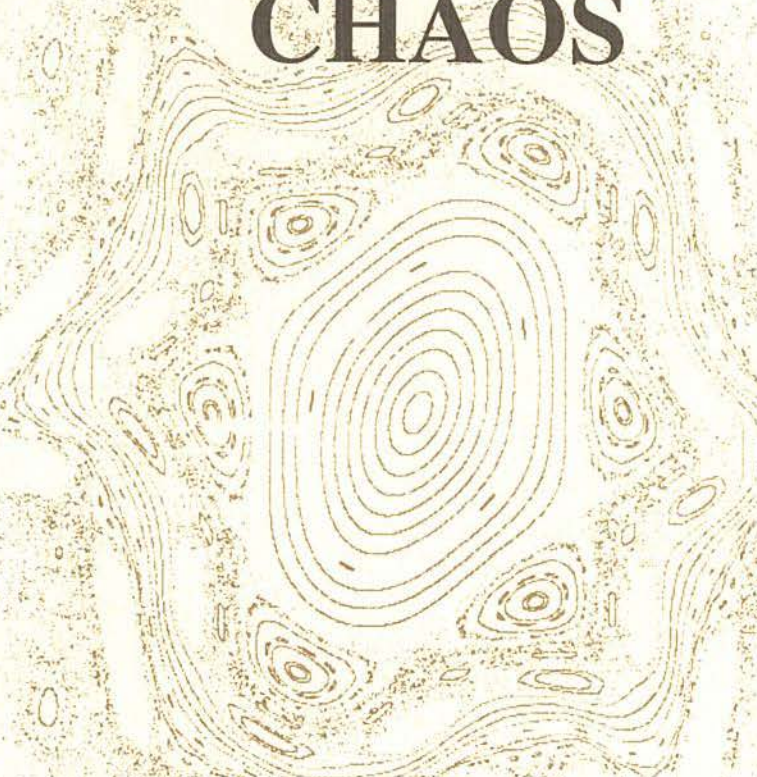


50ste Vakantiecursus

CHAOS



22/23 augustus 1996 in Eindhoven
30/31 augustus 1996 in Amsterdam

Stichting Mathematisch Centrum

ONDERWERPEN VAKANTIECURSUS 1946-1996

1946	Wiskunde / Didactiek van de wiskunde
1947	Topologie
1948	Cursus had betrekking op: grondslagen - problemen (i.s.m. Nederlandse Vereniging voor Logica)
1949	De Groepentheorie
1950	De waarschijnlijkheidsrekening, haar grondslagen en haar toepassingen
1951	De wiskunde in haar onderscheidene toepassingen
1952	De mechanica
1953	Diverse onderwerpen, die tezamen een groot gebied van de zuivere en toegepaste wiskunde besloegen
1954	Geen vakantiecursus i.v.m. Internationaal Mathematisch Congres
1955	Op verzoek van vereniging "WIMECOS" gewijd aan -het ontwerp- leerplan voor wiskunde 1954 bij het M.O.
1956	De wetenschappelijke grondslagen der Elementaire Wiskunde
1957	Historische en methodische aspecten van de Meetkunde
1958	De Algebra met haar Historische en Methodische aspecten
1959	De Vectoren
1960	Het wiskunde-onderwijs in het V.H.M.O. van morgen
1961	De moderne Algebra
1962	Rondom de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs bij het VHMO
1963	Topologie
1964	Toegepaste analyse
1965	Getallentheorie
1966	Zadelpuntsmethoden
1967	Besliskunde
1968	De geschiedenis van de Wiskunde tot omstreeks 1900
1969	Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek
1970	Computer en Onderwijs
1971	De ontwikkeling van de Wiskunde in de afgelopen 25 jaar
1972	Grafentheorie en haar toepassingen
1973	Abstracte informatica
1974	Algebraïsche vergelijkingen
1975	Discrete Wiskunde
1976	Functionaalanalyse
1977	Mathematische Logica (algorithmen en hun beperkingen)
1978	Meetkunde, van kunst tot kunde, vroeger en nu
1979	Nieuwe toepassingsgebieden van de wiskunde (econometrie, sociale wetenschappen, biomathematica en linguïstiek)
1980	Vertellingen over tellingen
1981	Oriëntatie op informatica
1982	Wiskunde in het vrije veld; Golfverschijnselen Cryptografie
1983	Complexe getallen
1984	Hewet-plus wiskunde
1985	Variatierekening
1986	Matrices
1987	De personal computer en de Wiskunde op school
1988	Differentie- en differentiaalvergelijkingen
1989	Wiskunde in de Gouden Eeuw
1990	Getaltheorie
1991	Meetkundige Structuren
1992	Systeemtheorie
1993	Het reële getal
1994	Computer-Algebra
1995	Kegelsneden en kwadratische vormen
1996	Chaos

Vakantiecursus 1996

voor leraren in de exacte vakken VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden

De vakantiecursus die de Stichting Mathematisch Centrum in 1996 organiseert heeft als thema:

Hoe de Chaos de Orde verstoort

Ook dit jaar betreft het een tweedaagse cursus, die zowel in Eindhoven als in Amsterdam wordt gehouden en wel op

donderdag 22 augustus en vrijdag 23 augustus 1996 in Eindhoven

in het bestuursgebouw van de Technische Universiteit Eindhoven (van Trier-Dorgelozaal), Den Dolech 2 te Eindhoven (**dus niet in het rekencentrum zoals vorige jaren !**) Hier is gelegenheid voor een gemeenschappelijke lunch op ieder van de cursusdagen. Indien men aan één of meer lunches wenst deel te nemen, dient men de hieraan verbonden kosten ($f\ 15, =$ per lunch) tezamen met het inschrijfgeld te voldoen.

en op

vrijdag 30 augustus en zaterdag 31 augustus 1996 in Amsterdam

in het CWI, Kruislaan 413 te Amsterdam.

Op vrijdag bestaat daar de mogelijkheid gemeenschappelijk een warme maaltijd te gebruiken ($f\ 20, =$), terwijl op zaterdag de mogelijkheid bestaat gemeenschappelijk te lunchen ($f\ 15, =$). Indien men aan één of beide maaltijden wenst deel te nemen, dient men de hieraan verbonden kosten tezamen met het inschrijfgeld te voldoen.

Aanmelding voor deelname aan de cursus kan geschieden door het aanmeldingsformulier achterin deze brochure in te vullen en vóór 15 augustus 1996 op te sturen aan het CWI.

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit.

Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar.

Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te vermelden.

Ten geleide

De vakantiecursus 1996 is wel een zeer bijzondere, immers de vijftigste in een reeks die in 1946 van start is gegaan. Om misverstand te voorkomen: het is inderdaad "wèl geteld" de vijftigste, doordat in 1954 - in verband met het International Congress of Mathematicians in Amsterdam in dat jaar - geen vakantiecursus gegeven is.

Het spreekt welhaast vanzelf dat in deze bijzondere cursus naast het hoofdthema - dit jaar de Chaostheorie - ook de geschiedenis van het instituut Vakantiecursus en de evolutie daarvan in de tijd de aandacht zal krijgen.

Daartoe is naast het gebruikelijke aantal voordrachten en het "oefenuurtje", extra plaats ingeruimd voor een beknopte beschouwing over de onderwerpen die zoal aan de orde zijn geweest en over de ontwikkeling tot de structuur die deze cursussen in de laatste jaren hebben gekregen.

Deze structuur laat zich als volgt karakteriseren: uitgangspunt is veelal een ontwikkeling die in het (vaak zelfs verre) verleden op gang kwam, waarna de effecten ervan in het heden het centrale onderwerp van de cursus vormen. Deze inleidende voordracht zal verzorgd worden door ondergetekende.

Met opzet is het bij een inleiding gelaten. Een vakantiecursus die geheel gewijd zou zijn aan beschouwingen over vakantiecursussen zou een "metacursus" zijn en dat is uiteraard niet de bedoeling.

Het eigenlijke thema is een begrip dat tegenwoordig zeer in de belangstelling staat: Chaos. Hierbij is ook nu weer de hierboven gesignaleerde structuur gekozen met allereerst drie voordrachten die ons naar het verleden verplaatsen.

De eerste daarvan is gewijd aan de werveltheorie van Descartes, wiens geboortjaar nu juist 400 jaar achter ons ligt. Volgens Descartes kan de natuur streng deterministisch verklaard worden uitgaande van wervelende stromen van stoffelijke deeltjes. Dr. J.A. van Ruler zal in zijn voordracht deze theorie uiteenzetten.

De volgende voordracht, die van Dr. C. de Pater, gaat in op de kritiek die Newton had ten aanzien van de theorieën van Descartes en schetst de leer die Newton daar tegenover stelde, een leer die vervat is in de beroemde *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Deze voordracht besluit met het wereldbeeld van Laplace, waarvan een strakke gedetermineerdheid en voorspelbaarheid van het universum de kern vormt.

Het derde paneel in dit drieluik is de voordracht van Prof.dr. H.W. Broer (in Eindhoven) en Prof.dr. F. Verhulst (in Amsterdam), die de twijfel schetst die in de 19e eeuw ontstond met betrekking tot de zekerheid van de voorafgaande eeuw. De centrale figuur is nu Henri Poincaré, die in 1889 met een verhandeling over het befaamde drielichamenprobleem, aantoonde dat - in tegenstelling tot de opvatting van Laplace - in een aantal gevallen sprake kan zijn van structurele onvoorspelbaarheid op langere termijn. Hier zou men de intree van het begrip Chaos kunnen plaatsen. Het zou echter duren tot de tweede helft van onze eeuw voordat dit begrip gestalte kreeg.

In de wiskunde is dit geen onbekende situatie. Er zijn vele voorbeelden van begrippen en theorieën die lang tot zeer lang gesluimerd hebben en eerst veel later op hun ware mérites

beoordeeld zijn. Dit moge een pleidooi zijn voor een wetenschappelijke bestudering van de geschiedenis van de wiskunde.

Na deze voorbereidingen die het begrip Chaos zijn plaats in de ontwikkelingen hebben gegeven, volgt de mathematische behandeling daarvan.

Allereerst is daar de voordracht van *Dr. I. Hoveijn*, die aan de hand van eenvoudige voorbeelden het begrip bifurcatie, vertakking, introduceert. Dit begrip speelt een rol bij systemen die van één of meer parameters afhangen en vertakkingen kunnen daarbij aanleiding geven tot onvoorspelbaar, zeg chaotisch, gedrag van het systeem. In de voordracht van *Dr. Hoveijn* worden deze begrippen met wiskundige zorgvuldigheid gedefinieerd.

Een belangrijk voorbeeld van bifurcatie en onvoorspelbaar gedrag is het onderwerp van de lezing van *Prof.dr. J. van de Craats*. Het gaat daarbij om een geschikt gekozen model voor de groei van een populatie - het zogenaamde logistische groeimodel - waarbij een zekere parameter optreedt. Aangetoond wordt hoe de waarde van deze parameter het verloop in de tijd bepaalt en eventueel tot een chaotische ontwikkeling kan leiden.

Aansluitend aan deze lezing is er - zoals gebruikelijk - gelegenheid voor drie kwartier "zelfwerkzaamheid" en wel onder supervisie van *Prof. Van de Craats*.

De voordracht van *Prof.dr. J.M. Aarts* legt het verband tussen de chaostheorie en de bekende fractals en leidt aan de hand van exponentiële functies tot verrassende inzichten en boeiende "plaatjes".

De slotvoordracht, die van *Dr.ir. F.M. Selten* is gewijd aan een verschijnsel dat bij velen wel geldt als het summum van chaos: het weer. Aan de hand van een model dat in 1963 door de beroemde wiskundige en meteoroloog Lorenz is opgesteld en dat één van de pijlers is waarop de chaostheorie steunt, gaat de spreker in op de mogelijkheden en onmogelijkheden van de voorspelling van het weer en daarmee zijn we gekomen aan het slot van een lange weg van Descartes tot heden.

Voor degenen die zich enigszins willen voorbereiden op deze cursus worden twee boeken vermeld die daarbij van nut kunnen zijn. In de eerste plaats het voortreffelijke, voor iedereen leesbare werk van *Broer, Van de Craats en Verhulst*, getiteld: "*Het einde van de voorspelbaarheid?*", een gezamenlijke uitgave van de uitgeverijen Aramith en Epsilon (Utrecht 1995). Daarnaast een boek dat een breder gebied bestrijkt en dieper op de wiskundige details ingaat: "*Dynamische systemen en Chaos*". Dit is een bundel bestaande uit tien verhandelingen van diverse auteurs, onder redactie van *H.W. Broer* en *F. Verhulst*. Deze bundel verscheen in 1992 bij de uitgeverij Epsilon in Utrecht.

Van harte hoopt de commissie aan wie de voorbereiding van deze vijftigste vakantiecursus werd toevertrouwd, dat de deelnemers daaraan veel genoeg zullen beleven en niet te zeer geschokt zullen zijn wanneer zij beseffen dat de kennis die de wiskunde verschaft, misschien niet zo gewis is als de naam zou doen vermoeden.

A.W. Grootendorst

Programma Eindhoven

22 en 23 augustus 1996

donderdag 22 augustus

- 10.00 - 11.00 Ontvangst, koffie
- 11.00 - 11.15 Inleiding
A.W. Grootendorst, TU Delft
- 11.15 - 12.00 De Werveltheorie van Descartes,
J.A. van Ruler, RU Groningen
- 12.00 - 12.15 Pauze
- 12.15 - 13.00 De Newtoniaanse kosmos,
C. de Pater, UvA Amsterdam, U Utrecht
- 13.00 - 14.00 Lunch
- 14.00 - 14.45 Poincaré,
H.W. Broer, RU Groningen
- 14.45 - 15.15 Pauze
- 15.15 - 16.00 Bifurcatie,
I. Hoveijn, RU Groningen

vrijdag 23 augustus

- 10.00 - 10.45 Symmetrie en Chaos,
J. van de Craats, UvA Amsterdam
- 10.45 - 11.15 Pauze
- 11.15 - 12.00 Oefeningen,
J. van de Craats
- 12.00 - 13.00 Lunch
- 13.00 - 13.45 Fractals
J.M. Aarts, TU Delft
- 13.45 - 14.15 Pauze
- 14.15 - 15.00 Chaos en het weer,
F.M. Selten, KNMI De Bilt
- 15.00 - 15.05 Sluiting

Programma Amsterdam

30 en 31 augustus 1996

vrijdag 30 augustus

- 15.00 - 15.30 Ontvangst, koffie
- 15.30 - 15.45 Inleiding
A.W. Grootendorst, TU Delft
- 15.45 - 16.30 De Werveltheorie van Descartes,
J.A. van Ruler, RU Groningen
- 16.30 - 16.45 Pauze
- 16.45 - 17.30 De Newtoniaanse kosmos,
C. de Pater, UvA Amsterdam, U Utrecht
- 17.30 - 18.30 Warme maaltijd
- 18.30 - 19.15 Poincaré,
F. Verhulst, U Utrecht
- 19.15 - 19.45 Pauze
- 19.45 - 20.30 Bifurcatie,
I. Hoveijn, RU Groningen

zaterdag 31 augustus

- 10.00 - 10.45 Symmetrie en Chaos,
J. van de Craats, UvA Amsterdam
- 10.45 - 11.15 Pauze
- 11.15 - 12.00 Oefeningen,
J. van de Craats
- 12.00 - 13.00 Lunch
- 13.00 - 13.45 Fractals
J.M. Aarts, TU Delft
- 13.45 - 14.15 Pauze
- 14.15 - 15.00 Chaos en het weer,
F.M. Selten, KNMI De Bilt
- 15.00 - 15.05 Sluiting

Inleiding

A.W. Grootendorst

Zoals reeds in het "Ten geleide" werd aangekondigd, zal in deze inleiding, waarvoor slechts een kwartier is uitgetrokken, een beknopt overzicht gegeven worden van de ontwikkeling van de vakantiecursus voor leraren. Dit houdt in dat de onderwerpen die in de loop van de jaren aan de orde zijn geweest de revue zullen passeren en dat gepoogd zal worden aan de hand daarvan een lijn van ontwikkeling te ontdekken. Ook zal ingegaan worden op de vraag wat nu eigenlijk de doelstelling van deze cursus is en in hoeverre daaraan in de loop van de tijd is beantwoord.

Uiteraard zal ook aandacht gegeven worden aan de initiatiefnemers en aan de sprekers uit het verleden, terwijl ook een aantal documenten uit de geschiedenis van de vakantiecursus (oude syllabi e.d.) ter inzage zal liggen.



René Descartes

De Werveltheorie van Descartes

J.A. van Ruler

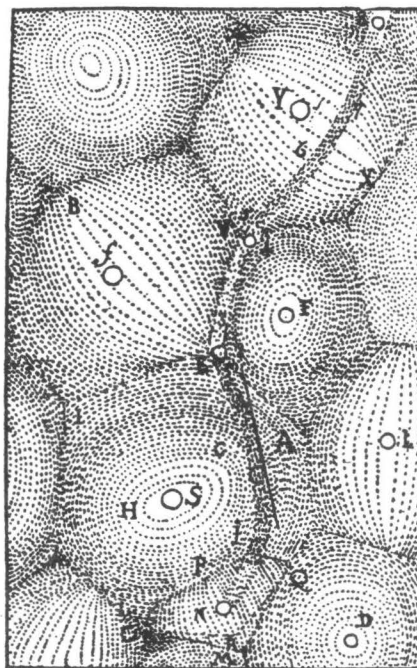
René Descartes werd precies 400 jaar geleden geboren in de vroegere Franse provincie Touraine. Een groot gedeelte van zijn leven bracht hij door in Nederland, waar hij zijn beroemde werken schreef. Hij trok van stad naar stad en leefde onder andere in Franeker, Amsterdam, Deventer, Utrecht en Leiden. Eind 1649 ging hij op uitnodiging van koningin Christina naar Zweden. Zijn verblijf in Stockholm werd hem noodlottig. Tegen zijn gewoonte in moest Descartes vroeg opstaan, want om half vijf 's ochtends stond de koets klaar om hem naar het paleis te brengen voor het onderwijs aan de koningin. Descartes liep daarbij een longontsteking op en stierf op 11 februari 1650.

René Descartes was een groot wiskundige, maar hij staat ook bekend als grondlegger van de moderne filosofie. Zijn stelling "Ik denk, dus ik ben", die het uitgangspunt vormt van zijn metafysische beschouwingen, is spreekwoordelijk geworden. Minder bekend is het feit dat Descartes' filosofische overpeinzingen nauw verband houden met het natuurwetenschappelijke project dat hij beschouwde als zijn levenswerk.

Descartes' natuurfilosofie staat nog veraf van onze tegenwoordige natuurkunde, al is het maar omdat wiskundige berekeningen er vrijwel in ontbreken.

Toch is de fysica van Descartes van grote invloed geweest op onze kijk op de natuur. Om natuurlijke processen te kunnen verklaren, ontwierp Descartes - met een verbeeldingskracht die ook de huidige lezer nog kan bekoren - een deterministisch model van de stoffelijke natuur. Centraal in zijn systeem staat het idee van de vortex, of "wervelstroom": een continue stroom van onzichtbaar kleine materiedeeltjes waarmee Descartes uiteenlopende verschijnselen trachtte te verklaren zoals magnetisme, zwaartekracht en eb en vloed.

In deze voordracht zal de vortextheorie met voorbeelden worden toegelicht. Ook zal er aandacht worden geschonken aan het vernieuwende aspect van Descartes' wereldbeeld en het belang ervan voor onze kijk op de natuur.



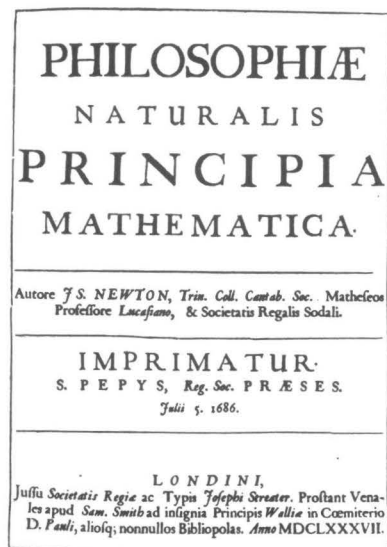
De Newtoniaanse kosmos

C. de Pater

De bekende wiskundige Joseph Lagrange placht te zeggen dat Newton het grootste wetenschappelijke genie was dat ooit bestaan had, maar hij voegde er wat spijtig aan toe dat de Brit het ook buitengewoon getroffen had, omdat men een wereldsysteem maar één keer in de geschiedenis ontdekt. De gedachte dat de newtoniaanse kosmos de definitieve waarheid onthulde over het heelal waarin wij leven, was in de achttiende en een groot deel van de negentiende eeuw wijd verbreid. In 1752 meende Euler dat, wanneer berekeningen op basis van Newtons gravitatie-theorie niet in overeenstemming waren met de waarnemingen, men eerder de berekeningen moest wantrouwen dan de theorie.



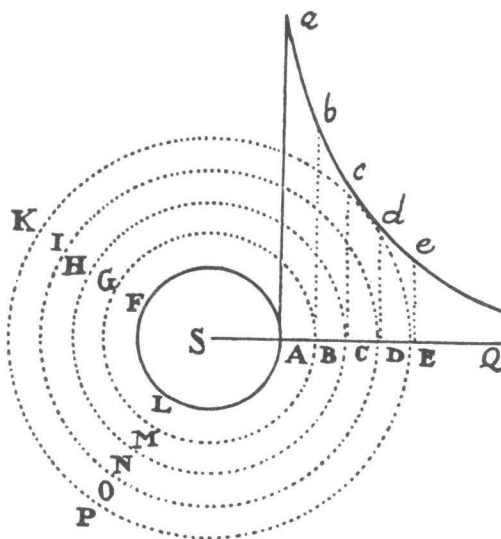
Sir Isaac Newton



In 1687 publiceerde Newton zijn *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, waarin de mechanica in euclidische trant axiomatisch behandeld werd. Als axioma's fungeren zijn drie beroemde bewegingswetten (waaronder de traagheidswet). Fundamenteel is het begrip 'kracht' in het algemeen en 'centrale kracht' in het bijzonder. In boek I van het werk creëert Newton een mathematisch wereldsysteem, met een dynamica waarin stellingen worden afgeleid over mathematische punten die bewegen in een weerstandsloze, driedimensionale euclidische ruimte volgens de gegeven axioma's en daaruit zuiver wiskundig afgeleide stellingen. Wel speelt de wereld van de verschijnselen op de achtergrond mee. Zo leidt hij bijvoorbeeld af dat, wanneer een punt onder invloed van een centrale kracht

een ellipsbaan beschrijft, deze kracht omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand. In boek III wordt de algemene theorie aan de hand van enkele 'redeneerregels' toegepast op het (reële) wereldsysteem en leidt Newton zijn gravitatiewet af, wellicht het hoofddoel van zijn werk.

In boek II worden (opnieuw mathematisch) een aantal gevallen behandeld van beweging in een weerstand biedend medium, maar dit onderdeel van de *Principia* dient tevens een ander belangrijk doel, namelijk een grondige weerlegging van de cartesiane werveltheorie. Newton toont aan dat deze theorie in strijd is met de derde wet van Kepler, die stelt dat de derde macht van de halve lange as van de door een planeet doorlopen ellips evenredig is met het kwadraat van de omlooptijd.



Newton's diagram in de Principia ter illustratie van zijn bewijs dat de cartesiane werveltheorie voor de planeetbeweging in strijd is met de derde wet van Kepler

In de achttiende eeuw vatte allerwege de gedachte post dat men met de gravitatiewet de grondwet van de kosmos ontdekt had. Tevens werd toen de basis gelegd voor een ongelimiteerd geloof in de waarde van de natuurwetenschappelijke methode voor alle mogelijke disciplines. Tot op de salontafels van de achttiende-eeuwse dames was dat merkbaar: in vele gevallen vond men daar Algarotti's al dan niet uit het Italiaans in het Frans of Nederlands vertaalde bestseller *Il Newtonianismo per le Dame* (1737). De achttiende-eeuwer leeft in een newtoniaanse kosmos, een wereld van orde en harmonie. Het is de kosmos waarvan God de Schepper en onderhouder is en waarin alles gehoorzaamt aan de door Hem opgelegde natuurwetten. God krijgt de trekken van een architect, wiskundige en ingenieur.

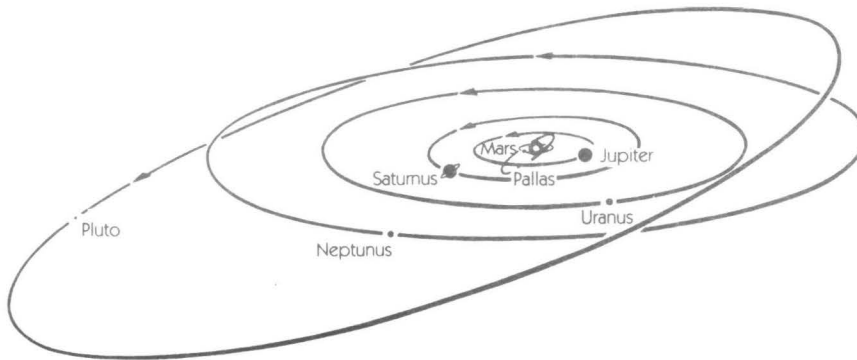
Newton verzette zich tegen de cartesiane gedachte dat botsingen tussen passieve materiedeeltjes een afdoende verklaring boden voor de natuurverschijnselen en voor de perma-

nente orde in de kosmos. In de slotbeschouwing van de *Principia* stelt hij dat het fraaie systeem van zon, planeten en manen, die allen in dezelfde richting en in hetzelfde vlak bewegen, alleen de creatie van een alwetend en almachtig God kan zijn. In Newtons visie is God permanent bij Zijn schepping betrokken, en wel door middel van 'actieve beginse-len', waarvan de gravitatie er een is. Door middel van de zwaartekracht houdt Hij de door Hem geschapen orde in stand. Zo plaatste Hij de vaste sterren op immense afstanden om te voorkomen dat de hemellichamen op elkaar zouden 'klappen' ten gevolge van de gravitatie. Er was voor God echter nog een andere taak: Newton was van mening dat God regelmatig het systeem moest regenereren, omdat geleidelijke toename van bepaalde onregelmatigheden een dergelijke ingreep noodzakelijk zouden maken.

Diverse problemen in de newtoniaanse kosmologie werden in de achttiende eeuw opgelost. Een van de hoogtepunten was de revolutionaire conclusie van Laplace (1789) dat de door Newton gesignaleerde storingen van het Jupiter-Saturnus systeem periodiek van aard waren en geheel te verklaren met behulp van de gravitatie-theorie. Voor Laplace is God een overbodige hypothese in de astronomie. De orde en de regelmaat van het systeem zijn intussen alleen maar toegenomen. De wereld van Laplace is een mechanistische wereld-machine waarin alles strikt gedetermineerd is. De huidige toestand van het universum is een direct gevolg van zijn vorige staat en de oorzaak van de toekomstige. Beroemd is de uitspraak van Laplace dat een intelligentie die alle gegevens over de aard van de krachten en de toestand van de lichamen in het heelal kende, heden en verleden van alles in het universum zou kennen. Bovendien stond, wat Laplace betreft, de stabiliteit van het heelal volledig vast. Na Laplace komen echter de vragen, o.a. bij Le Verrier en Poincaré: de blijvende stabiliteit van het universum lijkt principieel niet bewijsbaar.

Henri Poincaré

Ferdinand Verhulst



Het zonnestelsel met de buitenste planeten; binnen de Marsbaan bevinden zich de planeten Aarde, Venus en Mercurius. Behalve de aarde zijn er nog 6 planeten met manen. Verder zijn er grote zwermen asteroïden, kometen, meteoren en kleinere deeltjes. De asteroïde Pallas is in de figuur aangegeven; deze beweegt zich tussen de Mars- en de Jupiterbaan en heeft een diameter van circa 500 km.

In de loop van de negentiende eeuw was in Duitsland en Frankrijk een traditie ontstaan waarin men hoge eisen stelde aan wiskundig correcte formuleringen en redeneringen, ook bij de aanpak van toegepaste problemen. Men stelde zich niet meer tevreden met plausible redeneringen, maar verlangde strenge bewijzen. Tevens realiseerde men zich dat, na de successen van de mechanica in de 18e eeuw, het eigenlijk zeer merkwaardig was dat het Newtonse drielichamenprobleem in stricte zin nog steeds onopgelost was. Weliswaar kon men in concrete gevallen door numerieke methoden de banen van de lichamen voor een beperkt tijdsbestek berekenen, maar men was er nooit in geslaagd algemene formules voor de baankrommen te vinden waarmee plaats en snelheid op een willekeurig tijdstip voorspeld konden worden. In tegenstelling tot het tweelichamenprobleem bleek deze opgave buitengewoon moeilijk te zijn; de grootste geleerden hadden er hun tanden op stukgebeten. Dat inspireerde Weierstraß (1815-1897) in 1887 tot het formuleren van een opgave voor een prijsvraag die door koning Oscar II van Zweden werd uitgeschreven. In 1889 werd het essay van Henri Poincaré (1854-1912) bekroond, waarbij Weierstraß aantekende dat het drielichamenprobleem in zijn algemeenheid nog steeds niet opgelost was, maar dat Poincaré's resultaten zonder overdrijving baanbrekend konden worden genoemd, en dat hij de prijs dus toch ten volle verdiende.

Poincaré's antwoord betekende een breuk met de klassieke methoden waarbij min of meer expliciete oplossingen worden afgeleid in de vorm van wiskundige formules. Hij ontwikkelde methoden - topologische dynamica zeggen we nu - die pas in de tweede helft van

de 20e eeuw ten volle door de wetenschappelijke gemeenschap gebruikt gingen worden. In de jaren 1892-1899 vatte Poincaré zijn resultaten samen in drie boeken, de 'Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste'. Ze zijn nog altijd het bestuderen waard.

Naast zijn werk aan de differentiaalvergelijkingen van de dynamica heeft Poincaré een groot aantal andere wiskundige activiteiten ontplooid, die gekenmerkt worden door zowel breedheid als een indrukwekkende diepgang. We zullen deze activiteiten kort aanduiden. Een interessante vraag is hoe het werk van Poincaré, naast Hilbert de grootste wiskundige van zijn tijd, werd ontvangen. Welke inspiratie heeft het opgeleverd? Het zal blijken dat een deel van zijn werk onmiddellijk voortgezet werd, terwijl een belangrijk ander deel tot veel later heeft moeten wachten.

Bifurcaties

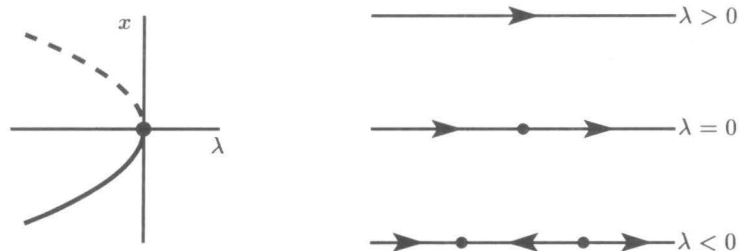
Igor Hoveijn

We spreken van een *dynamisch systeem* als de evolutie van iedere begintoestand uniek vastligt. Deze ontwikkeling in de tijd speelt zich af in de ruimte van alle mogelijke toestanden van het systeem, ook wel *faseruimte* genoemd. De eenvoudigst voorstelbare dynamische systemen zijn iteraties van afbeeldingen op de faseruimte $\mathbf{R}$, bijvoorbeeld:

$$x_{n+1} = f_\lambda(x_n) = x_n^2 + x_n + \lambda,$$

waarin n een geheel getal en x_0 een gegeven begintoestand is. Alhoewel dit type systemen er eenvoudig uitziet is de evolutie of *dynamica* dat in het algemeen helemaal niet. Bovendien bevat het hier gegeven systeem ook nog een parameter: we bekijken een familie van systemen. De waarde van de parameter kan, zo blijkt, de dynamica nog drastisch beïnvloeden. Daarmee komen we bij ons onderwerp: *bifurcaties*.

Laten we nu eerst eens naar eenvoudige dynamica zoeken, en wel die waarbij x_n een constante rij is. Dan is in het bijzonder $x_{n+1} = x_n$ ofwel we zoeken de oplossingen x van $f_\lambda(x) - x = 0$. We noemen deze de *vaste punten* van f_λ . In het gegeven voorbeeld zien we dan dat er voor $\lambda > 0$ geen oplossingen zijn, voor $\lambda = 0$ is er één: $x = 0$ en voor $\lambda < 0$ zijn er twee: $x = \pm\sqrt{-\lambda}$. Bij $\lambda = 0$ vindt er een kwalitatieve verandering plaats in de dynamica: het aantal vaste punten van f_λ verspringt, we noemen dit een *bifurcatie*. Omdat het over vaste punten gaat heet dit een *locale bifurcatie* en in ons voorbeeld gaat het in het bijzonder om een *zadel-knoop bifurcatie*. Om de naam te verklaren kijken we naar de dynamica in de buurt van een vast punt. Laat u een vast punt zijn. Uit de middelwaarde stelling volgt dan dat als $|f'_\lambda(u)| < 1$ de geïtereerden van een punt x dicht bij u naar u convergeren en als $|f'_\lambda(u)| > 1$ zij er juist van af gaan. In het eerste geval heet u stabiel of een knoop en in het tweede geval heet u instabiel of een zadel. In ons voorbeeld is het vaste punt met positieve x coördinaat een zadel en het andere een knoop. Precies op de bifurcatie is $f'_0(0) = 1$. Dit is schematisch samengevat in de figuur.



FIGUUR 1. Links staat de positie van de vaste punten uitgezet tegen de parameter λ . Op de getrokken tak liggen de stabiele en op de gestippelde de instabiele vaste punten. Rechts is de dynamica schematisch weergegeven voor verschillende waarden van λ , punten worden in de richting van de pijl afgebeeld.

We kunnen ons nu van alles afvragen. Kennelijk zijn waarden van λ waarbij voor het vaste punt u geldt $|f'_\lambda(u)| = 1$ kandidaten voor een lokale bifurcatie. Zojuist vonden we zo'n punt met $f'_\lambda(u) = 1$. Is er misschien ook een lokale bifurcatie als $f'_\lambda(u) = -1$? Ja, als we in ons voorbeeld λ verder laten afnemen vinden we bij $\lambda = -1$ een zogenaamde *periode verdubbels bifurcatie*, er takken twee punten af die door f_λ op elkaar afgebeeld worden. Hoeveel soorten bifurcaties zijn er eigenlijk? Is het iets bijzonders als er in een familie bifurcaties optreden? Wat gebeurt er als een familie meer dan één parameter bevat? En als de faseruimte nu eens meerdimensionaal is?

Wat is nu het nut van het bestuderen van bifurcaties? Veel verschijnselen in de natuur kunnen beschreven worden met een dynamisch systeem waarin één of meer parameters voorkomen. Het is dan belangrijk om te weten hoe het gedrag van dat systeem van die parameters afhangt. Bovendien kunnen bifurcaties aanleiding geven tot chaos, bijvoorbeeld via een reeks van periodeverdubbelingen, maar ook na één enkele bifurcatie. In het gegeven voorbeeld hebben we al twee bifurcaties gezien en er zijn er nog veel meer. Ruwweg levert dit het volgende op. De bifurcatiewaarden van de parameter λ delen de parameterruimte, $\mathbf{R}$ in dit geval, op in intervallen. Zoals de vaste en periodieke punten de dynamica in de faseruimte organiseren, zo verdelen de bifurcatiewaarden de parameter ruimte in gebieden met kwalitatief dezelfde dynamica.

Symmetrie en Chaos

J. van de Craats

Een eenvoudig model voor de groei van een populatie wordt gegeven door

$$p_{n+1} - p_n = r p_n \left(1 - \frac{p_n}{E}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Hierin stelt p_n de populatiegrootte voor op tijdstip n . Het linkerlid is de toename van de populatie in de n -de periode, r is een groeifactor en E is een zekere evenwichtswaarde: voor $p_n = E$ blijft de populatiegrootte ongewijzigd. Wanneer p_n nog klein is ten opzichte van E , is het rechterlid vrijwel gelijk aan $r p_n$, en dan groeit de populatie dus vrijwel exponentieel, maar als p_n in de buurt van E komt, zal de groei afnemen. Voor kleine waarden van de groeifactor r blijkt dit zg. *logistische groeimodel* precies het gedrag te vertonen dat men verwacht: een langzame stijging naar de evenwichtswaarde E . Maar voor r tussen 2 en 3 treden er verrassingen op: periodiek gedrag of zelfs volstrekt ordeloze fluctuaties. Dit is een schoolvoorbeeld van deterministische chaos.

Via een eenvoudige substitutie kan men het logistische groeimodel omvormen tot de eenvoudige iteratie

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

waarin nog slechts de ene parameter $a = 1 + r$ voorkomt. In dit model kan men x_n opvatten als een soort genormeerde populatiegrootte: in realistische situaties geldt steeds dat $0 < x_n < 1$.

Het gedrag van deze iteratie hangt af van de parameter a en van de startwaarde x_0 . Die afhankelijkheid van x_0 is in veel gevallen een voorbijgaand verschijnsel: op den duur dooft de invloed daarvan uit. De populatiegrootte gaat dan, afhankelijk van de waarde van a , òf naar een evenwichtswaarde toe, òf zich periodiek herhalen, òf ze blijft chaotisch fluctueren. Via een zg. *bifurcatiediagram* kan men hiervan een overzicht verkrijgen. Zo'n diagram laat zien hoe de *attractor* van het systeem, het geheel van toestanden waarnaar het op den duur zal tenderen, afhangt van de parameter a . Wordt de populatiegrootte uiteindelijk periodiek, dan zal de attractor bestaan uit een eindig aantal punten, maar bij chaotisch gedrag blijkt de attractor vaak een fractale structuur te hebben. Men spreekt dan, in navolging van Ruelle en Takens, van een *vreemde attractor*.

Het logistische groeimodel is een voorbeeld van het algemene iteratieschema

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

waarin de functie f meestal nog afhangt van een of meer parameters, die bepalend zijn voor de aard van de attractor. Zo'n attractor is altijd globaal invariant onder f . De punten ervan worden door f gepermuteerd, en in het algemeen zal de baan van een willekeurig startpunt x_0 zich langs de attractor gaan bewegen.

Opmerkelijk is dat symmetrieën in de functie f weerspiegeld worden in symmetrieën van de bijbehorende attractor. We illustreren dat eerst aan de hand van de iteratie

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n) (1 + x_n)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Hierin is dus $f(x) = a x (1 - x) (1 + x)$, en deze functie is symmetrisch ten opzichte van tekenwisseling van x : er geldt $f(-x) = -f(x)$. De attractor zal dus ook symmetrisch zijn onder tekenwisseling, en dat is onder andere in het bifurcatiediagram te zien.

Nog veel fraaiere resultaten verkrijgt men echter als men overgaat op complexe iteraties

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

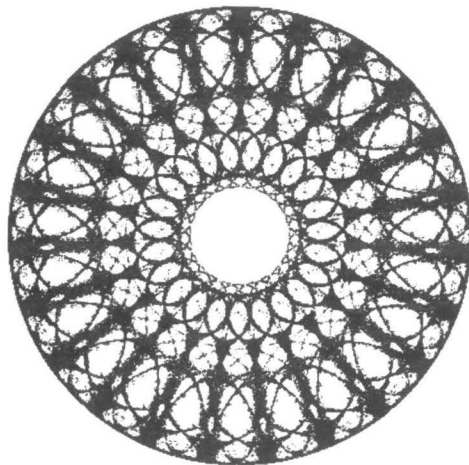
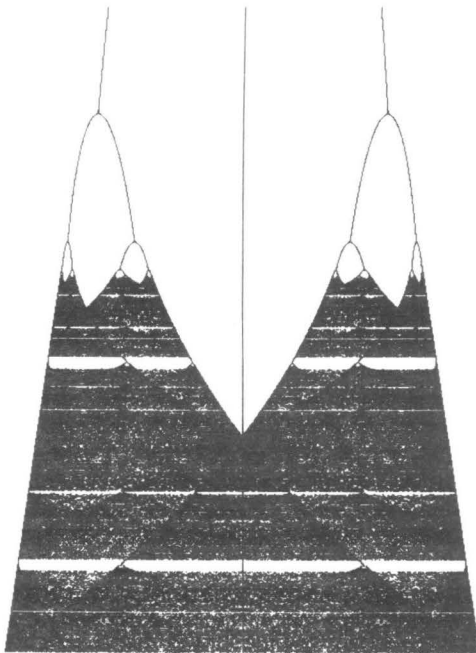
Door in de functie $F(z)$ symmetrieën in te bouwen van de vorm

$$F(e^{2\pi i/k} z) = e^{2\pi i/k} F(z)$$

verkrijgt men attractoren in het complexe vlak met k -voudige draaisymmetrie. Wanneer bovendien geldt dat

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$$

worden ook nog spiegelsymmetrieën toegevoegd, waardoor er roosvenster-achtige attractoren ontstaan die met behulp van eenvoudige programma's op het computerscherm kunnen worden vertoond. Tijdens de lezing zullen hiervan voorbeelden worden gegeven.



Chaos en Fractals, een voorbeeld

J.M. Aarts

Door het werk van MANDELBROT is de *complexe dynamica* in het centrum van de belangstelling komen te staan. De studie van het dynamisch gedrag van complexe functies is begonnen met het werk van JULIA en FATOU. Het gaat hierbij meestal om rationale functies. MANDELBROT heeft laten zien hoe de computer ingeschakeld kan worden om onze kennis van en ons inzicht in de complexe dynamica te vergroten. Er is een zeer gedetailleerd overzicht verkregen van de verschillende mogelijkheden die zich kunnen voordoen in het dynamisch gedrag in de familie van de kwadratische functies. Ondanks het feit dat het hier om eenvoudige functies gaat valt het op dat er een bijzonder grote variatie en rijke schakering in dynamisch gedrag is. Later is men gaan kijken in hoeverre deze studie ook kan worden uitgevoerd voor andere families van functies. In deze voordracht zullen we iets vertellen over het dynamisch gedrag van exponentiële functies. De pionier in dit gebied is DEVANEY. Het is opvallend dat de dynamica van de exponentiële functies in sommige opzichten eenvoudiger is dan die van de kwadratische functies. Dat is één van de redenen waarom ik juist dit voorbeeld ga bespreken.

We beginnen met het onderzoek van het dynamisch gedrag van de functie

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ gegeven door } f(z) = 0.3 e^z.$$

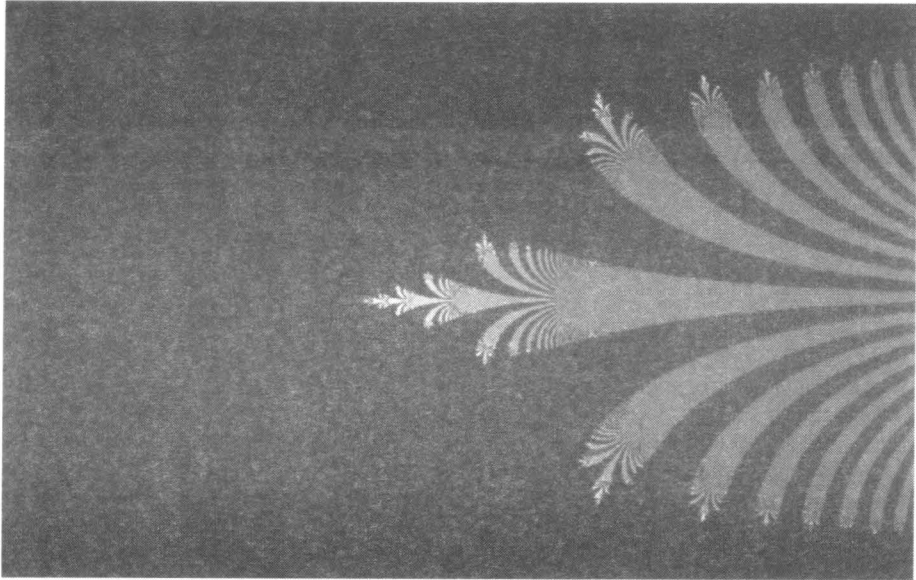
Een *iteratie* van f is een samenstelling van de vorm

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n \text{ keer}.$$

De n -voudige samenstelling van f wordt genoteerd met f^n . In de theorie van dynamische systemen bestudeert men het gedrag van iteraties van de afbeelding f . De *baan* van een punt z uit $\mathbb{C}$ is de verzameling

$$\mathcal{O}(z) = \{z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z), \dots\}.$$

De centrale vraag is: kunnen we aangeven hoe $\mathcal{O}(z)$ eruit ziet? Wat is het asymptotisch gedrag van f of, iets eenvoudiger gesteld, wat is de waarde van $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z)$ voor $z \in \mathbb{C}$, zo de limiet al bestaat? Voor de hier beschouwde functie f is dat redelijk eenvoudig. We verwijzen naar Figuur 1. Deze figuur heeft weliswaar betrekking op de functie $f(z) = 0.36 e^z$, maar is bijna hetzelfde als die voor de door ons beschouwde functie f . Er zijn verscheidene *dekpunten* ($f(z) = z$, en dus $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z$). Eén van deze dekpunten is *aantrekkend*, namelijk het punt $z_0 = 0.48940 \dots$; voor alle punten z uit het zwarte deel (links) geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0$. Dit deel van het complexe vlak wordt de *Fatou-verzameling* van f genoemd. De waaier rechts in de figuur, die door DEVANEY het *Cantor-boeket* genoemd wordt, is een mooi voorbeeld van een fractal. Deze verzameling is de *Julia-verzameling* van f . Bijna alle punten uit de Julia-verzameling divergeren

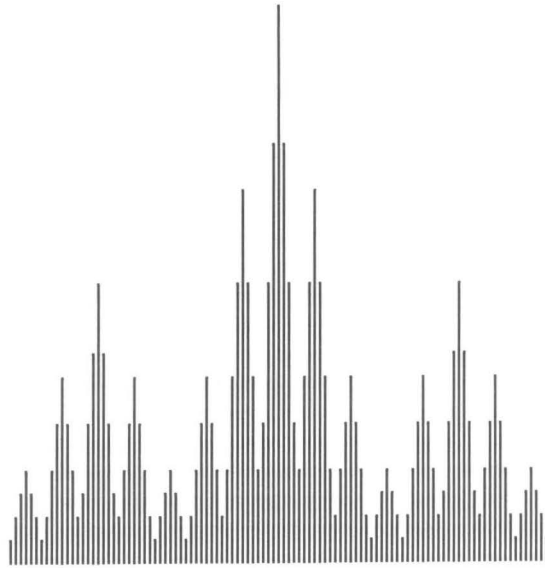


FIGUUR 1. Fatou- en Julia-verzameling van $f(z) = 0.36 e^z$

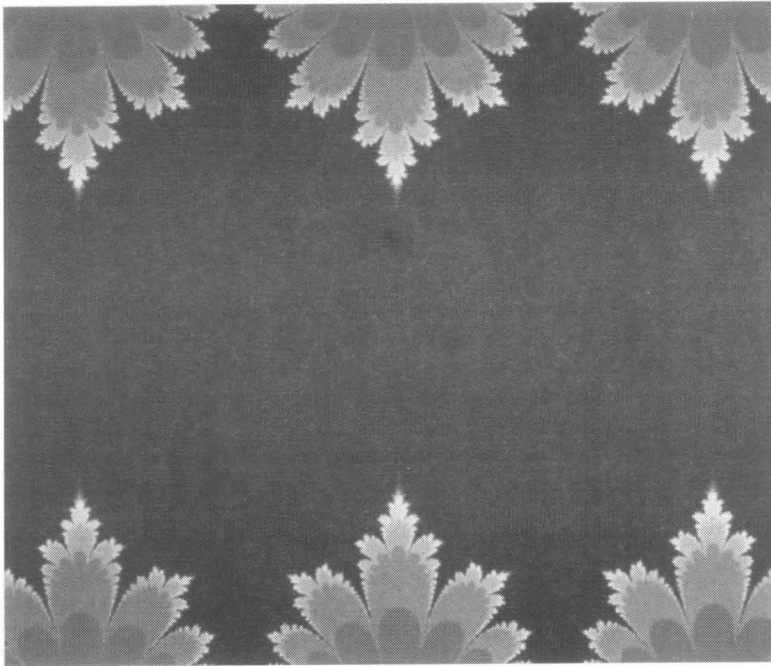
naar ∞ . Bij nadere bestudering blijkt de Julia-verzameling te bestaan uit halfrechten die zich elk vanuit het *eindpunt* uitstrekken naar ∞ . De eindpunten van de halfrechten zijn dekpunten of *periodieke punten*. Het blijkt dat de functie f op de verzameling van eindpunten een chaotisch, onvoorspelbaar dynamisch gedrag vertoont. In de voordracht zal dit alles nader worden uitgelegd.

Ook zullen we aandacht besteden aan de beschrijving van een topologisch model van de Julia-verzameling. In Figuur 2 is een plaatje van dit model getekend.

In het laatste deel van de voordracht bekijken we de functie $g(z) = 0.68 i \cos z$. De Fatou- en Julia-verzameling van de functie g zijn weergegeven in Figuur 3. De zwarte verzameling is de Fatou-verzameling en zijn complement is de Julia-verzameling. We zullen aannemelijk maken dat de Julia-verzameling van de functie g hetzelfde model heeft als de Julia-verzameling van de exponentiële functie f .



FIGUUR 2. Veel liefs uit Moskou



FIGUUR 3. Fatou- en Julia-verzameling van $g(z) = 0.68 i \cos z$

Chaos en het weer

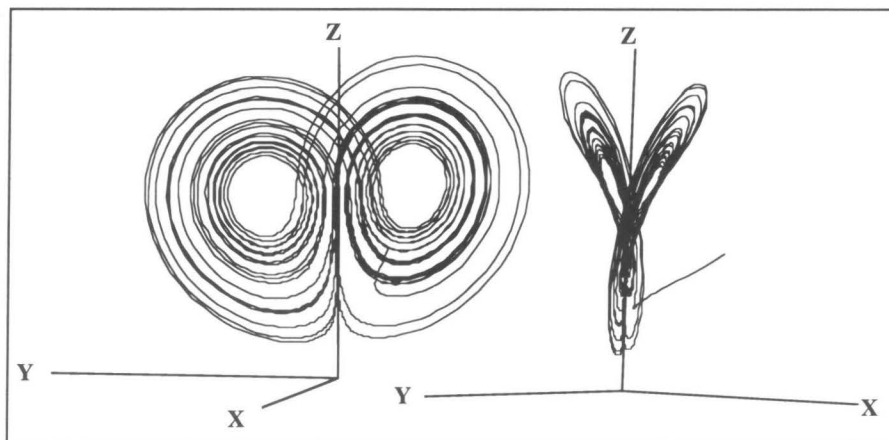
F.M. Selten

Als je kijkt naar een reeks satellietopnamen van de wolkenpatronen in de atmosfeer, dan bekruipt je al snel het gevoel dat de atmosfeer eindeloos creatief is in het ontwikkelen van steeds weer nieuwe stromingspatronen. Inderdaad is tot op heden nog niet waargenomen dat de atmosfeer eerder gedrag exact herhaalde. Blijkbaar evolueert de atmosfeer niet periodiek in de tijd. Zoals Lorenz, een vooraanstaand wetenschappelijk onderzoeker in de meteorologie het uitdrukte is 'onregelmatig gedrag een fundamentele eigenschap van de atmosfeer'. Aan de andere kant lijkt de gevarieerdheid aan structuren in de stroming tamelijk beperkt. Deze structuren zijn duidelijk herkenbaar en geven weerkaarten hun karakteristieke uiterlijk. De meest in het oog springende structuur is de straalstroom op de gematigde breedtes. Dit is een permanente, tamelijk smalle gordel van krachtige westenwinden hoog in de atmosfeer, die als een kronkelende rivier de aarde omspant. De straalstroom bevindt zich op de scheiding tussen warme, tropische lucht en koude, polaire lucht. Door de grote temperatuur- en windcontrasten is de stroming hier erg instabiel. Uit kleine fluctuaties komen onophoudelijk grote wervelstructuren tot bestaan, worden enkele dagen meegevoerd in de straalstroom en lossen dan weer op in de stroming. (Dit proces is een beetje te vergelijken met wat er gebeurt als je je hand snel genoeg door water beweegt. Dan ontstaan achter je hand door de grote snelheidsverschillen wervels die na een tijdje weer verdwijnen.) Deze wervelstructuren, die een doorsnede kunnen hebben van enkele duizenden kilometers, worden depressies of lagedrukgebieden genoemd. Het weer in ons land wordt in hoge mate bepaald door voorbijtrekkende depressies. Het maken van een weersvoorspelling komt in feite neer op het voorspellen van de ligging en de sterkte van de depressies. Dat dit zo moeilijk is komt doordat een depressie ontstaat uit een kleinschaliger verstoring, die op zijn beurt weer ontstaat uit een nog kleinschaliger verstoring en ga zo maar door. Doordat de atmosferische circulatie instabiel is, beïnvloedt een kortlevende, toevallige, kleinschalige fluctuatie op de juiste plaats en tijd uiteindelijk de evolutie van de grootste schalen. Ziehier het probleem van het weersvoorspellen.

Als het weer al zo moeilijk te voorspellen is, kun je je afvragen wat we überhaupt dan nog over het toekomstig klimaat kunnen zeggen. Aan de hand van een sterk vereenvoudigd wiskundig model van de atmosferische circulatie zal in deze lezing ingegaan worden op het probleem van de voorspelbaarheid van het weer en het klimaat. We zullen zien hoe een dergelijk simpel model het denken over dit complexe probleem vergemakkelijkt. Verder zullen we aan de hand van dit model onderwerpen van het huidige voorspelbaarheidsonderzoek, zoals dat onder andere plaatsvindt op het KNMI, illustreren.

Het model dat we zullen gebruiken is in 1963 door Lorenz afgeleid en heeft aan de wieg gestaan van wat we nu de 'Chaos theorie' zijn gaan noemen. Het Lorenz model bestaat uit een set van drie gekoppelde gewone eerste orde differentiaalvergelijkingen die voorschrijven hoe X , Y en Z in de loop van de tijd veranderen

$$\frac{dX}{dt} = -\sigma X + \sigma Y$$



Figuur 1: Twee aanzichten van een oplossing van het Lorenz model.

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= -XZ + rX - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ,\end{aligned}$$

X , Y en Z zijn drie tijdafhankelijke variabelen en σ , r en b zijn drie constanten. Startend van een bepaalde beginwaarde voor X , Y en Z kan door numerieke integratie berekend worden hoe X , Y en Z in de loop van de tijd veranderen. Ter illustratie is een korte tijdreeks van X , Y en Z in figuur 1 weergegeven.

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt f 75.-, waarbij de syllabus is inbegrepen. Dit bedrag is echter exclusief de kosten van maaltijden.

Aanmelding

Door het inschrijfformulier achterin deze brochure in te vullen en op te sturen naar:

Stichting Mathematisch Centrum
T.a.v. Mevrouw M. Bruné
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

en tegelijkertijd het cursusgeld (vermeerderd met evt. kosten van maaltijden) over te boeken naar bank rek.nr. 31.35.57.977 van de Stichting Wiskunde en Informatica Conferenties bij de RABObank te Amsterdam (gironummer van de bank is 187744) onder vermelding van uw naam en VC96.

N.B. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit.

Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te vermelden.

Plaats

Amsterdam: CWI, Kruislaan 413, zaal Z011.

Eindhoven: Bestuursgebouw van de Technische Universiteit Eindhoven, Den Dolech 2, van Trier-Dorgelozaal.

Syllabus

De syllabus zal worden uitgereikt bij aankomst op de cursus.

Informatie

Voor nadere informatie over de Vakantiecursus kunt u zich wenden tot mevrouw M. Bruné, tel. 020 - 5924249.

SPREKERS

Prof.dr. J.M. Aarts

wg.: TU Delft, Faculteit TWI, Mekelweg 4, 2628 CD Delft, 015 - 2785399, e-mail: j.m.aarts@twi.tudelft.nl

hs.: Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft, 015 - 2126448

Prof.dr. H.W. Broer

wg.: RU Groningen, Fac. Wiskunde en Informatica, Postbus 800, 9700 AV Groningen, 050 - 3633959, e-mail: broer@math.rug.nl

hs.: H. Colleniusstraat 68, 9718 KW Groningen, 050 - 3141354

Prof.dr. J. van de Craats

wg.: Universiteit van Amsterdam, e-mail: jcr@euronet.nl

hs.: Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL Oosterhout, 0162 - 457364

Prof.dr. A.W. Grootendorst

hs.: Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, 070 - 3232936

Dr. I. Hoveijn

wg.: RU Groningen, Vakgroep Wiskunde, Postbus 800, 9700 AV Groningen, 050 - 3633975, e-mail: hoveijn@math.rug.nl

hs.: Bekemaheerd 87, 9737 PS Groningen, 050 - 5426605

Dr. C. de Pater

wg.: Vrije Universiteit Amsterdam, Vakgroep Algemene Vorming, De Boelelaan 1083, 1081 HV Amsterdam, 020 - 4447983

hs.: Krugerlaan 69, 2806 EC Gouda, 0182 - 525916

Dr. J.A. van Ruler

wg.: RU Groningen, Faculteit der Wijsbegeerte, A-weg 30, 9718 CW Groningen, 050 - 3636161

hs.: 1e Binnenvestgracht 3C, 2312 BA Leiden, 071 - 5130747

Dr.ir. F.M. Selten

wg.: KNMI, Postbus 201, 3730 AE De Bilt, 030 - 2206761, e-mail: seltenf@knmi.nl

hs.: Paardenhoeve 36, 3992 PJ Houten, 030 - 6380981

Prof.dr. F. Verhulst

wg.: Universiteit Utrecht, Vakgroep Wiskunde, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht, 030 - 2531526, e-mail: verhulst@math.ruu.nl

hs.: Parkstraat 11, 3581 PB Utrecht, 030 - 2311516

AANMELDINGSFORMULIER

VAKANTIECURSUS 1996

HOE DE CHAOS DE ORDE VERSTOORDE

Ondertekende,

Naam: _____

Functie: _____

Adres: _____

Telefoon: _____

Postcode: _____

Woonplaats: _____

wenst deel te nemen aan de Vakantiecursus 1996, die zal worden gehouden te

- | | | |
|----|--|---------|
| A. | Eindhoven op do. 22 en vrij. 23 augustus 1996 | ja/nee* |
| | Deelname aan lunch op donderdag 22 augustus (f 15.=) | ja/nee* |
| | Deelname aan lunch op vrijdag 23 augustus (f 15.=) | ja/nee* |
| B. | Amsterdam op vrij. 30 en zat. 31 augustus 1996 | ja/nee* |
| | Deelname aan warme maaltijd op vrijdag 30 aug. (f 20.=) | ja/nee* |
| | Deelname aan lunch op zaterdag 31 aug. (f 15.=) | ja/nee* |

en heeft het verschuldigde bedrag overgemaakt (voor rekeningnummers zie pag. 22)

Degenen die prijs stellen op een nascholingscertificaat wordt verzocht dit te berichten aan Mevrouw M. Bruné (Stichting Mathematisch Centrum), onder nauwkeurige vermelding van naam en voornamen (zonder afkortingen), geboortedatum en geboorteplaats.

Gelieve dit formulier vóór 15 augustus 1996 op te sturen naar:



Stichting Mathematisch Centrum
T.a.v. Mevrouw M. Bruné
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

*Doorhalen wat niet van toepassing is

