STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Werkbesprekingen 1969
van de afdeling toegepaste wiskunde

Samengesteld door M. Bakker

januari 1970

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Werkbesprekingen van de afdeling toegepaste wiskunde in 1969.

Inhoud blz.

Samengesteld door M. Bakker.

M.P. van Ouwerkerk-Dijkers, werkbespreking 30 september 1969.

Stralentheorie.

De vergelijking

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\,\delta(x)\,\delta(z-z_1)\,\delta(t) \quad \begin{cases} 0 \leq z < \infty \\ -\infty < x < \beta \end{cases}$$

waarin $c = c_0(1+\alpha z)$, $\mu = \mu_0(1+\alpha z)^p$, c_0, μ_0, α positief reëel, α klein, p willekeurig, beschrijft de voortplanting van een SH-puls in een half-oneindig inhomogeen isotroop elastisch medium. Aan het vrije oppervlak $z = 0$ geldt $(\partial U/\partial z) = 0$ en voor $|x|, z \to \infty \quad U \to 0$.
In de omgeving van de golffronten (de oppervlakken waarlangs de discontinuïteiten zich voortplanten) geldt

$$U = (1+\alpha z)^{-p/2}(1+\alpha z_1)^{p/2} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,z)\; f_k\,[t-\tau(x,z)],$$

met $\qquad f_k'(t) = f_{k-1}(t)$ en $f_0(t) = \dfrac{H(t)}{(\pi t)^{1/2}}$.

Aan (1) wordt voldaan door de coëfficienten van de opeenvolgende f_k's gelijk aan nul te stellen, i.e. $\nabla\tau.\nabla\tau = 1/c^2$, $2(\nabla u_0.\nabla\tau) + u_0\,\nabla\tau = 0$ etc.
Uit de eerste vgl. leiden we de geometrie van het probleem af, d.w.z. de vgl. van de golffronten $t = \tau(x,z)$ en van de stralen (gedefinieerd als de orthogonale trajectoriëen). De laatste zijn opgebouwd uit cirkelbogen (middelpunten op de lijn $z = -1/\alpha$).
Uit de tweede vgl. volgt $u_0(x,z) = \psi_0(\theta_1)(c|J)^{\frac{1}{2}}$, met $J = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\theta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\theta_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

ψ_0 wordt bepaald door de waarde van u_0 in de bron aan te passen aan de oplossing van (1) in een oneindig homogeen medium,

$$U = \frac{H(t-R/c)}{2\pi(t^2-R^2/c_1^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ met } R = \left[x^2+(z-z_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{ en } c_1 = c_0(1+\alpha z_1),$$

we vinden $\psi_0 = 2^{-3/2}\pi^{-\frac{1}{2}}$.

H. Bavinck, werkbespreking 7 oktober 1969

Over absolute convergentie van Jacobi-reeksen

Wij beschouwen de klasse $A(\alpha,\beta)$ van alle functies $f(x)$, waarvan de Jacobi-reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ absoluut en uniform convergeert op het interval $-1 \leq x \leq 1$.

Wij stellen ons de volgende vraag:

Voor welke waarden van γ en δ geldt de relatie

(A) $$f(x) \in A(\alpha,\beta) \quad \text{impliceert } f(x) \in A(\gamma,\delta).$$

Bekend was dat de relatie (A) geldig was wanneer in de uitdrukking

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{kn}\,(\alpha,\beta;\gamma,\delta)\, P_k^{(\gamma,\delta)}(x)$$

alle $c_{kn}\,(\alpha,\beta;\gamma,\delta) \geq 0$ waren.

Dit is het geval als 1) $\delta = \beta,\ \gamma < \alpha,\ \gamma \geq \delta$.

2) $\alpha = \beta,\ \gamma = \delta,\ \gamma < \alpha$.

3) $\alpha = \gamma,\ \delta = \beta+n$, (n geheel en positief). $\gamma \geq \delta$.

Wij tonen aan dat de relatie (A) geldig is in de volgende gevallen.

4) $\alpha = \gamma,\ \delta > \beta,\ \gamma \geq \delta$.

5) $\gamma = \alpha-\mu,\ \delta = \beta-\mu,\ \mu > 0,\ \gamma \geq \max(\delta,-\frac{1}{2}),\ \delta > -1$

Geval 4) werd bewezen, door de coefficienten $c_{kn}\,(\alpha,\beta;\gamma,\delta)$ expliciet op te schrijven en hun absolute waarde of te schatten.

Geval 5) werd aangetoond door de Jacobi polynomen met Hilb's formule terug te brengen tot Besselfuncties.

Met behulp van de functies $(1-x)^{\mu}$, $(1+x)^{\mu}$ en $|x|^{\mu}$, $\mu > 0$ werden tegenvoorbeelden geconstrueerd, waardoor kon worden bewezen dat relatie (A) buiten het aangegeven gebied niet kan gelden.

J. Grasman, werkbespreking 14 en 21 oktober 1969

Niet-uniforme convergentie bij een functie met kleine parameter

Van een in een gebied $\overline{G}$ expliciet gegeven functie $\phi(x,y;\varepsilon)$ is bekend dat

$$\text{(a)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\phi(x,y;\varepsilon) - \omega(x,y) \right] = 0 \text{ niet uniform in } G \text{ en}$$

uniform in een deelgebied G_A $(G_A \to G$ als $A \to 0)$. De gevallen dat $G - G_A$ de omgeving van een kromme en de omgeving van een geïsoleerd punt voorstelt worden speciaal bestudeerd.

Er wordt gebruik gemaakt van een uitbreidingsstelling (verscherping van de stelling van Kaplun), deze zegt dat de convergentie van (a) uniform is in $\overline{G}$ voor $0 \leq \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}_0(x,y)$. Hierbij wordt een constructie van $\overline{\varepsilon}_0(x,y)$ gegeven; essentieel is dat in $G - G_A$ $\overline{\varepsilon}_0(x,y) \to 0$ voor $A \to 0$. De limietfunctie $\psi(\varepsilon,\eta)$ wordt geïntroduceerd door de limiet

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon,\eta \text{ vast}}} \left[\phi(x,y;\varepsilon) - \psi(\varepsilon,\eta) \right] = 0,$$

indien deze bestaat voor een locale transformatie $x = x_0 + \xi\, \delta_x(\varepsilon)$, $y = y_0 + \eta\, \delta_y(\varepsilon)$. Met deze gegevens wordt een aansluitingstelling bewezen, die het verband aangeeft tussen twee limietfuncties behorende bij een transformatie (in de omgeving van x_0, y_0) waarvan δ_x en δ_y niet te veel verschillen in grootte-orde voor $\varepsilon \to 0$. Bovendien kunnen deze locale limiet-functies worden samengesteld tot een functie $\phi_0(x,y;\varepsilon)$ zodanig dat $\phi(x,y;\varepsilon)$ uniform tot deze functie convergeert voor $\varepsilon \to 0$ in het gehele gebied $\overline{G}$.

Tenslotte wordt de toepasbaarheid van deze methode onderzocht voor impliciet gegeven functies (bijvoorbeeld differentiaalvergelijkingen met een kleine parameter). Ter inleiding beschouwt men de functie $\phi(x;\varepsilon)$ die niet-uniform convergeert voor $\varepsilon \to 0$ in $0 < x \leq R$.

P. J. van der Houwen, werkbespreking 18, 25-11-'69

Stabiliteit en Nauwkeurigheid van lineaire differentieschema's

Beschouw het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d\tilde{U}}{dt} = D\ U + F,$$

waarin D een matrix is met constante elementen.

Men kan dit stelsel numeriek oplossen door middel van de recurrente betrekking

$$u_{k+1} = P_n(\tau D)\ u_k + \tau\ g_k^{(n)},\ u_0 \text{ beginvoorwaarde.}$$

Hierin is $P_n(\ D)$ van de vorm

$$P_n\ (\tau D) = 1 + \tau\ D + \beta_2\ \tau^2\ D^2 + \ldots + \beta_n\ \tau^n\ D^n,$$

en geeft $g_k^{(n)}$ de eigenschap

$$g_k^{(n)} \to f_k \text{ als } \tau \to 0.$$

De vrijheid in keuze van $P_n(z)$ en $g_k^{(n)}$ kan gebruikt worden om het schema zeer stabiel en/of zeer nauwkeurig te maken.

Als maat voor de stabiliteit kiezen we het getal $\bar{\beta}$ dat in de conditie

$$\tau_{eff} \leq \frac{\bar{\beta}}{\sigma(D)}$$

optreedt ($\tau_{eff} = \tau/n$ en $\sigma(D)$ is spectraalradius van D).

Als maat voor de nauwkeurigheid kiezen we de orde p in τ van de fout die in de integratiestap $t_k \to t_{k+1}$ gemaakt wordt

In onderstaande tabel vindt men een aantal resultaten. Hierin is onderscheid gemaakt tussen de gevallen waarin men weet dat de eigenwaarden van D reëel of imaginair zijn en de gevallen waarin men niets van de eigenwaarden van D kan zeggen.

Behalve een efficiente keuze van het polynoom $P_n(z)$ kan ook rekentijd gespaard worden door de tijdstap τ niet constant te houden maar in overeenstemming met de locale variatie van u_k te kiezen.

Polynoom $P_n(z)$	Inhomogeneterm $g_k^{(n)}$	p	$\overline{\beta}_{reeël}$	$\overline{\beta}_{imag}$	$\overline{\beta}_{complex}$
$1 + z$	f_k	2	2.	0	0
$1 + z + z^2/8$	f_k	2	4	0	0
$1 + z + 4z^2/27 + 4z^3/729$	f_k	2	6	0	0
$T_n(1 + z/n^2)$	f_k	2	2n	0	0
$1 + z + z^2$	f_k	2	0.500	0.500	0.500
$1 + z + z^2/2 + z^3/4$	f_k	3	0.667	0.667	0.584
$1 + z + z^2/2 + z^3/6 + z^4/24$	f_k	5	0.696	0.713	0.656
$T_{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(n-1)^2+2z^2}{(n-1)^2} + \frac{(n-1)^2+z^2}{(n-1)^3}\right]$	f_k	3		$1-1/n$	
$U_{\frac{n-3}{2}}\left[\frac{(n-1)^2+2z^2}{(n-1)^2}\right]$, n oneven					
$1 + z + z^2/2$	$(f_k+f_{k+1}+\tau D\, f_k)/2$	3	1.000	0	0
$1 + z + z^2/2 + z^3/6$	$(f_k+4f_{k+\frac{1}{2}}+f_{k+1} + \tau Df_k+f_{k+\frac{1}{2}})+ \tau^2D^2f_k)/6$	4	0.833	0.583	0.583
$\sum_{j=0}^{n} z^j/j!$		n+1			
$1 + z + z^2/2 + .0625z^3$	$(f_k+f_{k+1}+\tau D\, f_k)/2$	3	2.09		
$1 + z + z^2/2 + z^3/6 + .01846z^4$	$(f_k+4f_{k+\frac{1}{2}}+f_{k+1} + \tau D(f_k+f_{k+\frac{1}{2}})+\tau^2D^2f_k)/6$	4	1.50		

M.P. van Ouwerkerk-Dijkers, werkbespreking 2, 9-12-1969.

SH-golven in een halfruimte

We beschouwen dezelfde differentiaalvergelijking als op 30-9-1969 en passen op de verplaatsing U een Laplace-transformatie naar de tijd $\tilde{U} = \int_0^\infty e^{-st}\, U dt$ en een Fourier-transformatie naar de plaats $U^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\, \tilde{U} dx$ toe.

De differentiaalvergelijking is nu

$$\frac{1}{\mu}\frac{d}{dz}\left(\mu \frac{dU^*}{dz}\right) - \left(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) U^* = -\delta\,(z-z_1).$$

Nieuwe variabelen $v = \xi(1+\alpha z)/\alpha$ en $V = U^*/\chi$, met $= \left(\frac{v}{v_1}\right)^{(1-p)/2}$, worden geïntroduceerd. V blijkt nu een gemodificeerde Besselfunctie van orde $N = \left[\left(\frac{s}{\alpha c_0}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, (Re $N \geq 0$) te zijn.

Met het oog op latere toepassing van contourintegratie en asymptotiek voor grote Re s voeren we een nieuwe Fourier-variabele $\nu = -i\xi/s$ en een variabele $w = -iv/N$ in.

De oplossing is een combinatie van Bessel- en Hankel-functies.

$$V = C\left[V^+(w_1) - \frac{F^+(w_0)}{F^-(w_0)}\, V^-(w_1)\right] V^-(w)\ , \qquad z \geq z_1,$$

$$= C\left[V^+(w) - \frac{F^+(w_0)}{F^-(w_0)}\, V^-(w)\right] V^-(w_1)\ , \qquad 0 \leq z \leq z_1,$$

met $$C = -N\,\xi^{-1}\left[V^+\frac{dV^-}{dw} - V^-\frac{dV^+}{dw}\right]^{-1}_{z=z_1}$$

en $$F^{\pm} = \left[w\,\frac{dV^{\pm}}{dw} + \frac{1-p}{2}\, V^{\pm}\right]_{z=0},$$

terwijl $V^+ = J_n(Nw)$

en $V^- = H_n^{(1)}(Nw)$ als $\mathrm{Im}\ \nu s > 0$,

$= H_n^{(2)}(Nw)$ als $\mathrm{Im}\ \nu s < 0$.

De inverse Fourier-transformatie is $\tilde{U} = \frac{is}{2\pi} \int_{i\infty e^{-i\phi}}^{-i\infty e^{-i\phi}} e^{-\nu s x}\, U^{*} d\nu$, $\phi = \arg s$.

De oplossing is niet bekend voor Im $\nu s = o$, maar in een willekeurig kleine omgeving van deze lijn moet een continue overgang plaats vinden van de vorm voor Im $\nu s > 0$ in die voor Im $\nu s < 0$.

De integraal kan niet exact berekend worden. We benaderen de oplossing voor grote Res , d.w.z. dicht bij de golffronten, m.b.v. de uniforme asymptotiek van Olver. Er zijn twee mogelijkheden: we passen contour-integratie toe en berekenen de bijdragen van de singulariteiten of we passen de zadelpuntsmethode toe.

De vier vertakkingspunten $\nu = 0$, $\nu(z_1)$, $\nu(z)$, $\nu(0)$ met $\nu(z) \sim \frac{1}{c_0(1+\alpha z)}$ leveren geen bijdragen.
De polen liggen op een kromme die begint in $\nu = \nu(0)$ en afgebroken wordt door de lijn Im $\nu s = 0$, ze worden in eerste instantie bepaald door de nulpunten van de afgeleide van een Airijfunctie. De residuen hebben de vorm

$$\tilde{R}_k \sim A\, s^{-2/3} \exp(-s\tau_0 + s^{1/3}B),$$

waarin A, B, τ_0 complexe functies van x, z en z_1 zijn.
In het complexe s-vlak neemt $\tilde{R}_k$ in complex toegevoegde punten toegevoegde waarden aan. Hoewel de benadering geldt voor grote Res zijn de afzonderlijke $\tilde{R}_k$'s analytische functies van s voor Re $s > 0$ en we kunnen de integratieweg bij de inverse Laplace-transformatie dan ook verschuiven naar de imaginaire s-as, mits we ons realiseren dat de resultaten alleen gelden voor kleine $(t - \mathrm{Re}\tau_0)$.
Met behulp van de zadelpuntsmethode verkrijgen we de oplossing

$$U = \sum_1^\infty R_k \text{ , waarin } R_k = \mathrm{Re}\,\{C(x,z)(t-\tau_0)^{-1/4} \exp -D(x,z)(t-\tau_0)^{-\frac{1}{2}}\} H(t-\frac{x}{c_0}).$$

Soortgelijke vormen treden op bij de diffractie van een puls door een continu gekromd obstakel in een homogeen medium.

Naast deze methode die de oplossing als een som van "eigentrillingen" geeft en het best voldoet op grote afstand van de bron, kunnen we ook de zadelpuntsmethode toepassen die het geometrische deel van de oplossing geeft (zie de werkbespreking van 30-9),

$$U = \sum_j U_j \text{ , waarin } U_j = E(x,z)\ \tau_j^{-\frac{1}{2}}\ \frac{H(t-\tau_j)}{(t-\tau_j)^{\frac{1}{2}}} .$$

Als we bij het vervormen van de oorsponkelijke integratieweg in het ν-vlak tot de zadelpuntsweg rekening houden met eventuele gepasseerde polen vinden we tenslotte een zogenaamd "kleinste afstands" criterium voor het optreden van de eigentrillingen.