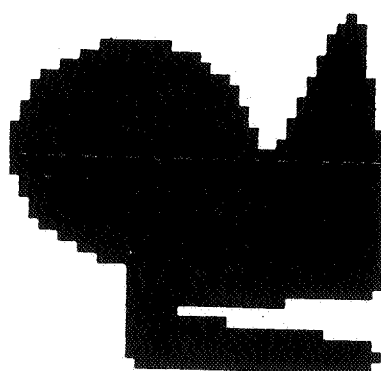
2b. $X' \ominus B$



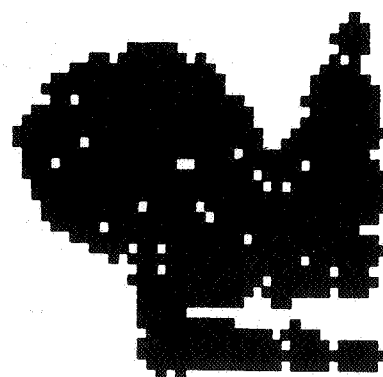
3a. $X \oplus B$



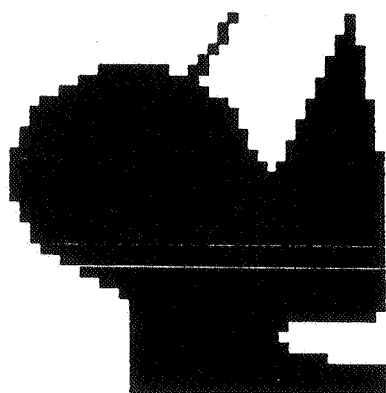
3b. $X' \oplus B$



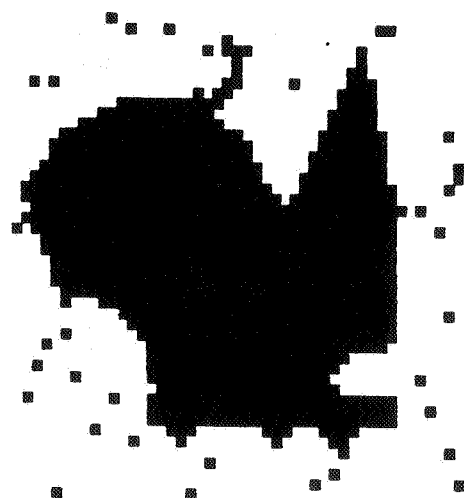
4a. $X_B = (X \ominus B) \oplus B$



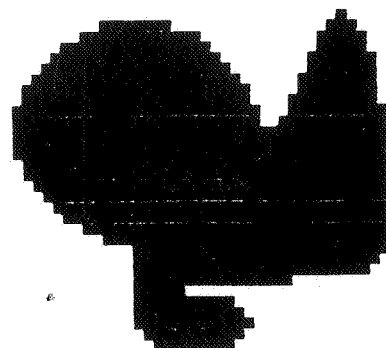
4b. $X'_B = (X' \ominus B) \oplus B$



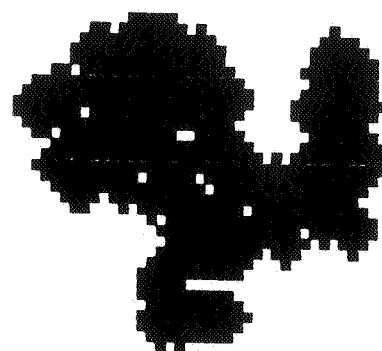
5a. $X^B = (X \oplus B) \ominus B$



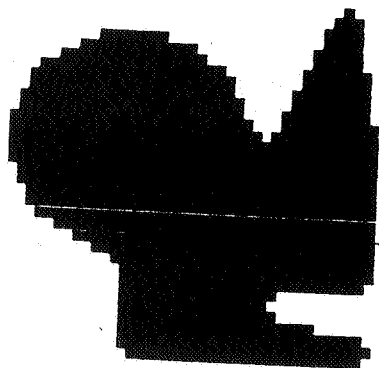
5b. $X'^B = (X' \oplus B) \ominus B$



6a. $(X \ominus 2B) \oplus 2B$



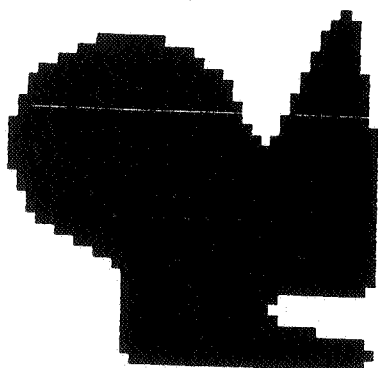
6b. $(X' \ominus 2B) \oplus 2B$



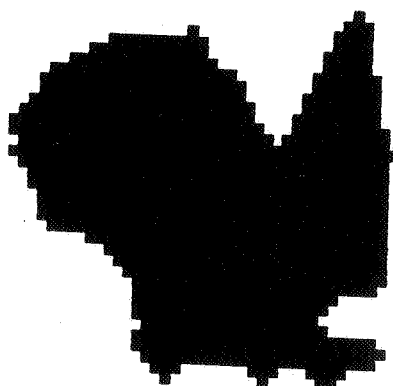
7a. $(X_B)^B$



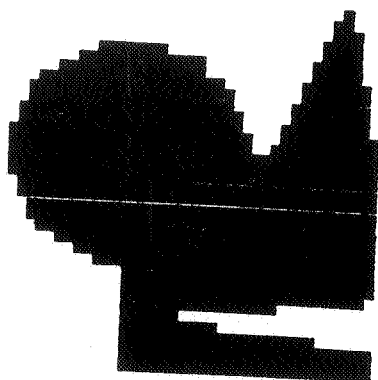
7b. $(X'_B)^B$



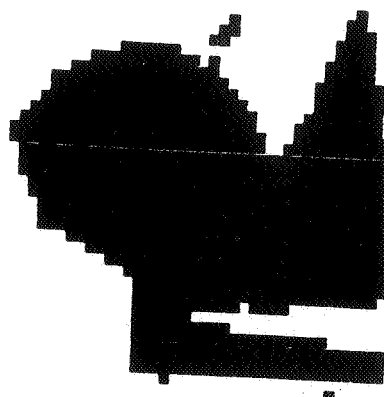
8a. $(X^B)_B$



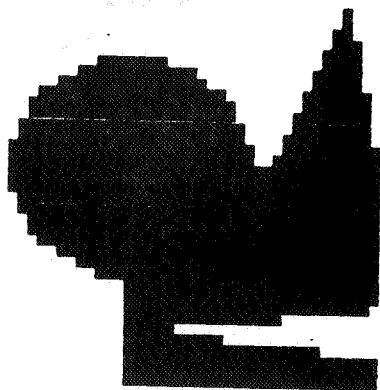
8b. $(X'^B)_B$



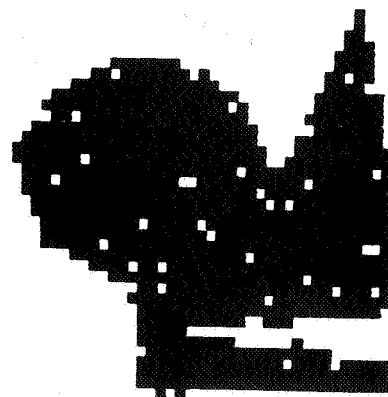
9a. mediaan filter op X



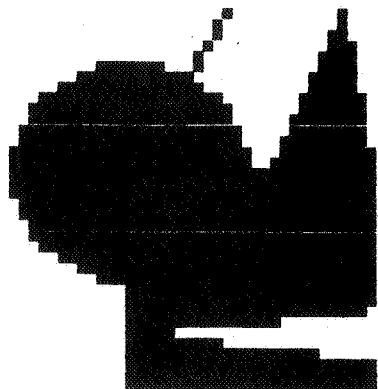
9b. mediaan filter op X'



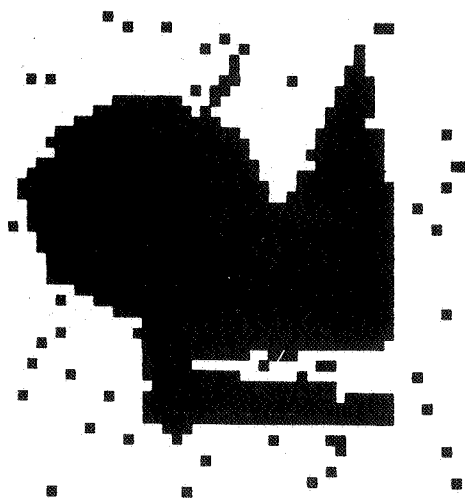
10a. Conditionele dilatie op $(X \ominus B) \oplus B$



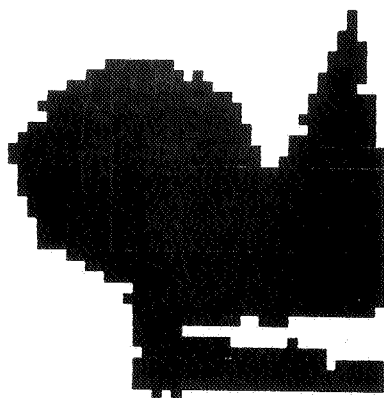
10b. Conditionele dilatie op $(X' \ominus B) \oplus B$



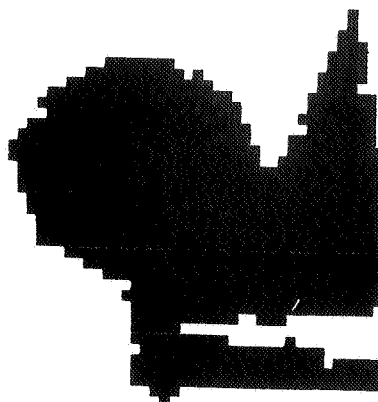
11a. Conditionele erosie op $(X \oplus B) \ominus B$



11b. Conditionele erosie op $(X' \oplus B) \ominus B$



12. Conditionele erosie op $(Y' \oplus B) \ominus B$ met Y' de conditionele dilatie op $(X' \ominus B) \oplus B$



13. Conditionele dilatie op $(Y' \ominus B) \oplus B$ met Y' de conditionele erosie op $(X' \oplus B) \ominus B$



13a. Hit or Miss Transformatie op X met (B_1, B_2)



13b. Hit or Miss Transformatie op X' met (B_1, B_2)



14a. Eénmalige verdunning op X met (B_1, B_2)



14b. Eénmalige verdunning op X' met (B_1, B_2)



15. De vier standen van (B_1, B_2)

■ pixel uit B_1 , met waarde 1

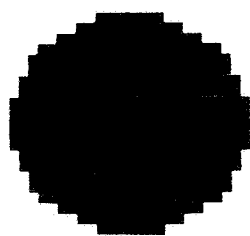
" pixel uit B_2 , met waarde 0



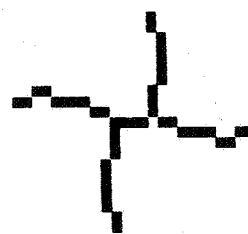
16a. Rechthoek



16b. Skelet van de rechthoek m.b.v. verdunning



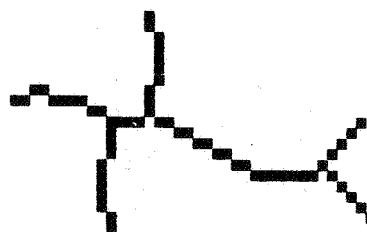
17a. Cirkel



17b. Skelet van de cirkel m.b.v. verdunning



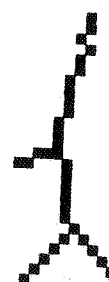
18a. Een verzameling Y



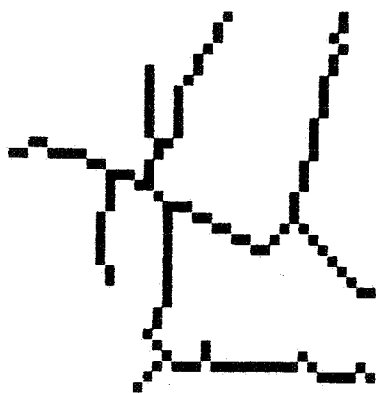
18b. Skelet van Y m.b.v. verdunning



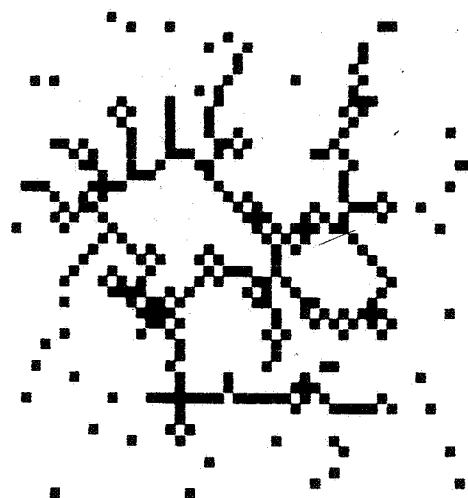
19a. Een verzameling Z



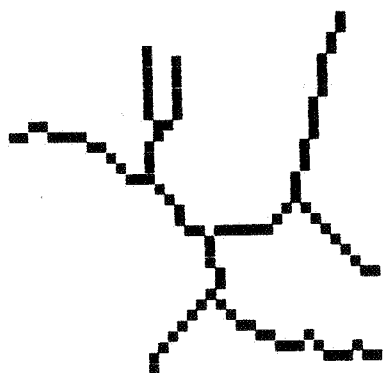
19b. Skelet van Z m.b.v. verdunning



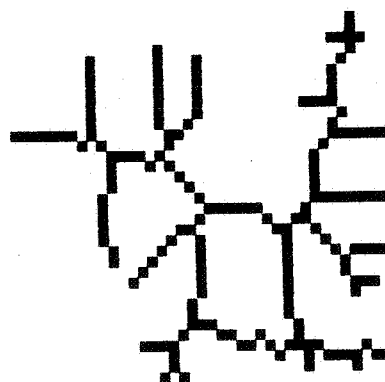
20a. Skelet van X m.b.v. verdunning



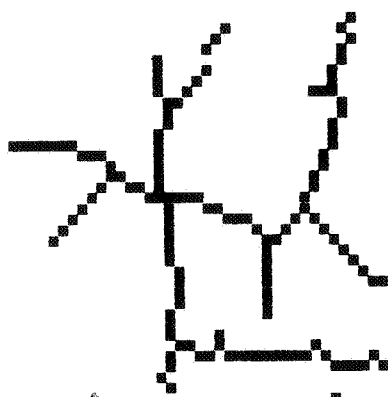
20b. Skelet van X' m.b.v. verdunning



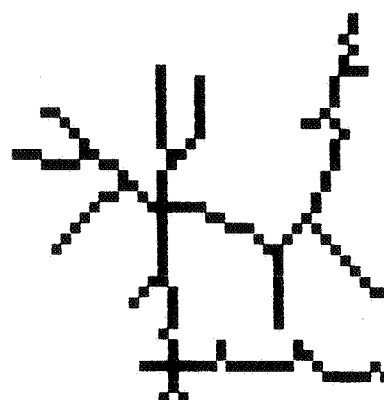
21a. Skelet van $(X_B)^B$ m.b.v. verdunning



21b. Skelet van $(X'_B)^B$ m.b.v. verdunning



22. Skelet van $\text{med}(X')$ m.b.v. verdunning



23. Skelet van Z' m.b.v. verdunning, met Z' de conditionele erosie op $(Y' \oplus B) \oplus B$ en Y' de conditionele dilatie op $(X' \ominus B) \ominus B$

APPENDIX B

NOTATIES

E	-topologische ruimte waarin gewerkt wordt.
$P(E)$	-de machtsverzamelingen van E .
$F(E)$	-verzameling van gesloten deelverzamelingen van E .
$K(E)$	-verzameling van kompakte deelverzamelingen van E .
$G(E)$	-verzameling van open deelverzamelingen van E .
X	-deelverzameling van E .
X_h	- X getransleerd over h : $\{x+h: x \in X\}$.
λX	- X vermenigvuldigd met λ : $\{\lambda x: x \in X\}$.
X^c	-complement van X : $\{x: x \notin X\}$.
X^-	- X getransponeerd: $\{-x: x \in X\}$.
$X^\wedge$	- X gespiegeld in x -as: $\{(x,t): (x,-t) \in X\}$
X^o	-inwendige van X .
X^-	-afsluiting van X .
δX	-rand van X : $X^- \setminus X^o$.

$f: P(E) \rightarrow P(E)$ is een stijgende funktie als geldt:

$$\forall X, Y \in P(E): X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y).$$

E is een separabele ruimte als geldt:

de topologie van E bezit een aftelbare basis.

E is een Hausdorff ruimte als geldt:

voor elk paar punten x, y van E met $x \neq y$ bestaan er twee disjunkte omgevingen van x en y .

E is een kompakte ruimte als geldt:

elke open overdekking van E heeft een eindige deelooverdekking.

E is een lokaal kompakte ruimte als geldt:

elk punt van E heeft een kompakte omgeving.

APPENDIX C

REFERENTIES

- [1] C. Arcelli, L.P. Cordella, S. Levialdi: *From local maxima to connected skeletons*; IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.PAMI-3, No.2, march 1981, (134-143)
- [2] C. Arcelli, G. Sanniti di Baja: *A width-independent fast thinning algorithm*; IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.PAMI-7, No.4, july 1985, (463-474)
- [3] R. van den Boomgaard: *Beschrijving en bewerking van binaire beelden*; TH Delft, 1985
- [4] G. Borgefors: *Distance transformations in arbitrary dimensions*; Computer Vision, Graphics and Image Processing 27, 1984, (312-345)
- [5] G. Borgefors: *On hierarchical edge matching in digital images using distance transformations*; Dissertation, Zweden, april 1986
- [6] G. Borgefors: *Distance transformations in digital images*; Computer Vision, Graphics and Image Processing 34, 1986, (344-371)
- [7] E.R. Davies, A.P.N. Plummer: *Thinning algorithms: a critique and a new methodology*; Pattern Recognition, Vol14, Nos.1-6, 1981, (53-63)
- [8] E.S. Deutsch: *Thinning algorithms on rectangular, hexagonal, and triangular arrays*; Communications of the ACM, Vol.15, No.9, september 1972, (827-837)
- [9] L. Dorst, A.W.M. Smeulders: *Length estimators compared*; Pattern Recognition in Practice II, 1986, (73-80)
- [10] A. Favre, H.J. Keller: *Parallel syntactic thinning by recoding of binary pictures*; Computer vision, and image processing 23, 1983, (99-112)
- [11] G. Gerritse: *Mathematische morfologie à la Serra 2: grijswaarden*; Colloquium Beeldverwerking CWI
- [12] G. Gerritse: *Over de Hit or Miss topologie (hoofdstuk III, Serra)*; Werkgroep beeldverwerking CWI, 1986
- [13] V. Goetlicherian: *From binary to grey tone image processing using fuzzy logic concepts*; Pattern Recognition Vol.12, 1980, (7-15)
- [14] M.J.E. Golay: *Hexagonal parallel pattern transformation*; IEEE Transactions on Computers, C-18, 1969, (733-740)
- [15] F.C.A. Groen, N.J. Foster: *A fast algorithm for cellular logic operations on sequential machines*; Pattern Recognition Letters 2, 1984, (333-338)

- [16] R.M. Haralick, S.R. Sternberg, X. Zhuang: *Grayscale Morphology*; Proceedings '86, Computer Vision and Pattern Recognition, Computer Society Press, Florida, (543-550), 1986
- [17] F. Harary, R.A. Melter, I. Tomescu: *Digital metrics: a graph-theoretical approach*; Pattern Recognition Letters 2, 1984, (159-163)
- [18] H.J.A.M. Heijmans: *Enkele aspecten van de mathematische morfologie à la Serra*; Colloquim Beeldverwerking CWI, 1986
- [19] T.S. Huang (ed.): *Two dimensional digital signal processing II; Transforms and Median filters*; Topics in Applied Physics Vol.43, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1981
- [20] R. Klette: *Parallel operations on binary images*; Computer Graphics and Image Processing 14, 1980, (145-158)
- [21] S. Levialdi: *On shrinking binary picture patterns*; Communications of the ACM, Vol.15, No.1, January 1972, (7-10)
- [22] S. Levin (ed.): *Geometrical probability and biological structures: Buffon's 200th anniversary*; proceeding, Paris 1977, Lecture notes in Biomathematics Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- [23] G. Matheron: *Random sets and integral geometry*, Wiley, New York, 1975
- [24] F. Meyer: *Automatic screening of cytological specimens*; Computer Vision, Graphics and Image Processing 35, 1986, (356-369)
- [25] R. van Munster, G. van Antwerpen: *Binaire omgevings operaties*; Colloquim Beeldverwerking CWI, 1986
- [26] N.J. Naccache, R. Shinghal: *An investigation into the skeletonization approach of Hilditch*; Pattern Recognition, Vol.17, No.3, 1984, (279-284)
- [27] F. Pasian, P. Santin: *Shape information extraction in noisy environments*; Pattern Recognition Letters 2, 1983, (109-116)
- [28] T. Pavlidis: *A thinning algorithm for discrete binary images*; Computer Graphics and Image Processing 13, 1980, (142-157)
- [29] J. Piper: *Efficient implementation of skeletonisation using interval coding*; Pattern Recognition Letters 3, 1985, (389-397)
- [30] C. Ronse: *Erosion of narrow image features by combination of local low rank and max filters*; 1986
- [31] A. Rosenfeld, A.C. Kak: *Digital picture processing*, Academic Press, New York, London, 1976
- [32] A. Rosenfeld, J.L. Pfaltz: *Sequential operations in digital picture processing*; Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.13, No.4, October 1966, (471-494)

- [33] J. Serra: *Image analysis and mathematical morphology*, Academic Press, New York, London, 1982
- [34] J. Serra: *Introduction to mathematical morphology*; Computer Vision, Graphics and Image Processing 35, 1986, (283-305)
- [35] M.M. Skolnick: *Application of morphological transformations to the analysis of two-dimensional electrophoretic cels of biological materials*; Computer Vision, Graphics and Image Processing 35, 1986, (306-332)
- [36] R. Stefanelli, A. Rosenfeld: *Some parallel thinning algorithms for digital pictures*; Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.18, No.2, april 1971, (255-264)
- [37] S.R. Sternberg: *Biomedical image processing*; Computer, Vol.16, No.1, 1983, (22-34)
- [38] S.R. Sternberg: *Grayscale Morphology*; Computer Vision, Graphics and Image Processing 35, 1986, (333-355)
- [39] F.M. Wahl: *A new distance mapping and its use for shape measurement on binary patterns*; Computer Vision, Graphics and Image Processing 23, 1983, (218-226)
- [40] M. Yamashita, T. Ibaraki: *Distances defined by neighborhood sequences*; Pattern Recognition, Vol.19, No.3, 1986, (237-246)
- [41] X. Zhuang, R.M. Haralick: *Morphological structuring element decomposition*; Computer Vision, Graphics and Image Processing 35, 1986, (370-382)