Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

MC SYLLABUS 40

CONVEXE ANALYSE

J. VAN TIEL

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1979

1980 Mathematics subject classification: 26A51, 26B25, 52A05, 90C25

INHOUD

VOORWOORD

Dit boek is ontstaan uit een college "Convexe Analyse" dat ik sedert enige jaren aan de Universiteit van Utrecht geef. Het beoogt reeds enigszins wiskundig geschoolde lezers (gedacht wordt aan het niveau van een kandidaatsexamen wiskunde) in te leiden in een gebied van de wiskunde dat de laatste decennia, zowel wat betreft theorie als toepassingen, steeds meer in de belangstelling is komen te staan. De inhoud is afgestemd op wat naar mijn ervaring minimaal nodig is om op dit gebied de literatuur te kunnen bestuderen en seminaria, symposia e.d. te kunnen volgen.

Meer dan op het verwerven van kennis heb ik getracht de nadruk te leggen op het leren hanteren van voor dit gebied kenmerkende begrippen en methoden (zoals subdifferentiatie, geconjugeerde functie, scheiding, convexe optimalisering). Oefening hierin kan worden verkregen aan de hand van een ruime collectie opgaven, waarin de behandelde stof rechtstreeks wordt toegepast.

Opgenomen zijn enige verwijzingen van historische aard, alsmede literatuuropgaven voor voortgezette studie.

Naast het voor de praktijk belangrijke eindigdimensionale geval wordt ook de oneindigdimensionale versie aan de orde gesteld. Getracht is daarbij topzwaarheid te vermijden door van de lokaal convexe ruimten, die de natuurlijke context van de convexe analyse vormen, alleen de genormeerde ruimten te behandelen.

Aan het einde van het boek is een verklaring van de gebruikte notaties opgenomen.

Mijn dank gaat uit naar drs. A. Jongejan, die het gehele manuscript nauwgezet heeft bestudeerd en van commentaar heeft voorzien.

J. van Tiel
Voorjaar 1979.

I. INLEIDING

1.1. In de ontwikkeling van de analyse en haar toepassingen zijn perioden aan te wijzen waarin bij het onderzoek en gebruik van functies de nadruk valt op een zekere functieklasse. Zo werd aanvankelijk, nog lange tijd na Newton en Leibniz, een overheersende rol gespeeld door de *differentieerbare* functies, in de zogenaamde infinitesimaalrekening. Daarna is in deze eeuw, vooral via het onderzoek (in de zogenaamde functionaalanalyse) van functieruimten en daarop gedefinieerde operatoren, het belang van *lineaire* functies (afbeeldingen) benadrukt. En de laatste decennia mogen de *convexe* functies zich in een toenemende belangstelling verheugen; het onderzoek van deze functies geven we aan met de naam *Convexe Analyse*. Men is daarbij uiteraard vooral geïnteresseerd in niet-lineaire convexe functies; de convexe analyse is dan ook een onderdeel van de zogenaamde niet-lineaire analyse.

Convexe functies vormen reeds lang object van onderzoek. Eén van de oudste publikaties hierover dateert van het begin van deze eeuw:

J.L.W.V. JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entres les valeurs moyennes,* Acta Math. 30 (1906) 175-193.

De convexe analyse heeft haar meer recente resultaten in niet geringe mate te danken aan het gebruik van convexe functies in optimaliseringsproblemen. Want hoewel het onderzoek van extrema van differentieerbare functies zeer oud is, is het nog niet zo heel lang geleden mogelijk gebleken hierbij nieuwe criteria te geven indien deze functies bovendien convex zijn. Sommige van deze criteria blijken bovendien geldig voor alleen convexe (dus niet noodzakelijk differentieerbare) functies.

1.2. Veel van de convexe optimaliseringsproblemen vinden hun oorsprong in de economie. Van de literatuur op dit gebied noemen we

H. NIKAIDO, *Convex structures and economic theory*, Academic Press, New York 1968.

1.3. Nauw verwant met de convexe analyse is het (meetkundige) onderzoek van convexe verzamelingen, dat veel ouder is. Een aardig overzicht hiervan geeft:

T. BONNESEN/W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, herdrukt in 1971 bij Chelsea, New York.

Op enkele uitzonderingen na zullen wij ons slechts met convexe verzamelingen bezig houden voor zover dat voor de analyse noodzakelijk is.

II. CONVEXE FUNCTIES OP $\mathbb{R}$

REËLE CONVEXE FUNCTIES

In het onderstaande is I een (half of geheel open of gesloten, begrensd of onbegrensd) interval in $\mathbb{R}$.

2.1. DEFINITIES. Zij f een functie $I \to \mathbb{R}$.

(a) f heet *convex* indien voor alle $a,b \in I$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$ met $0 < \lambda < 1$ geldt

(1) $$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

Meetkundige interpretatie: de koorde met eindpunten $(a,f(a))$ en $(b,f(b))$ ligt nergens onder de grafiek van f. Zie fig. 1.

(b) f heet *strikt convex* indien f convex is, terwijl in (1) het < -teken geldt.

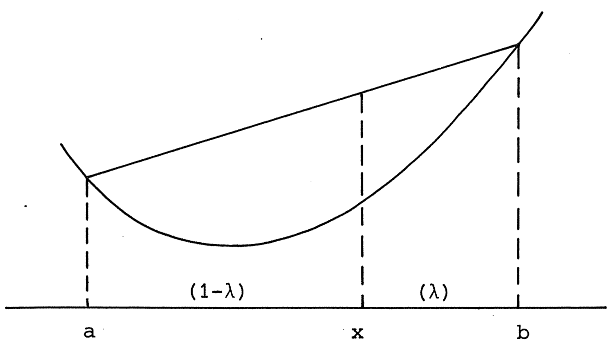

Fig. 1

2.2. Met behulp van (1) of fig. 1 leidt men direct af:
$f : I \to \mathbb{R}$ is convex $\Longleftrightarrow$ voor alle $a,b,x \in I$ met $a < x < b$ geldt

$$f(x) \le \frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b) = f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Een andere formulering is: $f : I \to \mathbb{R}$ is convex $\Longleftrightarrow$ voor alle $a,b \in I$ en alle $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ met $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda+\mu = 1$ geldt

$$f(\lambda a+\mu b) \le \lambda f(a)+\mu f(b).$$

2.3. Bewijs zelf de volgende eenvoudige eigenschappen:

(a) Zijn f en g convexe functies en is $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, dan is $\alpha f+\beta g$ convex.

(b) De som van eindig veel convexe functies is convex.

(c) De (puntsgewijze) limiet van een convergente rij convexe functies is convex.

(d) Zij $f : I \to \mathbb{R}$ convex; zij $x_i \in I$, $\lambda_i \ge 0$ $(1 \le i \le n)$ en $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dan is $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$, en

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

(e) Is $\{f_\alpha | \alpha \in A\}$ een collectie convexe functies $I \to \mathbb{R}$ met $(\forall x \in I) \sup_{\alpha\in A} f_\alpha(x) < +\infty$, dan is $\sup_{\alpha\in A} f_\alpha$ convex. Merk op dat er geen analogon is voor "inf"!

2.4. STELLING. *Zij* $f : I \to \mathbb{R}$ *convex. Dan geldt voor alle* $a,b,x \in I$ *met* $a < x < b$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \tag{2}$$

Is f *strikt convex, dan gelden in* (2) *de* <*-tekens.*

BEWIJS. Uit

$$f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{3}$$

volgt

$$f(x)-f(a) \le \frac{a-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = \frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)]$$

waarmee de eerste ongelijkheid in (2) bewezen is; is f strikt convex, dan geldt het <-teken in (3) en dus ook in (2). Op analoge wijze bewijst men de tweede ongelijkheid in (2).

Meetkundige interpretatie: in fig. 2 is helling AB ≤ helling AC ≤ helling BC.

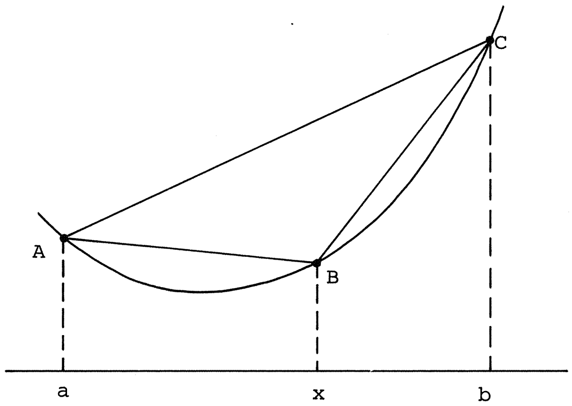

Fig. 2

2.5. Met int(I) geven we het inwendige van I aan. Zij $f : I \to \mathbb{R}$ convex, zij $c \in \text{int}(I)$, en zij $[a,b] \subset I$ met $a < c < b$. Volgens stelling 2.4 geldt voor alle $x \in \langle c,b]$:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(x)-f(c)}{x-c} .$$

Uit stelling 2.4 volgt eveneens dat de functie $x \mapsto \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ op $\langle c,b]$ monotoon stijgend is. Er volgt dat

$$f'_+(c) := \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

bestaat. Op analoge wijze bewijst men dat in c de linkerafgeleide $f'_-(c)$ van f bestaat. Is $a < c < d < b$, dan geldt voor voldoende kleine positieve h:

$$\frac{f(c)-f(c-h)}{h} \le \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le \frac{f(d)-f(d-h)}{h}.$$

Limietovergang $h \to 0$ levert

$$f'_-(c) \le f'_+(c) \le f'_-(d).$$

We vatten de verkregen resultaten samen in de volgende stelling:

2.6. STELLING. *Zij* $f : I \to \mathbb{R}$ *convex. Dan is* f *links- en rechtsdifferentieerbaar op* $\mathrm{int}(I)$, *en de op* $\mathrm{int}(I)$ *gedefinieerde linkerafgeleide* f'_- *en rechterafgeleide* f'_+ *van* f *zijn monotoon stijgend. Is* $c \in \mathrm{int}(I)$, *dan is*

$$f'_-(c) \le f'_+(c)$$

terwijl voor alle $x \in I$ *geldt*

$$f(x) \ge f(c)+f'_-(c)(x-c) \quad \textit{en} \quad f(x) \ge f(c)+f'_+(c)(x-c)$$

(*vgl. fig*.3).

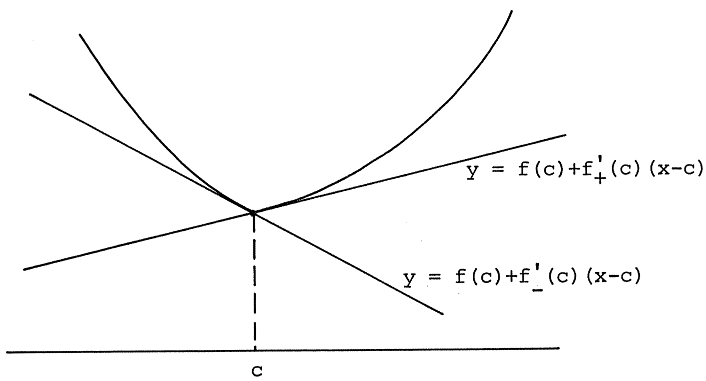

Fig. 3

OPMERKING. Uit het bovenstaande volgt nog: is $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convex, dan bestaat $f'_+(a)$, eventueel als oneigenlijke limiet $-\infty$; evenzo bestaat $f'_-(b)$, eventueel als oneigenlijke limiet $+\infty$. Analoge opmerkingen gelden voor andere intervallen.

2.7. Een $f : I \to \mathbb{R}$ heet *Lipschitz-continu* indien er $K > 0$ is zó dat voor alle $x,y \in I$ geldt $|f(x)-f(y)| \le K|x-y|$. Een Lipschitz-continue functie is continu en zelfs uniform continu (en bovendien van begrensde variatie op elk begrensd deelinterval van I).

STELLING. *Zij* $f : I \to \mathbb{R}$ *convex, en zij* $[a,b] \subset \mathrm{int}(I)$. *Dan geldt:*
(a) f *is Lipschitz-continu op* $[a,b]$.
(b) f *is continu op* $\mathrm{int}(I)$.

BEWIJS. Er zijn $c,d \in I$ met $c < a < b < d$. Volgens stelling 2.6 geldt voor alle x en y met $a \leq x < y \leq b$:

$$f'_+(a) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'_-(y) \leq f'_-(b)$$

dus $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$ met $K := \max(|f'_+(a)|,|f'_-(b)|)$. Hiermee is (a) bewezen; (b) is een onmiddellijk gevolg van (a).

OPMERKING. Ga na dat f niet noodzakelijk Lipschitz-continu is op I, ook niet als f begrensd is, en dat f niet noodzakelijk continu is op I, ook niet als I gesloten en begrensd is.

2.8. Een Lipschitz-continue functie is absoluut continu (voor wie dit begrip niet kent: er wordt in het volgende geen gebruik van gemaakt); de Lebesgue-theorie leert ons dat zo'n functie bijna overal differentieerbaar is. De volgende stelling, die zonder gebruikmaking van deze theorie bewezen wordt, doet een sterkere uitspraak.

STELLING. *Zij* $f : I \to \mathbb{R}$ *convex. Dan geldt:*
(a) f'_- *is linkscontinu,* f'_+ *is rechtscontinu (beide op* $\mathrm{int}(I)$*).*
(b) *Er zijn hoogstens aftelbaar veel punten waarin* f *niet differentieerbaar is.*

BEWIJS.
(a) Wegens de continuïteit van f op $\mathrm{int}(I)$ (zie par. 2.7) geldt voor alle $x,y,z \in \mathrm{int}(I)$ met $x < z < y$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{z \downarrow x} \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \geq \lim_{z \downarrow x} f'_+(z)$$

en dus (pas de limietovergang $y \downarrow x$ toe)

$$f'_+(x) \geq \lim_{z \downarrow x} f'_+(z).$$

Uit de monotonie van f'_+ (zie stelling 2.6) volgt dat

$$f'_+(x) \leq \lim_{z \downarrow x} f'_+(z).$$

We concluderen dat $f'_+(x) = \lim_{z \downarrow x} f'_+(z)$, dus dat f'_+ rechtscontinu is in x.

De linkscontinuïteit van f'_- wordt op analoge wijze bewezen.

(b) Voor alle $x,y,z \in \mathrm{int}(I)$ met $x < y < z$ geldt volgens stelling 2.6:

$$f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(z).$$

Is f'_+ continu in y, dan is

$$f'_+(y) = \lim_{x\uparrow y} f'_+(x) = \lim_{z\downarrow y} f'_+(z) = f'_-(y)$$

en dus is f dan differentieerbaar in y. De punten waarin f niet differentieerbaar is zijn dus discontinuïteitspunten van f'_+; aangezien f'_+ monotoon is zijn dit er hoogstens aftelbaar veel (en het zijn alle sprongdiscontinuïteiten).

MID-POINT CONVEXE FUNCTIES

2.9. Vooral in de oudere literatuur treft men een ander begrip convex aan:

DEFINITIE. Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet *mid-point convex* indien voor alle $a,b \in I$ geldt

(4) $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)].$$

Meetkundige interpretatie: het midden van de koorde met eindpunten $(a,f(a))$ en $(b,f(b))$ ligt niet onder de grafiek van f.

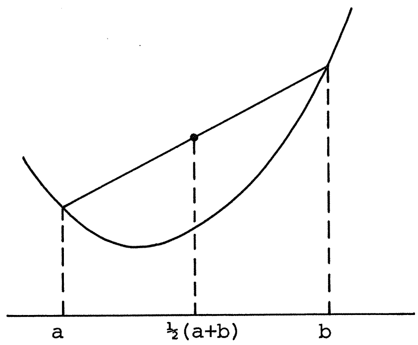

Fig. 4

2.10. STELLING. *Zij* $f : I \to \mathbb{R}$ *mid-point convex en continu. Dan is* f *convex.*

BEWIJS. Zij (a_k) een rij in I. Uit (4) volgt dat

$$f\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right) \le \tfrac{1}{2}f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) + \tfrac{1}{2}f\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right) \le$$

$$\le \tfrac{1}{4}[f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)]$$

en algemeen, via volledige inductie:

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \tag{5}$$

voor het geval dat n van de vorm 2^k (waarin $k \in \mathbb{N}$) is. Veronderstel nu dat (5) geldt voor $n = N$. Noemen we $a_N = \frac{1}{N-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{N-1})$, dan is $a_N = \frac{1}{N}(a_1+\ldots+a_N)$ dus

$$f(a_N) = f\left(\frac{a_1+\ldots a_N}{N}\right) \le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} f(a_i)+\frac{1}{N}f(a_N)$$

waaruit volgt

$$f(a_N) \le \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1} f(a_i)$$

zodat (5) dan ook geldt voor $n = N-1$. We concluderen dat (5) geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zij nu $a,b \in I$ en $k,n \in \mathbb{N}$ met $k < n$. Volgens (5) is

$$f\left(\frac{k}{n}a + \frac{n-k}{n}b\right) \le \frac{1}{n}[kf(a)+(n-k)f(b)]$$

zodat voor alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ met $0 < \lambda < 1$ geldt

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \le \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b). \tag{6}$$

Op grond van de continuïteit van f geldt (6) nu ook voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ met $0 < \lambda < 1$.

2.11. Uit stelling 2.10 volgt dat voor continue functies convexiteit en mid-point convexiteit hetzelfde betekenen; dit resultaat is reeds te vinden in het in de inleiding geciteerde artikel van Jensen. Verscheidene wiskundigen hebben hiervan zeer essentiële verfijningen bewezen; zo geldt bijvoorbeeld dat elke mid-point convexe *meetbare* functie convex is. Men leze er de volgende artikelen en de daar geciteerde literatuur op na:

H. BLUMBERG, *On convex functions,* Trans. Am. Math. Soc. 20 (1919) 40-44,

W. SIERPIŃSKI, *Sur les fonctions convexes mesurables,* Fund. Math. 1 (1920) 125-128,

A. OSTROWSKI, *Zur Theorie der konvexen Funktionen,* Comm. Math. Helvetici 1 (1929) 157-159.

DIFFERENTIEERBARE CONVEXE FUNCTIES

2.12. STELLING. *Zij* I *open en zij* $f : I \to \mathbb{R}$ *tweemaal differentieerbaar. Dan geldt:* f *is convex* $\Leftrightarrow (\forall x \in I) f''(x) \geq 0$.

BEWIJS.

$\Rightarrow$: Volgens stelling 2.6 is f' op I monotoon stijgend, dus $(\forall x \in I) f''(x) \geq 0$.

$\Leftarrow$: Zij $x,y \in I$ met $x < y$, en zij $0 < \lambda < 1$. Herhaalde toepassing van de middelwaardestelling van de differentiaalrekening leert dat er ξ_1, ξ_2 zijn met $x < \xi_1 < \lambda x+(1-\lambda)y < \xi_2 < y$, en ξ_3 met $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$, zó dat

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) =$$

$$= \lambda[f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)] + (1-\lambda)[f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(y)] =$$

$$= \lambda(1-\lambda)(y-x)f'(\xi_1) + (1-\lambda)\lambda(x-y)f'(\xi_2) =$$

$$= \lambda(1-\lambda)(y-x)(\xi_1-\xi_2)f''(\xi_3) \leq 0.$$

Er volgt dat f convex is.

OPMERKING. Uit het bovenstaande bewijs volgt nog: is $(\forall x \in I) f''(x) > 0$, dan is f strikt convex (ga na). Merk op dat het > -teken wel voldoende maar niet noodzakelijk is voor strikte convexiteit: de functie $f: x \mapsto x^4$ is strikt convex op $\mathbb{R}$, terwijl toch $f''(0) = 0$.

2.13. ONGELIJKHEDEN. Stelling 2.12 levert een eenvoudig criterium voor de (strikte) convexiteit van een functie. Met behulp hiervan is het mogelijk een aantal niet zo evidente ongelijkheden af te leiden, bijvoorbeeld de volgende: Zij $x > 0$, $y > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ en $\lambda+\mu = 1$. Dan is

$$x^\lambda y^\mu \leq \lambda x+\mu y. \tag{7}$$

Immers uit de strikte convexiteit van de functie $x \mapsto e^x$ volgt dat

$$\exp(\lambda \log x + \mu \log y) \leq \lambda \exp \log x + \mu \exp \log y$$

ofwel $x^\lambda y^\mu \leq \lambda x + \mu y$, terwijl het gelijkteken alleen dan geldt als $x = y$. Merk op dat (7) ook te schrijven is als

$$x^{\frac{1}{p}}\, y^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p}\,x + \frac{1}{q}\,y \tag{8}$$

waarin $x > 0$, $y > 0$, $p > 1$, $q > 1$ en $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, en ook als

$$xy \le \frac{1}{p}\,x^p + \frac{1}{q}\,y^q \tag{9}$$

Met $p = q = 2$ levert (8) de bekende ongelijkheid $\sqrt{xy} \le \frac{1}{2}(x+y)$.
Voor wie van goochelen met dit soort ongelijkheden houdt: U vindt er een groot aantal in het boek *Inequalities* van G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD en G. PÓLYA (Cambridge 1934), alsmede enkele in de opgaven aan het einde van dit hoofdstuk.

INTEGRAALSTELLINGEN

2.14. STELLING. *Zij* f *een functie* $\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. *Dan geldt:* f *is convex* $\Leftrightarrow$ *er is een monotoon stijgende en rechtscontinue* $g\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *met*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\,dt \qquad (c,x \in \langle a,b\rangle). \tag{10}$$

BEWIJS.

$\Rightarrow$: Zij f convex en zij $c,x \in \langle a,b\rangle$. Volgens par. 2.6 en 2.8 bestaat f'_+ en is deze monotoon stijgend en rechtcontinu. Beschouw

$$h(\varepsilon) = \int_c^x \frac{f(t+\varepsilon)-f(t)}{\varepsilon}\,dt.$$

Er geldt $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}[f(t+\varepsilon)-f(t)] = f'_+(t)$ $(a < t < b)$; verder is er volgens par. 2.7 een constante K zó dat voor alle t tussen c en x en alle voldoende kleine $\varepsilon > 0$ geldt $\left|\frac{1}{\varepsilon}[f(t+\varepsilon)-f(t)]\right| \le K$. Toepassing van de stelling van Lebesgue (betreffende gemajoreerde convergentie) leert dat

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} h(\varepsilon) = \int_c^x f'_+(t)\,dt$$

(merk op dat het rechterlid wegens de monotonie van f'_+ een Riemannintegraal is). Anderzijds is

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_c^x [f(t+\varepsilon)-f(t)]\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{c+\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} f(t)dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_c^{c+\varepsilon} f(t)dt \to f(x)-f(c) \qquad (\varepsilon\downarrow 0)$$

(wegens de continuïteit van f). Er volgt dat

(11) $$f(x)-f(c) = \int_c^x f'_+(t)dt.$$

$\Leftarrow$: Laat (10) gelden, terwijl g monotoon stijgend is. Zij $x,y \in \langle a,b\rangle$ met $x < y$, en zij $0 < \lambda < 1$; stel $z := \lambda x+(1-\lambda)y$. Dan geldt (vgl. fig. 5):

$$f(z)-\lambda f(x)-(1-\lambda)f(y) =$$

$$= \lambda[f(z)-f(x)] -$$

$$- (1-\lambda)[f(y)-f(z)] =$$

$$= \lambda\int_x^z g(t)dt-(1-\lambda)\int_z^y g(t)dt \le$$

$$\le \lambda(z-x)g(z)-(1-\lambda)(y-z)g(z) = 0$$

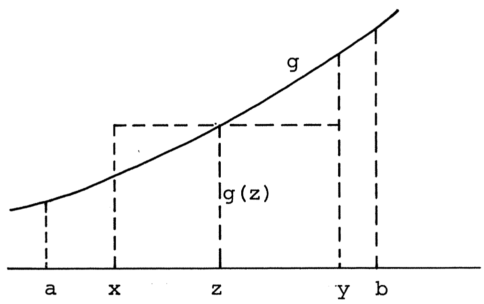

Fig. 5

(wegens $z-x = (\lambda-1)(x-y)$ en $y-z = \lambda(y-x)$).

OPMERKING. Wie de Lebesgue-theorie kent herinneren we aan de volgende stelling: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is absoluut continu $\Longleftrightarrow$ f is een onbepaalde integraal, d.w.z. f is van de vorm

$$f(x) = c + \int_a^x g(t)dt$$

waarin $c \in \mathbb{R}$, terwijl g Lebesgue-integreerbaar is; in dit geval geldt voor bijna alle x : $f'(x) = g(x)$. Met behulp hiervan zien we dat (11) een rechtstreeks gevolg is van par. 2.7 en 2.8.

2.15. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convex, en zij $a_i \in [a,b]$ $(1\le i\le n)$. Dan geldt

(12) $$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(a_i).$$

We kunnen (12) lezen als een uitspraak over het gemiddelde van n getallen:

$$f(\text{gemiddelde van de } a_i) \le \text{gemiddelde van de } f(a_i).$$

Van deze formule bestaat een analogon voor het gemiddelde van een functie over een interval:

STELLING (ONGELIJKHEID VAN JENSEN): *Zij* $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *convex, en zij* $g : [c,d] \to \langle a,b\rangle$ *continu. Dan is*

$$f\left(\frac{1}{d-c}\int_c^d g(x)\,dx\right) \le \frac{1}{d-c}\int_c^d f(g(x))\,dx.$$

BEWIJS. Stel $p := \frac{1}{d-c}\int_c^d g(x)\,dx$; er geldt $p \in \langle a,b\rangle$. Volgens stelling 2.6 geldt voor alle $y \in \langle a,b\rangle$:

$$f(y) \ge f(p)+f'_+(p)(y-p).$$

Er volgt dat voor alle $x \in [c,d]$ geldt

$$f(g(x)) \ge f(p)+f'_+(p)[g(x)-p].$$

Integratie van beide leden van deze ongelijkheid over $[c,d]$ levert het gestelde (denk aan de definitie van p).

OPMERKINGEN.

(a) De stelling blijft juist als we daarin g slechts Lebesgue-integreerbaar over $[c,d]$ veronderstellen.

(b) In de kansrekening wordt de volgende, op een analoge wijze te bewijzen, versie van de ongelijkheid van Jensen gebruikt:
Zij (X,S,μ) een kansruimte (dus $\mu(X) = 1$), zij $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ convex, en zij $g : X \to \langle a,b\rangle$ integreerbaar. Dan is

$$f\left(\int_X g\,d\mu\right) \le \int_X (f\circ g)\,d\mu.$$

Ofwel: is $\underline{x}$ een stochastische variabele op X, dan is $f(E\underline{x}) \le E[f(\underline{x})]$ (waarin $E\underline{x}$ de verwachting van $\underline{x}$ is).

DE GECONJUGEERDE FUNCTIE

2.16. STELLING. *Voor alle functies* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *geldt:* f *is convex* $\Longleftrightarrow$ *er is een* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *met*

$$f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} [xy-g(y)] \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

<u>BEWIJS</u>.

$\Leftarrow$: Er geldt

$$f(x) = \sup_{g(y)<+\infty} [xy-g(y)].$$

f is dus het supremum van een collectie affiene (dus convexe) functies en is dus convex (vgl. par. 2.3(e)).

$\Rightarrow$: Definieer $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ door

$$g(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} [xy-f(x)].$$

We gaan bewijzen dat deze g voldoet.

Zij $x_0 \in \mathbb{R}$. Voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt $g(y) \geq x_0y-f(x_0)$ dus $x_0y-g(y) \leq f(x_0)$; er volgt dat

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} [x_0y-g(y)] \leq f(x_0). \tag{13}$$

We definiëren $y_0 := f'_+(x_0)$. Volgens stelling 2.6 geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq f(x_0)+f'_+(x_0)(x-x_0) = f(x_0)+y_0(x-x_0)$$

dus

$$xy_0-f(x) \leq x_0y_0-f(x_0).$$

Er volgt dat

$$g(y_0) = x_0y_0-f(x_0)$$

dus

$$x_0y_0-g(y_0) = f(x_0). \tag{14}$$

Uit (13) en (14) volgt het gestelde.

<u>2.17</u>. Aan de hand van fig. 6 geven we nu van stelling 2.16 een meetkundige interpretatie.

We beschouwen de evenwijdige lijnenbundel met richtingscoëfficient y.

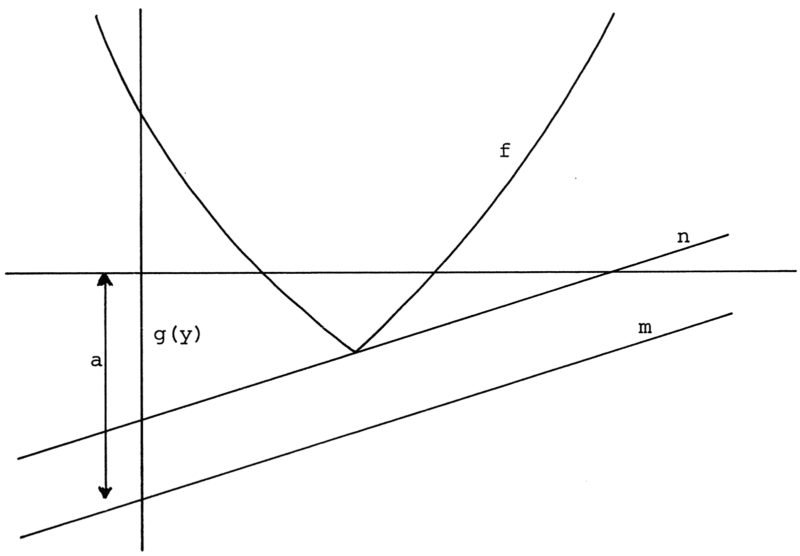

Fig. 6

Laat een lijn m in deze bundel van de negatieve verticale as een stuk ter lengte a afsnijden; m ligt nergens boven de grafiek van f indien voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$yx-a \le f(x)$$

ofwel

$$a \ge xy-f(x).$$

In de uiterste stand (voor de lijn n) is dit stuk a dus gelijk aan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} [xy-f(x)]$$

en hier staat juist g(y). Stelling 2.16 zegt dus dat de grafiek van f de omhullende is van de zo verkregen rechten n juist dan als f convex is. Loop met behulp van deze meetkundige interpretatie nu nog eens het bewijs van stelling 2.16 na; verklaar daarbij meetkundig de keuze van y_0. Ga ook de meetkundige betekenis na van "$g(y) = +\infty$".

2.18. De in stelling 2.16 gedefinieerde functie g wordt de *geconjugeerde* (functie) van f genoemd. In de convexe analyse speelt het begrip "geconjugeerde functie" een belangrijke rol, en we zullen het dan ook in het vervolg vaak tegenkomen. Voor alle $x,y \in \mathbb{R}$ geldt

$$f(x)+g(y) \geq xy. \tag{15}$$

De theorie der functieparen (f,g) die voldoen aan (15) is voor het eerst ontwikkeld in

Z.W. BIRNBAUM/W. ORLICZ, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen,* Studia Math. 3 (1931) 1-67.

Hoewel dit de eerste publikatie is waarin het begrip "geconjugeerde functie" voorkomt (daar genoemd "komplementäre Funktion"; "konjugiert" betekent daar iets anders!), zijn impliciet hiermee samenhangende beschouwingen al te vinden in een ander artikel, namelijk in

W.H. YOUNG, *On classes of summable functions and their Fourier series,* Proc. Royal Soc. (A) 87 (1912) 225-229.

Een goed leesbaar overzicht van het zojuist genoemde is te vinden in het eerste hoofdstuk van

M.A. KRASNOSEL'SKIĬ/YA.B. RUTICKIĬ, *Convex functions and Orlicz spaces,* Noordhoff, Groningen 1961.

Stelling 2.16 komt voor het eerst voor in

S. MANDELBROJT, *Sur les fonctions convexes,* C.R. Acad. Sc. 209 (1939) 977-978.

2.19. VOORBEELDEN.

(a) Zij $p > 1$, $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ $(x\in\mathbb{R})$. Dan is

$$g(y) = \frac{1}{q}|y|^q \quad \text{waarin } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Er volgt dat voor alle reële x en y geldt

$$xy \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q \tag{16}$$

(vgl. par. 2.13).

(b) Zij $f : [0,\infty> \to \mathbb{R}$ strikt monotoon stijgend en continu, met $f(0) = 0$; zij g de inverse van f. We definiëren F en G door

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (x \geq 0), \quad G(y) = \int_0^y g(u)du \quad (y \in f([0,\infty>)).$$

Verder definiëren we nog: $F(x) = 0$ als $x < 0$. Volgens stelling 2.14 zijn F en G convex; men kan bewijzen dat G de restrictie tot $f([0,\infty>)$ van de geconjugeerde van F is. Er volgt dat voor alle $x \geq 0$, $y \in f([0,\infty>)$ geldt

$$xy \leq F(x) + G(y)$$

(vgl. (15)) ofwel

$$xy \leq \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(u)du \tag{17}$$

(17) is de zogenaamde *ongelijkheid van Young* (vgl. zijn in par. 2.18 geciteerde artikel); een meetkundige interpretatie (die tevens de weg wijst naar een elementair bewijs) is af te leiden uit fig. 7.

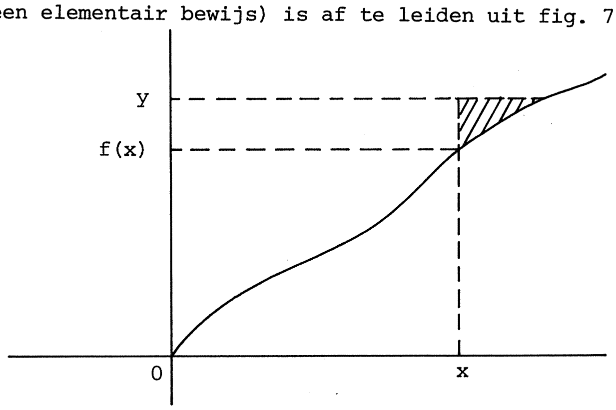

Fig. 7

Substitutie $f(x) = x^{p-1}$, $g(y) = y^{q-1}$ (met $p > 1$ en $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) in de ongelijkheid van Young levert nogmaals de ongelijkheid (16).

CONVEXE FUNCTIES MET WAARDEN IN $\overline{\mathbb{R}}$

2.20. In par. 2.16 zagen we dat het soms voor de hand ligt om functies met waarden in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ te beschouwen. In het onderstaande zullen we ons met zulke functies bezighouden en, algemener, met functies met waarden in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Van de niet-triviale rekenregels in $\overline{\mathbb{R}}$ noemen we $0.(+\infty) = (+\infty).0 = 0.(-\infty) = (-\infty).0 = 0$; de uitdrukking $+\infty-\infty$ is niet gedefinieerd.

In het volgende generaliseren we het boven gedefinieerde begrip "convexe functie".

2.21. DEFINITIE. Een functie $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ heet *convex* indien voor alle $x,y,\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$ met $f(x) < \mu$, $f(y) < \nu$ en $0 < \lambda < 1$ geldt

$$(18) \qquad f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda\mu+(1-\lambda)\nu.$$

2.22. Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convex, dan volgt uit $f(x) < \mu$, $f(y) < \nu$ en $0 < \lambda < 1$ dat

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) < \lambda\mu+(1-\lambda)\nu.$$

Geldt omgekeerd (18), dan is voor alle $\varepsilon > 0$ (wegens $f(x) < f(x)+\varepsilon$, $f(y) <$ $< f(y)+\varepsilon$)

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\varepsilon$$

dus

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

en er volgt dat f convex is. We concluderen dat definitie 2.21 een uitbreiding is van definitie 2.1.

2.23. DEFINITIES.

(a) Het *effectieve domein* dom(f) van een convexe $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ is de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < +\infty\}$.

(b) Een *eigenlijke convexe functie* op $\mathbb{R}$ is een convexe functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ die niet de constante functie $+\infty$ is.

(c) Een *oneigenlijke convexe functie* op $\mathbb{R}$ is een convexe functie op $\mathbb{R}$ die niet eigenlijk is.

2.24. Men gaat gemakkelijk na dat het effectieve domein van een convexe $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ convex, dus een interval is.
Men kan zich een eigenlijke convexe functie $F : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ met effectief domein I ontstaan denken door voortzetting tot $\mathbb{R}$ van een convexe $f : I \to \mathbb{R}$, namelijk als volgt:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in I \\ +\infty & \text{als } x \notin I. \end{cases}$$

Het bovenstaande geeft ons de mogelijkheid om reële convexe functies met verschillend domein te beschouwen als convexe functies met hetzelfde domein $\mathbb{R}$.
Merk op dat de in stelling 2.16 gedefinieerde functie g convex is in de zin van definitie 2.21.

2.25. De klasse van *oneigenlijke* convexe functies is gemakkelijk te overzien:

STELLING. *Zij* $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *een oneigenlijke convexe functie. Dan is* $f(x) = -\infty$ *voor alle* $x \in \text{int}(\text{dom}(f))$.

BEWIJS. Het gestelde is juist indien $f = +\infty$. Is dit niet het geval, dan is er $a \in \mathbb{R}$ met $f(a) = -\infty$ (merk op dat $a \in \text{dom}(f)$). Bij elke $x \in \text{int}(\text{dom}(f))$ met $x \neq a$ zijn er $y \in \text{dom}(f)$ en $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ met $x = \lambda a+(1-\lambda)y$. Zij $f(y) < \alpha < +\infty$. Voor alle $\beta \in \mathbb{R}$ geldt volgens definitie 2.21 (aangezien $f(a) = -\infty < \beta$)

$$f(x) = f(\lambda a+(1-\lambda)y) < \lambda\beta+(1-\lambda)\alpha.$$

Er volgt (neem $\beta \to -\infty$) dat $f(x) = -\infty$.

2.26. Van de in par. 2.3 genoemde eigenschappen van reële convexe functies bestaat een analogon voor convexe functies met waarden in $\overline{\mathbb{R}}$, mits we ons in (a), (b) en (d) beperken tot eigenlijke convexe functies (ter vermijding van de uitdrukkingen $+\infty-\infty$).
In het vervolg zullen we nog gebruiken dat van een eigenlijke convexe functie op $\mathbb{R}$ de linker- en de rechterafgeleide overal in dom(f) gedefinieerd zijn, mits we de waarden $-\infty$ en $+\infty$ toelaten. We bewijzen dit voor het geval dat $\text{dom}(f) = [a,b]$. Volgens par 2.5 bestaat $f'_+(x)$ voor alle $x \in [a,b\rangle$, en bestaat $f'_-(x)$ voor alle $x \in \langle a,b]$. Verder geldt voor alle $x < a$: $f(x) = +\infty$, dus

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$

en $f'_-(a) = -\infty$; voor alle $x > b$ is

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = +\infty$$

dus $f'_+(b) = +\infty$.

UITWEIDINGEN

2.27. De convexiteit van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is in de volgende vorm tot uitdrukking te brengen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0 \text{ indien } x < y < z.$$

Generalisaties hiervan van de vorm

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n+1}^{n-1} \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdot & \cdot & \cdot & f(x_{n+1}) \end{vmatrix} \geq 0$$

vindt men in S.KARLIN/Z.ZIEGLER, *Some applications to inequalities of the method of generalized convexity,* Journal d'Analyse Math. 30 (1976) 281-303.

2.28. KWASI-CONVEXITEIT. Naast het begrip "convexiteit" bestaat nog een aantal andere, hiermee verwante, begrippen. We geven een voorbeeld:

DEFINITIES. Zij I een interval in $\mathbb{R}$, en zij f een functie $I \to \mathbb{R}$.

(a) f heet *kwasi-convex* indien voor alle $a,b \in I$ met $f(a) \leq f(b)$ en alle $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ geldt

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq f(b).$$

(b) f heet *strikt kwasi-convex* indien voor alle $a,b \in I$ met $f(a) < f(b)$ en alle $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ geldt

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) < f(b).$$

Een strikt kwasi-convexe functie is niet noodzakelijk kwasi-convex; vgl. opgave 10.

OPGAVEN

1. Zij f een functie $\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Bewijs:
   (a) f is convex $\Rightarrow$ f is monotoon of er is $c \in \langle a,b\rangle$ zó dat f links van c monotoon dalend en rechts van c monotoon stijgend is.
   (b) f is convex $\Rightarrow$ elk lokaal minimum van f is een globaal minimum.
   (c) f is strikt convex $\Rightarrow$ f heeft hoogstens één globaal minimum.

OPMERKING. Soms zegt men nog "relatief" en "absoluut" in plaats van "lokaal" en "globaal".

2. Zij f: $\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ convex, en $c \in \langle a,b\rangle$. Bewijs:

$$f'(c) \text{ bestaat} \Leftrightarrow \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h} = 0.$$

3. Bewijs dat voor elke f: $\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ geldt: f is convex $\Leftrightarrow$ door elk punt van de grafiek van f gaat minstens één lijn waar de grafiek van f nergens onder ligt.

4. (a) Bewijs: als $x_1,\ldots,x_n$, $r_1,\ldots r_n$ positief zijn, terwijl $\sum_{i=1}^n r_i = 1$, dan is

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{r_i} \le \sum_{i=1}^{n} r_i x_i.$$

   (b) Bewijs dat het meetkundig gemiddelde van een eindig aantal positieve getallen niet groter is dan hun rekenkundig gemiddelde.
   (c) Bewijs de *ongelijkheid van Hölder*: als $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots b_n$ niet-negatief zijn, terwijl $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan is

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

   Een bijzonder geval hiervan is de ongelijkheid van Cauchy, die we verkrijgen door $p = q = 2$ te nemen.

5. Bewijs: is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convex en begrensd, dan is f constant.

6. Een positive f heet *logaritmisch convex* als log f convex is. Bewijs dat voor tweemaal differentieerbare functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geldt:

(a) f is logaritmisch convex $\Leftrightarrow$ $f > 0$ en $f''f \geq (f')^2$.

(b) f is logaritmisch convex $\Rightarrow$ f is convex.

(c) Zijn f en g logaritmisch convex en is $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dan is $\alpha f + \beta g$ logaritmisch convex.

(d) Bewijs dat de functie

$$x \mapsto \log(a_1^x + \ldots + a_n^x)$$

convex is op $\mathbb{R}$, als $a_1, \ldots a_n$ positief zijn.

7. Laten f en g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convex zijn, terwijl f monotoon stijgend is. Bewijs dat $f \circ g$ convex is.

8. Bewijs dat de in par. 2.19, voorbeeld (b) voorkomende functie G de restrictie van de geconjugeerde van de daar eveneens genoemde F is.

9. Zij f een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Bewijs: f is convex $\Leftrightarrow$ voor alle $a,b \in \mathbb{R}$ en alle $\lambda \in <0,1>$ geldt

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).$$

10. Zij f een functie $<a,b> \to \mathbb{R}$.

(a) Bewijs: f is een kwasi-convex $\Leftrightarrow$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is de verzameling $\{x \in <a,b> \mid f(x) \leq \alpha\}$ een interval.

(b) Geeft een voorbeeld van een strikt kwasi-convexe f die niet kwasi-convex is.

(c) Bewijs: f is continu en strikt kwasi-convex $\Rightarrow$ f is kwasi-convex.

III. CONVEXE DEELVERZAMELINGEN VAN EEN LINEAIRE RUIMTE

In dit hoofstuk is V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$; voor het gemak veronderstellen we dat V niet-triviaal is, d.w.z. uit meer dan één element bestaat.

CONVEX EN AFFIEN OMHULSEL

3.1. DEFINITIES.

(a) Zij $x,y, \in V$. Het *lijnstuk* $[x,y]$ (met eindpunten x en y) is de verzameling $\{\lambda x+(1-\lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Het *inwendige* $<x,y>$ van $[x,y]$ is de verzameling $\{\lambda x+(1-\lambda)y \mid 0 < \lambda < 1\}$. Op analoge wijze definieren we $[x,y>$ en $<x,y]$.

(b) Zij $A \subset V$. A heet *convex* indien voor alle $x,y \in A$ geldt $[x,y] \subset A$.

(c) Een (eindige) *convexe combinatie* van de punten $x_1,x_2,\dots,x_n$ van V is een punt van V van de vorm

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

waarin $\lambda_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ en $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$.

3.2. Men bewijst gemakkelijk dat de doorsnede van een collectie convexe verzamelingen convex is (ga na); voor elke $A \subset V$ is er dus een kleinste convexe deelverzameling van V die A bevat, namelijk de doorsnede van alle convexe deelverzamelingen van V die A bevatten.

DEFINITIE. Zij $A \subset V$. Het *convexe omhulsel* $\mathrm{co}(A)$ van A is de kleinste convexe deelverzameling van V die A bevat.

3.3 STELLING. *Zij* $A \subset V$. $\mathrm{co}(A)$ *is de verzameling van alle (eindige) convexe combinaties van punten van* A.

BEWIJS. Zij B de verzameling van alle convexe combinaties van punten van A. De convexe verzameling $\mathrm{co}(A)$ (die A bevat) bevat alle lijnstukken met eindpunten in A, en dus ook alle (eindige) convexe combinaties van punten van A (ga na; vgl. par. 2.3, eigenschap (d)); er volgt dat $B \subset \mathrm{co}(A)$. B is convex, aangezien een convexe combinatie $\lambda x+(1-\lambda)y$ van twee punten $x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ en $y = \sum_{i=1}^{m}\mu_i y_i$ van B weer een convexe combinatie $\sum_{i=1}^{n}(\lambda\lambda_i)x_i+\sum_{i=1}^{m}[(1-\lambda)\mu_i]y_i$ van punten van A is. Er volgt dat $B \supset \mathrm{co}(A)$.
We concluderen dat $\mathrm{co}(A) = B$.

3.4. Bewijs zelf de volgende eenvoudige eigenschappen:

(a) Een lineaire combinatie van convexe verzamelingen is convex: zijn $C_1,C_2,\dots,C_n$ convexe delen van V en is $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(1\leq i\leq n)$, dan is $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C_i$ convex. Hierbij definiëren we:

$$C_1+C_2 = \{x_1+x_2 \mid x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\} \text{ en } \alpha C = \{\alpha x \mid x \in C\}.$$

(b) Zij $A \subset V$. Dan geldt: A is convex $\Leftrightarrow$ voor alle $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ is $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$.

(c) Is W een lineaire ruimte en is $T\colon V \to W$ lineair, dan geldt:
Is $A \subset T$ convex, dan is TA convex;
is $B \subset W$ convex, dan is $T^{-1}B$ convex.

(d) Zijn $A, B \subset V$ convex, dan is

$$co(A \cup B) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} [\lambda A + (1-\lambda)B].$$

(e) Is $A \subset V$, $x \in co(A)$, dan is $co(A \cup \{x\}) = co(A)$.

3.5. Een lineaire variëteit in V, d.w.z. een deelverzameling van V van de vorm $a+L$, waarin $a \in V$ terwijl L een lineaire deelruimte van V is, wordt ook een *affiene* deelverzameling (of deelruimte) van V genoemd. De *dimensie* $\dim(a+L)$ van $a+L$ wordt gedefinieerd door $\dim(a+L) = \dim(L)$. Men bewijst gemakkelijk dat voor $A \subset V$ de volgende voorwaarden equivalent zijn:

(a) A is een affiene verzameling.

(b) Voor alle $x,y \in A$ geldt dat de lijn door x en y in A ligt, ofwel: voor alle $x,y \in A$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $\lambda x+(1-\lambda)y \in A$.

Zij $A \subset V$. De doorsnede van alle affiene deelverzamelingen van V die A bevatten is weer een affiene deelverzameling van V (ga na), en wel de kleinste die A bevat.

3.6. DEFINITIES.

(a) Zij $A \subset V$. Het *affiene omhulsel* $aff(A)$ van A is de kleinste affiene deelverzameling van V die A bevat.

(b) Onder de *dimensie* $\dim(A)$ van A verstaan we $\dim(aff(A))$.

(c) Een (eindige) *affiene combinatie* van de punten $x_1, x_2, \ldots x_n$ van V is een punt van V van de vorm

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

waarin $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ (vgl. definitie 3.1(c)).

3.7. STELLING. *Zij* $A \subset V$. $aff(A)$ *is de verzameling van alle (eindige) affiene combinaties van punten van* A.

Bewijs deze stelling zelf, naar analogie van het bewijs van stelling 3.3.

CONVEXE POLYTOPEN

3.8. We geven het convexe omhulsel en het affiene omhulsel van een eindige deelverzameling $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ van V aan met resp. $co(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $aff(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Volgens stelling 3.3 en stelling 3.7 geldt

$$co(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,|\, \lambda_i \geq 0 (1\leq i\leq n),\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

$$aff(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,|\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Men noemt $co(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ het door $x_1,x_2,\ldots,x_n$ opgespannen *convexe polytoop*.

3.9. Zij $C = co(x_1,\ldots,x_n)$ een convex polytoop in V. Is $x_1 \in co(x_2,\ldots,x_n)$, dan is $C = co(x_2,\ldots,x_n)$ (vgl. par. 3.4, eigenschap (e)); is ook $x_2 \in$ $\in co(x_3,\ldots,x_n)$, dan is $C = co(x_3,\ldots,x_n)$; is $x_1 \notin co(x_2,\ldots,x_n)$ en $x_2 \in co(x_1,x_3,\ldots,x_n)$, dan is $C = co(x_1,x_3,\ldots,x_n)$, enz. We concluderen dat er een deelverzameling $\{a_1,\ldots,a_k\}$ van $\{x_1,\ldots,x_n\}$ bestaat met de volgende eigenschappen:

$$(*)\qquad \begin{cases} (1)\ C = co(a_1,\ldots,a_k) \\ (2)\ \text{Geen enkele } a_i \text{ is een convexe combinatie van} \\ \quad a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_k. \end{cases}$$

We noemen $a_1,\ldots,a_k$ de *hoekpunten* van C; de verzameling der hoekpunten is door (*) eenduidig bepaald (ga na).

3.10. DEFINITIE. Zij $A \subset V$, $a \in A$. a heet een *extremaalpunt* van A als a geen inwendig punt is van een in A gelegen lijnstuk.

In het platte vlak zijn alle randpunten van een gesloten cirkelschijf extremaalpunten hiervan. *Voor convexe polytopen vallen de begrippen "hoekpunt" en "extremaalpunt" samen*; de lezer trachte hiervan zelf een bewijs te leveren.

3.11. DEFINITIE. Zij $x_1,x_2,\ldots,x_n \in V$. $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ heet een *affien onafhankelijk stelsel* indien

$$\dim(aff(x_1,x_2,\ldots,x_n)) = n-1.$$

Een onmiddellijk gevolg van deze definitie is de volgende (door de lezer te bewijzen) stelling.

STELLING. *Voor* $x_1,x_2,\ldots,x_n \in V$ *zijn de volgende voorwaarden equivalent:*

(a) $(x_1,\ldots,x_n)$ *is affien onafhankelijk.*

(b) *Voor elke* j *is het door de* x_i-x_j *(waarin* $i \neq j$*) gevormde stelsel lineair onafhankelijk.*

(c) *Uit*

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \quad\quad = 0 \end{cases} \quad (\textit{waarin } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R})$$

volgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

3.12. Een stelsel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in V dat niet affien onafhankelijk is noemen we affien afhankelijk.

Men bewijst eenvoudig (bijvoorbeeld met behulp van de in par. 3.11 genoemde voorwaarde (b)) de volgende uitspraken:

(a) Is $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ affien onafhankelijk, dan is elke $x \in \mathrm{aff}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ op precies één manier te schrijven als affiene combinatie van $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(b) Is $A \subset V$, $\dim(A) = n$ en $k < n+1$, dan is elk affien onafhankelijk k-tal elementen van A aan te vullen tot een affien onafhankelijk (n+1)-tal elementen van A.

(c) Voor elke $A \subset V$ met $\dim(A) < \infty$ is $\dim(A)$ het maximale aantal elementen dat kan voorkomen in een affien onafhankelijk stelsel in A, verminderd met één.

3.13. We beschouwen het analogon van een lijnstuk in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$, een driehoek in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$, een viervlak in $\mathbb{R}^3$:

DEFINITIE. Een k-*simplex* in V is het convexe omhulsel van een affien onafhankelijk (k+1)-tal punten van V.

De dimensie van een k-simplex is k. Is $C := \mathrm{co}(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ een k-simplex in V, dan zijn $a_0, a_1, \ldots, a_k$ de hoekpunten van C (vgl. par. 3.9); iedere $x \in C$ is dan op eenduidige wijze te schrijven als convexe combinatie van $a_0, a_1, \ldots, a_k$, en iedere $x \in \mathrm{aff}(C) (= \mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_k))$ is dan op eenduidige wijze te schrijven als affiene combinatie $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i$ van $a_0, a_1, \ldots, a_k$ (waarbij de λ_i de *barycentrische coördinaten* van x t.o.v. $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ heten).

ALGEBRAÏSCH INWENDIGE EN ALGEBRAÏSCHE AFSLUITING

3.14. We definiëren nu voor $A \subset V$ een tweetal deelverzamelingen van V die, zoals in het volgende zal blijken, een zeker analogon vormen van het inwendige en de afsluiting van A voor het geval dat V van een topologie voorzien is (vgl. stelling 3.27).

DEFINITIES.

(a) Het *algebraïsch inwendige* A^i van A is de verzameling van alle algebraïsch inwendige punten van A, dat zijn de punten $x \in A$ met de eigenschap dat voor elke lijn m door x geldt: er zijn $x_1,x_2 \in m \cap A$ met $x \in \langle x_1,x_2\rangle$.

(b) De *algebraïsche afsluiting* A^a van A is de vereniging van A en de verzameling van alle $x \in V$ waarvoor een $c \in A$ bestaat zó dat $[c,x\rangle \subset A$.

OPMERKINGEN.

(a) Voor alle $x \in A$ geldt:
$$x \in A^i \Leftrightarrow (\forall v \in V)(\exists\delta > 0)[x-\delta v,x+\delta v] \subset A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall v \in V)(\exists\delta > 0)[x,x+\delta v] \subset A.$$

(b) Bestaat A uit één punt, dan is $A^a \setminus A = \emptyset$.

(c) Men kan bewijzen dat voor elke convexe $C \subset V$ geldt $(C^i)^i = C^i$ (zie par. 3.22); echter geldt *niet* altijd $(C^a)^a = C^a$.

3.15. STELLING. *Is* $C \subset V$ *convex, dan zijn* C^i *en* C^a *convex.*

BEWIJS.

(a) Zij $x,y \in C^i$, $\lambda \in \langle 0,1\rangle$, $z = \lambda x+(1-\lambda)y$, en $v \in V$. Er is $\delta > 0$ zó dat $[x,x+\delta v] \subset C$ en $[y,y+\delta v] \subset C$. Wegens de convexiteit van C geldt $z+\delta v = \lambda(x+\delta v) + (1-\lambda)(y+\delta v) \in C$, dus $[z,z+\delta v] \subset C$; er volgt dat $z \in C^i$.

(b) Zij $x,y \in C^a$, $\lambda \in \langle 0,1\rangle$, $z = \lambda x+(1-\lambda)y$; er zijn $c_1,c_2 \in C$ met $[c_1,x\rangle \subset C$ en $[c_2,y\rangle \subset C$. Is $c = \lambda c_1+(1-\lambda)c_2$, dan is $[c,z\rangle \subset C$, immers: is $\mu \in \langle 0,1\rangle$, dan is $\mu c+(1-\mu)z = \mu[\lambda c_1+(1-\lambda)c_2] + (1-\mu)[\lambda x+(1-\lambda)y] = \lambda[\mu c_1+(1-\mu)x] + (1-\lambda)[\mu c_2+(1-\mu)y] \in C$. Er volgt dat $z \in C^a$.

3.16. STELLING. *Zij* $C \subset V$ *convex,* $x \in C^i$, $y \in C^a$. *Dan is* $[x,y\rangle \subset C^i$.

BEWIJS. Zij $\lambda \in \langle 0,1\rangle$, $z = \lambda x+(1-\lambda)y$.
Veronderstel eerst dat $y \in C$. Zij $v \in V$. Er is $\delta > 0$ zó dat $[x,x+\delta v] \subset C$. Dan is $[z,z+\lambda\delta v] \subset C$, immers $z + \lambda\delta v = \lambda(x+\delta v)+(1-\lambda)y \in C$.

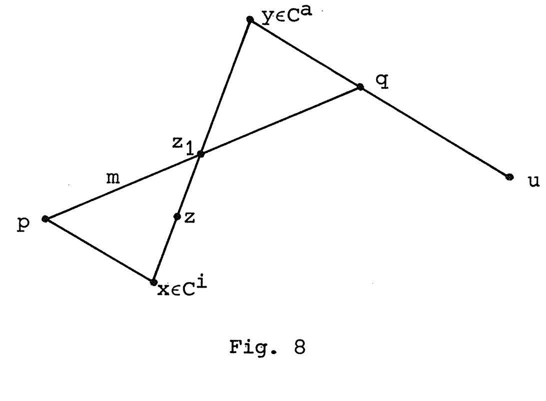

Fig. 8

Veronderstel nu dat $y \in C^a \backslash C$; kies $z_1 \in \langle z,y \rangle$. Er is $\mu \in C$ zó dat $[u,y\rangle \subset C$; er is $\delta > 0$ zó dat $p = x-\delta(u-y) \in C$. We veronderstellen dat x, y, p en u niet collineair zijn (bekijk zelf het geval van collineariteit). Zij m de lijn door p en z_1. Kiezen we δ voldoende klein, dan wordt $[u,y\rangle$ door m in een punt q gesneden (ga na; vgl. fig. 8); uit $p,q \in C$ volgt $z_1 \in C$. Volgens het eerder bewezene is nu $[x,z_1\rangle \subset C^i$; er volgt dat $z \in C^i$.

3.17. VOORBEELDEN. Onderstaande voorbeelden tonen aan dat oneindigdimensionale convexe verzamelingen een opmerkelijke structuur kunnen hebben.

(a) Zij V een lineaire ruimte met een aftelbare basis $\{x_1,x_2,x_3,\ldots\} = B$. Zij $C = co(\{0\} \cup B)$. Er geldt $aff(C) = V$, maar C heeft geen enkel algebraïsch inwendig punt: zij

$$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

een punt van C, waarbij $\lambda_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq k)$ en $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq 1$ (vgl. stelling 3.3). Beschouw de rechte m door z en x_N, waarbij $N > k$; er geldt $m \cap C = [z,x_N]$ (ga na), dus $z \notin C^i$.

(b) Zij V als in voorbeeld (a). Zij C de verzameling van alle punten van V van de vorm

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

waarin $k \in \mathbb{N}$ en $\lambda_k > 0$; C is een convexe echte deelverzameling van V. We bewijzen dat $C^a = V$: is

$$z = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i \in V$$

dan kiezen we $N > m$; er geldt nu $[x_N,z\rangle \subset C$ (ga na). Bewijs zelf dat $C^i = \emptyset$, en dat het complement D van C in V ook convex is en eveneens voldoet aan $D^a = V, D^i = \emptyset$.

CONVEXE ALGEBRAÏSCHE LICHAMEN

3.18. DEFINITIE. Een *convex algebraïsch lichaam* in V is een convexe $C \subset V$ waarvoor geldt $C^i \neq \emptyset$.

3.19. Zij $C \subset V$ een convex algebraïsch lichaam. Dan is voor elke $a \in V$ ook

$a+C$ een convex algebraïsch lichaam. Is $0 \in C^i$, dan is er voor elke $x \in V$ een $\delta > 0$ zó dat $[0,\delta x] \subset C$, dus $x \in \frac{1}{\delta}C$; we definiëren:

DEFINITIE. Zij $C \subset V$ een convex algebraïsch lichaam waarvoor geldt $0 \in C^i$. Het *juk* (ook: de *Minkowski-functionaal*) van C is de functie $p : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$p(x) = \inf\{\lambda \geq 0 | x \in \lambda C\} \qquad (x \in V).$$

OPMERKING. Is V een genormeerde lineaire ruimte en is C de eenheidsbol daarin, dan is $p(x)$ de afstand van 0 tot x.

3.20. STELLING. *Zij* p *het juk van een convex algebraïsch lichaam* $C \subset V$ *waarvoor geldt* $0 \in C^i$. *Dan geldt voor alle* $x,y \in V$:

(a) $p(x) \geq 0$.

(b) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *als* $\lambda \geq 0$ ("p *is positief homogeen*").

(c) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ ("p *is subadditief*").

BEWIJS.

(a) is triviaal.

(b) volgt uit: als $\lambda > 0$, dan is $\{\mu \geq 0 | \lambda x \in \mu C\} = \lambda\{\mu \geq 0 | x \in \mu C\}$.

(c) Zij $p(x) = \alpha$, $p(y) = \beta$. Voor alle $\varepsilon > 0$ is $x \in (\alpha+\varepsilon)C$, $y \in (\beta+\varepsilon)C$, dus $x+y \in (\alpha+\beta+2\varepsilon)C$ (vgl. par. 3.4, eigenschap (b)). Er volgt dat

$$(\forall \varepsilon > 0)\, p(x+y) \leq \alpha+\beta+2\varepsilon = p(x)+p(y)+2\varepsilon$$

dus $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$.

3.21. Van een convex algebraïsch lichaam kan men met behulp van zijn juk een eenvoudige karakterisering geven van C^i en C^a:

STELLING. *Zij* $C \subset V$ *een convex algebraïsch lichaam waarvoor geldt* $0 \in C^i$, *met juk* p. *Dan geldt* $C^i = (C^i)^i = (C^a)^i = \{x \in V | p(x) < 1\}$ *en* $C^a = (C^a)^a = (C^i)^a = \{x \in V | p(x) \leq 1\}$.

BEWIJS. Allereerst merken we op dat voor alle $x \in C$ geldt $p(x) \leq 1$, terwijl uit $x \in V$, $p(x) < 1$ volgt $x \in C$.

Zij $x,y \in V$, $p(x) < 1$. Voor voldoende kleine $\delta > 0$ geldt $p(x+\delta y) \leq p(x)+\delta p(y) < 1$, dus $[x,x+\delta y] \subset C$; er volgt dat $x \in C^i$. Hieruit volgt weer

$[x,x+\delta y] \subset C^i$, dus $x \in (C^i)^i$. We concluderen:

(1) $\qquad p(x) < 1 \;\Rightarrow\; x \in (C^i)^i.$

Is $p(x) = 1$, dan geldt voor alle $z \in [0,x\rangle$: $p(z) < 1$, dus $[0,x\rangle \subset C$. Er volgt dat $x \in C^a$, en zelfs $x \in (C^i)^a$. Bovendien is $x \notin C^i$, immers uit $x \in C^i$ volgt dat er $\lambda > 1$ is zó dat $\lambda x \in C$ ofwel $\lambda p(x) = p(\lambda x) \leq 1$, dus $p(x) < 1$. We concluderen:

(2) $\qquad p(x) = 1 \;\Rightarrow\; x \in (C^i)^a \backslash C^i.$

Zij omgekeerd $x \in C^a$, $[z,x\rangle \subset C$. Voor alle $\lambda \in [0,1\rangle$ geldt $\lambda x+(1-\lambda)z = z+\lambda(x-z) \in C$, dus $p(z+\lambda(x-z)) \leq 1$; uit $p(x) \leq p(z+\lambda(x-z))+(1-\lambda)p(x-z) \leq 1+(1-\lambda)p(x-z)$ volgt via de limietovergang $\lambda \uparrow 1$: $p(x) \leq 1$. Een analoge redenering, toegepast op C^a, levert:

(3) $\qquad x \in (C^a)^a \;\Rightarrow\; p(x) \leq 1.$

Uit (1) en (2) volgt: $C^i = (C^i)^i = \{x \in V | p(x) < 1\}$; uit (1), (2) en (3) volgt: $C^a = (C^a)^a = (C^i)^a = \{x \in V | p(x) \leq 1\}$.
Tenslotte beschouwen we $(C^a)^i$. Is $x \in (C^a)^i$, dan is er $\lambda > 1$ zó dat $\lambda x \in C^a$, dus $\lambda p(x) = p(\lambda x) \leq 1$ waaruit volgt dat $p(x) < 1$. Met behulp van het eerder bewezene volgt dat $(C^a)^i = \{x \in V | p(x) < 1\}$.

3.22 OPMERKINGEN.

(a) Voor het geval dat C een convex algebraïsch lichaam is waarvan niet 0, maar $x_0 \neq 0$ een algebraïsch inwendig punt is, geldt een analogon van bovenstaande stelling, met vervanging van $p(x)$ door $p(x-x_0)$ waarbij p het juk van $C-x_0$ is.

(b) Naar analogie van de definities van enkele topologische begrippen noemen we $C^a \backslash C^i = \{x \in V | p(x) = 1\}$ wel de algebraïsche rand van C, en noemen we C algebraïsch open resp. gesloten als $C = C^i$ resp. $C = C^a$.

(c) Is $C \subset V$ convex en is $C^i = \emptyset$, dan is ook $(C^i)^i = \emptyset$. Er volgt dat voor *alle* convexe $C \subset V$ geldt $(C^i)^i = C^i$ (vgl. par. 3.14, opmerking (c)).

(d) Convexe algebraïsche lichamen vertonen over het algemeen een minder pathologisch gedrag dan convexe verzamelingen zonder algebraïsch inwendig punt. Zo is $C \neq V$, $C^a = V$ (hetgeen geldt in par. 3.17, voorbeeld (b)) onmogelijk als $C^i \neq \emptyset$. Zij namelijk $x_0 \in C^i$ en $C^a = V$. Volgens par. 3.21

is dan $V = \{x \in V | p(x-x_0) \leq 1\}$ waarin p het juk van $C-x_0$ is, dus $(\forall x \in V)p(x-x_0) = 0$ (ga na); er volgt dat $C = V$.

(e) Meer over verzamelingen als C^i en C^a vindt men in:

J. BAIR/R. FOURNEAU, *Étude géométrique des espaces vectoriels*, Springer, Berlin 1975 (Lecture Notes in Mathematics no. 489).

CONVEXE DEELVERZAMELINGEN VAN EEN TOPOLOGISCHE LINEAIRE RUIMTE

In het volgende is E een topologische lineaire ruimte over $\mathbb{R}$, dat is een lineaire ruimte (over $\mathbb{R}$) voorzien van een topologie waarvoor de afbeeldingen $(x,y) \mapsto x+y$ en $(\lambda,x) \mapsto \lambda x$ van resp. $E \times E$ en $\mathbb{R} \times E$ in E continu zijn; voor het gemak veronderstellen we dat E niet-triviaal is, d.w.z. uit meer dan één element bestaat, en dat de topologie op E gesepareerd (Hausdorffs) is.
Er geldt: Is $U \subset E$ open, dan zijn ook λU (wwarin $\lambda \in \mathbb{R}$) en $a + U$ (waarin $a \in E$) open; is ook $V \subset E$ open, dan is $U + V$ open.

3.23. STELLING. *Zij* $C \subset E$ *convex. Dan geldt:*

(a) int(C) *en* $\overline{C}$ *zijn convex (vgl. stelling* 3.15).

(b) *Is* $x \in \text{int}(C)$ *en* $y \in \overline{C}$, *dan is* $[x,y\rangle \subset \text{int}(C)$ (*vgl. stelling* 3.16).

(c) $\text{int}(C) \subset C^i$.

(d) $C^a \subset \overline{C}$.

BEWIJS.

(a) Zij $x_0, y_0 \in \overline{C}$, $\lambda \in \langle 0,1\rangle$, $z_0 = \lambda x_0+(1-\lambda)y_0$. Zij U een omgeving van z_0. Wegens de continuïteit van de afbeelding $(x,y) \mapsto \lambda x+(1-\lambda)y$ zijn er omgevingen U_1 en U_2 van resp. x_0 en y_0 met $\lambda U_1+(1-\lambda)U_2 \subset U$.
Wegens $x_0,y_0 \in \overline{C}$ zijn er $c_1 \in U_1 \cap C$, $c_2 \in U_2 \cap C$; er volgt dat $\lambda c_1+(1-\lambda)c_2 \in U \cap C$. We concluderen dat $z_0 \in \overline{C}$. De convexiteit van int(C) volgt uit (b).

(b) Vooraf merken we op: is U een omgeving van $a \in E$ en is $b \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dan is $b+\lambda(U-a)$ een omgeving van b. Zij $x_0 \in \text{int}(C)$, $y_0 \in \overline{C}$, $\lambda \in \langle 0,1\rangle$, $z_0 = \lambda x_0+(1-\lambda)y_0$. Zij U een omgeving van x_0 met $U \subset C$; dan is $W = \frac{1}{1-\lambda}(z_0-\lambda U)$ een omgeving van y_0. Wegens $y_0 \in \overline{C}$ is er $c \in W \cap C$; stel $c = \frac{1}{1-\lambda}(z_0-\lambda u)$ waarin $u \in U$, dus $z_0 = (1-\lambda)c+\lambda u$. Dan is $X = (1-\lambda)c+\lambda U$ een omgeving van z_0, terwijl wegens de convexiteit van C geldt $X \subset C$.

(c) Zij $x_0 \in \text{int}(C)$, $y_0 \in E$; zij U een omgeving van x_0 met $U \subset C$. Uit de continuïteit van de afbeelding $\lambda \mapsto x_0+\lambda y_0$ in 0 volgt dat er $\delta > 0$ is zó dat voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ met $|\lambda| \leq \delta$ geldt $x_0+\lambda y_0 \in U$; er volgt dat

$[x_0,x_0+\delta y_0] \subset U \subset C$, dus $x_0 \in C^i$.

(d) Er geldt $C \subset \bar{C}$. Stel nu $y_0 \in C^a\backslash C$, $[x_0,y_0\rangle \subset C$; zij U een omgeving van y_0. Uit de continuïteit van de afbeelding $\lambda \mapsto \lambda x_0+(1-\lambda)y_0$ in 0 volgt dat er $\delta > 0$ is zó dat voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ met $|\lambda| \leq \delta$ geldt $\lambda x_0+(1-\lambda)y_0 \in U$; er volgt dat $U \cap C \neq \emptyset$. We concluderen dat $y_0 \in \bar{C}$.

3.24. STELLING. *Is* $A \subset E$ *open, dan is* $\text{co}(A)$ *open.*

BEWIJS. Er geldt

$$A = \text{int}(A) \subset \text{int}(\text{co}(A)).$$

Volgens stelling 3.23 is int $(\text{co}(A))$ convex; er geldt dus

$$\text{co}(A) \subset \text{int}(\text{co}(A))$$

waaruit het gestelde volgt.

OPMERKING. Er geldt *niet*: A is gesloten $\Rightarrow$ $\text{co}(A)$ is gesloten. Geef zelf een tegenvoorbeeld in $\mathbb{R}^2$ (vgl. par. 5.3).

3.25. De doorsnede van alle deelverzamelingen van E die gesloten en convex zijn en die een deel A van E bevatten is de kleinste deelverzameling van E met deze eigenschappen. We definiëren:

DEFINITIE. Zij $A \subset E$. Het *gesloten convexe omhulsel* $\overline{\text{co}}(A)$ van A is de kleinste gesloten convexe deelverzameling van E die A bevat.

Volgens stelling 3.23(a) is $\overline{\text{co}}(A) = \overline{\text{co}(A)}$.

3.26. DEFINITIE. Een *convex lichaam* in E is een convexe $C \subset E$ waarvoor geldt $\text{int}(C) \neq \emptyset$.

Uit stelling 3.23(c) volgt dat een convex lichaam ook een convex algebraïsch lichaam is; het omgekeerde is niet waar (vgl. hoofdstuk IV, opgave 4).

3.27. STELLING. *Zij* $C \subset E$ *een convex lichaam. Dan geldt:*

(a) $\text{int}(C) = \text{int}(\bar{C}) = C^i$.

(b) $\bar{C} = \overline{\text{int}(C)} = C^a$.

BEWIJS.

(a) Zij $x \in \mathrm{int}(C)$, $y \in C^i$. Er is z met $y \in \langle z,x\rangle$ en $[z,y] \subset C$; volgens stelling 3.23(b) geldt $\langle z,x\rangle \subset \mathrm{int}(C)$, dus $y \in \mathrm{int}(C)$. We concluderen dat $C^i \subset \mathrm{int}(C)$; met stelling 3.23(c) volgt dat $C^i = \mathrm{int}(C)$. Zij vervolgens $x \in \mathrm{int}(C)$, $y \in \mathrm{int}(\bar{C})$. Er is z met $y \in \langle z,x\rangle$ en $[z,y] \subset \bar{C}$, dus $z \in \bar{C}$; volgens stelling 3.23(b) geldt $y \in \mathrm{int}(C)$. Er volgt dat $\mathrm{int}(C) = \mathrm{int}(\bar{C})$.

(b) Zij $x \in \mathrm{int}(C)$, $y \in \bar{C}$. Volgens stelling 3.23(b) is $[x,y\rangle \subset \mathrm{int}(C)$, dus $y \in C^a$ en $y \in \overline{\mathrm{int}(C)}$. Er volgt dat $\bar{C} = \overline{\mathrm{int}(C)}$; verder volgt met stelling 3.23(d) dat $\bar{C} = C^a$.

OPGAVEN

Neem V en E als in het voorafgaande.

1. Zij $A \subset V$ convex, $x \in V\backslash A$. Bewijs dat

$$\bigcup_{a\in A}[x,a]$$

convex is.

2. In $\mathbb{R}^2$ is $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Bewijs dat

$$\mathrm{co}(e_1,e_2,-e_1,-e_2) = \{(\xi_1,\xi_2) \mid |\xi_1|+|\xi_2| \le 1\}.$$

3. Zij d de euclidische metriek op $\mathbb{R}^n$, en zij $C \subset \mathbb{R}^n$ convex. Bewijs: voor elke $\varepsilon > 0$ is $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x,C) \le \varepsilon\}$ convex.
4. Zij $C \subset V$ convex. Bewijs dat

$$\mathrm{aff}(C) = C + \bigcup_{n=1}^{\infty} n(C-C).$$

5. Bewijs dat de verzameling der hoekpunten van een convex polytoop eenduidig bepaald is (vgl. par. 3.9).
6. Bewijs dat de deelverzameling

$$C = \{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)|\xi_i \ge 0(1\le i\le n) \text{ en } \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1\}$$

van $\mathbb{R}^n$ een convex polytoop is, en bepaal de hoekpunten van C.
7. Bewijs dat voor een convex polytoop de verzameling der hoekpunten samenvalt met die der extremaalpunten (vgl. par. 3.10).

8. Bewijs dat in par. 3.17, voorbeeld (b) geldt: D is convex, en $C^i = D^i = \emptyset$, $D^a = V$.

9. Zij p een functie $V \to \mathbb{R}$ met de in stelling 3.20 genoemde eigenschappen (a), (b) en (c). Bewijs dat $\{x \in V | p(x) < 1\}$ en $\{x \in V | p(x) \leq 1\}$ algebraïsch open resp. gesloten convexe algebraïsche lichamen zijn, met 0 als algebraïsch inwendig punt en met juk p.

10. Zij p het juk van een convexe $C \subset V$ met $0 \in C^i$. Bewijs dat voor alle $x \in V$ geldt: $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of de halfrechte door x met eindpunt 0 ligt geheel in C.

11. Zij p het juk van een convexe $C \subset E$ met $0 \in C^i$. Bewijs: C is een convex lichaam $\Leftrightarrow$ p is continu. Bewijs met behulp hiervan nogmaals (vgl. stelling 3.27) dat voor een convex lichaam $C \subset E$ geldt $\mathrm{int}(C) = C^i$ en $\bar{C} = C^a$.

12. Zij $A \subset E$ gesloten en niet convex. Bewijs dat er $x,y \in A$ zijn met $A \cap \langle x,y \rangle = \emptyset$.

13. Laten $C_1, C_2, \ldots C_n \subset E$ convex zijn, terwijl $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{int}(C_i) \neq \emptyset$. Bewijs dat $\overline{\cap \mathrm{int}(C_i)} = \cap \bar{C}_i$.

IV. SCHEIDINGSSTELLINGEN

DE SCHEIDINGSSTELLING IN EEN LINEAIRE RUIMTE

Zij V een niet-triviale lineaire ruimte over $\mathbb{R}$.

4.1. STELLING. *Laten* $A,B \subset V$ *convex zijn, terwijl* $A \cap B = \emptyset$. *Dan zijn er convexe* $C,D \subset V$ *met* $C \cup D = V$, $C \cap D = \emptyset$, $C \supset A$, $D \supset B$.

BEWIJS. Zij M de verzameling van alle geordende paren convexe deelverzamelingen (P,Q) van V met $P \cap Q = \emptyset$, $P \supset A$, $Q \supset B$. We voorzien M als volgt van een partiële ordening $\leq$: $(P_1,Q_1) \leq (P_2,Q_2)$ als $P_1 \subset P_2$ en $Q_1 \subset Q_2$. Elke lineair geordende deelverzameling $\{(P_\alpha,Q_\alpha)\}$ van M heeft een bovengrens in M, namelijk $(\bigcup_\alpha P_\alpha, \bigcup_\alpha Q_\alpha)$; volgens het lemma van Zorn heeft M dus een maximaal element (C,D). C en D voldoen aan $C \supset A$, $D \supset B$, $C \cap D = \emptyset$; bovendien geldt $C \cup D = V$, immers, was er $x \in V$, $x \notin C \cup D$, dan zou gelden $\mathrm{co}(\{x\} \cup C) \cap D = \emptyset$ of $\mathrm{co}(\{x\} \cup D) \cap C = \emptyset$ (ga na), en dan was (C,D) geen maximaal element van P.

4.2. Onder een *hypervlak* in V verstaan we een deelverzameling H van V van de vorm $H = a+L$ waarin $a \in V$, terwijl L een lineaire deelruimte van V met codimensie 1 is, d.w.z.: er is $p \in V$, $p \notin L$ zó dat $V = L+\mathbb{R}p$ $(=\{\ell+\lambda p | \ell \in L,$

$\lambda \in \mathbb{R}\}$). We definiëren $f : V \to \mathbb{R}$ als volgt: is $x \in V, x = \ell+\lambda p$, dan is $f(x) = \lambda$; f is lineair, en $H = f^{-1}(f(a)) := \{x \in V \mid f(x) = f(a)\}$ (ga na). Is, omgekeerd, $f : V \to \mathbb{R}$ lineair met $f \neq 0$ en is $\alpha \in \mathbb{R}$, dan is $f^{-1}(\alpha)$ een hypervlak : er is $p \in V$ met $f(p) = 1$; is $x \in V$, dan is $f(x-f(x)p) = 0$ dus $x-f(x)p \in f^{-1}(0)$ ofwel $x \in f^{-1}(0)+f(x)p$. Er volgt dat $V = f^{-1}(0)+\mathbb{R}p$, dus $f^{-1}(0)$ (een lineaire deelruimte van V) heeft codimensie 1. Tenslotte is $f^{-1}(\alpha) = \alpha p+f^{-1}(0)$ (ga na), dus $f^{-1}(\alpha)$ is een hypervlak. We concluderen: H is een hypervlak in $V \Leftrightarrow$ er zijn een lineaire $f : V \to \mathbb{R}$ met $f \neq 0$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ zó dat $H = f^{-1}(\alpha)$.

4.3. STELLING. *Laten* $C,D \subset V$ *convex en niet-leeg zijn, met* $C \cap D = \emptyset$, $C \cup D = V$. *Zij* $H = C^a \cap D^a$. *Dan geldt:* H *is een hypervlak of* $H = V$.

BEWIJS. We merken eerst op dat uit het gegeven volgt: $x \in V$, $x \notin C^a \Rightarrow x \in D^i$; dus $V = H \cup C^i \cup D^i$.
Zij $x,y \in H$; volgens stelling 3.15 is H convex, dus $[x,y] \subset H$. Is z een punt van de lijn door x en y met $z \notin [x,y]$, dan is $y \in \langle x,z\rangle$ of $x \in \langle y,z\rangle$. Stel $y \in \langle x,z\rangle$, en stel dat $z \notin H$. Dan is $z \in C^i \cup D^i$, bijvoorbeeld: $z \in C^i$. Toepassing van stelling 3.16 op x en z levert $y \in C^i$, hetgeen in tegenspraak is met $y \in D^a$. Er volgt dat $z \in H$, dus dat H een lineaire variëteit is.
Voor het volgende merken we op: is $x \in C$, $y \in D$, dan is $[x,y] \cap C^a \cap D^a \neq \emptyset$ (ga na), dus $[x,y] \cap H \neq \emptyset$.
Stel nu $H \neq V$, $a \in V\backslash H$. Zij $h \in H$; we gaan bewijzen dat de lineaire deelruimte $H-h$ van V codimensie 1 heeft (waaruit volgt dat H een hypervlak is). Er geldt $a \in C^i \cup D^i$, bijvoorbeeld: $a \in C^i$. Verder is $2h-a \notin H$, dus $2h-a \in C^i \cup D^i$. (vgl. fig. 9) Stel $2h-a \in C^i$;

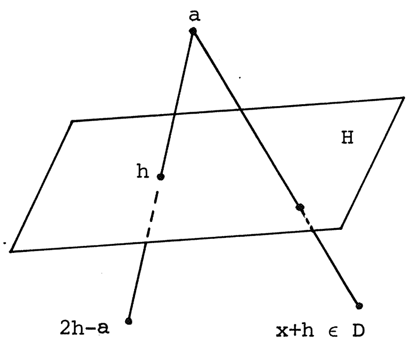

Fig. 9

aangezien $a \in C^i$ volgt dan (wegens de convexiteit van C^i, zie stelling 3.15) dat $h \in C^i$, hetgeen onmogelijk is. We concluderen dat $2h-a \in D^i$.

Zij nu $x \in V$; er geldt $x+h \in C \cup D$. Is $x+h \in C$, dan is $[x+h,2h-a] \cap H \neq \emptyset$; er zijn dan $\lambda \in \langle 0,1]$ en $v \in H$ met $\lambda(x+h)+(1-\lambda)(2h-a) = v$ ofwel $x = (\frac{1}{\lambda}-1)(a-h)+ +\frac{1}{\lambda}(v-h)$. Is $x+h \in D$, dan is $[x+h,a] \cap H \neq \emptyset$; er zijn dan $\lambda \in \langle 0,1]$ en $v \in H$ met $\lambda(x+h)+(1-\lambda)a = v$ ofwel $x = (\frac{1}{\lambda}-1)(h-a)+\frac{1}{\lambda}(v-h)$. In beide gevallen zijn er $\sigma \in \mathbb{R}$ en $y \in H-h$ zó dat $x = \sigma(a-h)+y$; er volgt dat $V = (H-h)+\mathbb{R}(a-h)$, dus dat $H-h$ codimensie 1 heeft.

<u>4.4.</u> In het volgende betekent "$f(A) < \alpha$" : $(\forall x \in A) f(x) < \alpha$.
We zeggen dat een hypervlak $H = f^{-1}(\alpha)$ in V de deelverzamelingen A en B van V

(a) *scheidt* indien $f(A) \leq \alpha$ en $f(B) \geq \alpha$ ofwel $f(A) \geq \alpha$ en $f(B) \leq \alpha$;

(b) *echt scheidt* indien A en B door H gescheiden worden en niet beide in H bevat zijn (er is dus $x \in A \cup B$ met $f(x) \neq \alpha$);

(c) *strikt scheidt* indien $f(A) < \alpha$ en $f(B) > \alpha$ ofwel $f(A) > \alpha$ en $f(B) < \alpha$.

<u>4.5. STELLING (SCHEIDINGSSTELLING)</u>. *Laten* $A,B \subset V$ *convex zijn, met* $A \neq \emptyset$, $B^i \neq \emptyset$, $A \cap B^i = \emptyset$. *Dan is er een hypervlak in* V *dat* A *en* B *echt scheidt.*

<u>BEWIJS</u>. Volgens stelling 4.1 zijn er convexe $C,D \subset V$ met $C \cup D = V$, $C \cap D = \emptyset$, $C \supset A$, $D \supset B^i$. Uit $B^i \neq \emptyset$ en $B^i \cap C^a = \emptyset$ (gebruik bijvoorbeeld stelling 3.16) volgt dat $C^a \cap D^a \neq V$ (ga na); volgens stelling 4.3 is $C^a \cap D^a$ een hypervlak, dat we H noemen. Zij $H = f^{-1}(\alpha)$; uit $B^i \cap H = \emptyset$ volgt dat er $b \in B^i$ is met $f(b) \neq \alpha$, bijvoorbeeld: $f(b) > \alpha$. Stel dat er $x \in B$ is met $f(x) < \alpha$. Volgens stelling 3.16 is dan $\langle x,b] \subset B^i$; anderzijds is er $z \in \langle x,b\rangle$ met $f(z) = \alpha$ (ga na), dus $z \in H$, hetgeen een tegenspraak levert. We concluderen dat $f(B) \geq \alpha$. Stel vervolgens dat er $x \in A$ is met $f(x) > \alpha$. Wegens $[x,b] \cap H \neq \emptyset$ is er dan $z \in \langle x,b\rangle$ met $f(z) = \alpha$; anderzijds geldt voor alle $y \in \langle x,b\rangle$, wegens $f(x) > \alpha$ en $f(b) > \alpha$: $f(y) > \alpha$, hetgeen een tegenspraak levert. We concluderen dat $f(A) \leq \alpha$. Er volgt dat A en B door H gescheiden worden; er is sprake van echte scheiding omdat er $b \in B$ is met $f(b) \neq \alpha$.

<u>OPMERKING</u>. In bovenstaande scheidingsstelling is de eis $B^i \neq \emptyset$ essentiëel: beschouw de verzameling C uit par. 3.17, voorbeeld (b), waarvoor geldt $C^i = \emptyset$. Zou er een hypervlak $H = f^{-1}(\alpha)$ zijn waarvoor geldt $f(C) \leq \alpha$, dan zou wegens $C^a = V$ gelden $f(V) \leq \alpha$, hetgeen onmogelijk is (ga na). Er volgt dat een $x \notin C$ en C niet door een hypervlak te scheiden zijn.

DE SCHEIDINGSSTELLING IN EEN TOPOLOGISCHE LINEAIRE RUIMTE

Zij E een niet-triviale topologische lineaire ruimte over $\mathbb{R}$, waarvan de topologie gesepareerd is (vgl. hoofdstuk III).

4.6. DEFINITIE. Zij $A \subset E$, $a \in A$. A heet *stervormig* t.o.v. a als voor alle $x \in A$ geldt $[a,x] \subset A$.

STELLING. *Zij* $U \subset E$ *open, en zij* $a \in U$. *Dan is er een open* $S \subset E$ *met* $S \subset U$ *die stervormig is t.o.v.* a *(ofwel: elk punt van* E *heeft een stervormige omgevingsbasis).*

BEWIJS. $W = U-a$ is een omgeving van 0; uit de continuïteit van de afbeelding $(\lambda,x) \mapsto \lambda x$ in $(0,0)$ volgt dat er $\varepsilon > 0$ en een omgeving U_0 van $0 \in E$ zijn zó dat voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ met $|\lambda| < \varepsilon$ geldt: $\lambda U_0 \subset W$.
Zij

$$X := \bigcup_{|\lambda|<\varepsilon} \lambda U_0 .$$

X is een omgeving van 0 met $X \subset W$ die stervormig is t.o.v. 0 ; er volgt dat $X+a$ een omgeving is van a met $X+a \subset U$ die stervormig is t.o.v. a.

4.7. STELLING. *Zij* $H = \overset{-1}{f}(\alpha)$ *een hypervlak in* E, *en zij* $A = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$. *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(a) H *is gesloten.*

(b) A *heeft een inwendig punt.*

(c) f *is continu.*

BEWIJS.

(a) $\Rightarrow$ (b): zij $x_0 \in A$. Aangezien H gesloten is, is er een omgeving U van x_0 met $U \cap H = \emptyset$; volgens par. 4.6 is er een t.o.v. x_0 stervormige omgeving S van x_0 met $S \subset U$. Er volgt dat $f(S) > \alpha$ (ga na), dus $S \subset A$; we concluderen dat A open is.

(b) $\Rightarrow$ (c): zij $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ en zij $x \in A$ met $x \neq x_0$. Uit $f(x_0) > \alpha$, $f(x) > \alpha$ volgt dat er $z \in A$ is zó dat $x \in \langle z,x_0\rangle$. A is convex; met stelling 3.23(b) volgt dat $x \in \mathrm{int}(A)$. We concluderen dat A open is. Zij $\langle\sigma,\tau\rangle \subset \mathbb{R}$; we bewijzen dat $\overset{-1}{f}\langle\sigma,\tau\rangle$ open is (waarmee bewezen is dat f continu is). Zij $b \in E$ zó dat $f(b) = 1$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
&f(x) \in \langle\sigma,\tau\rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sigma < f(x) < \tau \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ f(x+(\alpha-\sigma)b) = f(x)+\alpha-\sigma > \alpha \text{ en} \\
&f((\alpha+\tau)b-x) = \alpha+\tau-f(x) > \alpha \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x+(\alpha-\sigma)b \in A \text{ en } (\alpha+\tau)b-x \in A \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A-(\alpha-\sigma)b \text{ en } x \in -A+(\alpha+\tau)b.
\end{aligned}$$

Er volgt dat $f^{-1}\langle\sigma,\tau\rangle = [A-(\alpha-\sigma)b] \cap [-A+(\alpha+\tau)b]$.
Uit de openheid van A volgt die van $-A$; we concluderen dat $f^{-1}\langle\sigma,\tau\rangle$ open is.

(c) $\Rightarrow$ (a): uit de geslotenheid van $\{\alpha\}$ in $\mathbb{R}$ volgt dat $f^{-1}(\alpha)$ gesloten is.

OPMERKINGEN.

(a) Is $x_0 \in H$, dan is $\{x \in E \mid f(x) < \alpha\} = 2x_0-A$; er geldt dus: A heeft een inwendig punt $\Leftrightarrow$ $\{x \in E \mid f(x) < \alpha\}$ heeft een inwendig punt.

(b) Voor elk hypervlak $H = f^{-1}(\alpha)$ is $\bar{H}$ een lineaire variëteit; voor de codimensie codim$(\bar{H})$ van $\bar{H}$ geldt

$$\mathrm{codim}(\bar{H}) \le \mathrm{codim}(H) = 1.$$

Is H niet gesloten (dus f niet continu), dan is $H \neq \bar{H}$ dus $\mathrm{codim}(\bar{H}) = 0$ ofwel $\bar{H} = E$: H ligt dan *dicht in* E.

(c) Elke lineaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is continu (in $\mathbb{R}^n$ is elk hypervlak gesloten). We geven een voorbeeld van een niet continue lineaire $f : E \to \mathbb{R}$: zij $[a,b] \subset \mathbb{R}$, en zij E de lineaire ruimte van alle differentieerbare functies $x: [a,b] \to \mathbb{R}$, voorzien van de supnorm

$$\|x\| = \sup_{a\le t\le b} |x(t)| \quad (x \in E).$$

De afbeelding $f : E \to \mathbb{R}$ gedefiniëerd door

$$f(x) = x'_+(a)$$

is lineair maar niet continu (ga na).

4.8. STELLING (SCHEIDINGSSTELLING). *Laten* $A,B \subset E$ *convex zijn, met* $A \neq \emptyset$, $\mathrm{int}(B) \neq \emptyset$, $A \cap \mathrm{int}(B) = \emptyset$. *Dan is er een gesloten hypervlak in* E *dat* A *en* B *echt scheidt.*

BEWIJS. Volgens stelling 3.27(a) is $\mathrm{int}(B) = B^i$; toepassing van stelling 4.5 leert dat er een hypervlak $H = f^{-1}(\alpha)$ in E is dat A en B echt scheidt. Zij, bijvoorbeeld, $f(B) \ge \alpha$; er volgt dat $f(\mathrm{int}(B)) > \alpha$ (ga na). Toepassing van stelling 4.7 leert dat H gesloten is.

4.9. Stelling 4.8 is één van de vormen waarin de zogenaamde stelling van Hahn-Banach kan worden gepresenteerd. De bekendste, in de lineaire analyse gebruikte, vorm van deze stelling spreekt zich uit over het bestaan van een voortzetting van een op een lineaire deelruimte van E gedefinieerde continue lineaire functie (vaak nog genoemd: functionaal). Wij presenteren hier alleen nog een meetkundige vorm ervan:

STELLING. *Zij* $C \subset E$ *een convex lichaam, en zij* M *een lineaire variëteit in* E *met* $M \neq \emptyset$ *en* $M \cap \mathrm{int}(C) = \emptyset$. *Dan is er een gesloten hypervlak dat* C *en* M echt *scheidt en dat* M *bevat.*

BEWIJS. Volgens stelling 4.8 is er een gesloten hypervlak $H = f^{-1}(\alpha)$ in E dat C en M echt scheidt. Zij $m \in M$ en $f(m) = \beta$; bewijs nu zelf dat het gesloten hypervlak $f^{-1}(\beta)$ C en M echt scheidt en M bevat.

4.10. TOEPASSING: STUTHYPERVLAKKEN. Zij $A \subset E$, $x \in \mathrm{fr}(A)$. Een hypervlak $H = f^{-1}(\alpha)$ in E heet een *stuthypervlak* van A in x indien $x \in H$ terwijl $f(A) \geq \alpha$ of $f(A) \leq \alpha$ (we zeggen: A ligt aan één kant van H). H heet een *echt* stuthypervlak van A als $A \not\subset H$.

STELLING. *Zij* $C \subset E$ *een convex lichaam. Dan heeft* C *in elk van zijn randpunten een echt gesloten stuthypervlak.*

BEWIJS. Zij $x \in \mathrm{fr}(C)$. Toepassing van stelling 4.8 op C en $\{x\}$ leert dat er een gesloten hypervlak $H = f^{-1}(\alpha)$ in E is dat C en $\{x\}$ echt scheidt. Zij $f(C) \leq \alpha$ en $f(x) \geq \alpha$; uit $x \in \mathrm{fr}(C)$ volgt dat $f(x) \leq \alpha$ (ga na), dus $f(x) = \alpha$ ofwel $x \in H$. Uit $C \cup \{x\} \not\subset H$ volgt dat $C \not\subset H$; H is dus een echt gesloten stuthypervlak van C in x.

4.11. De voor de convexe analyse interessantste toepassingen van de stelling(en) van Hahn-Banach hebben betrekking op twee speciale gevallen van een topologische lineaire ruimte, te weten:

(a) *Lokaal convexe ruimten,* dat zijn topologische lineaire ruimten waarin ieder punt een omgevingsbasis heeft bestaande uit *convexe* verzamelingen (vgl. par. 4.6). Wellicht is de lezer niet op de hoogte van de theorie van deze (in de toepassingen niet zo vaak in algemene vorm voorkomende) ruimten. We zullen ons daarom hier beperken tot het meest voorkomende geval, dat van de *genormeerde lineaire ruimten*; hierin heeft elk punt a een omgevingsbasis bestaande uit *bollen* van de vorm $\{x \mid \|x-a\| < \varepsilon\}$ met $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Voor deelverzamelingen A en B van zo'n ruimte definiëren we: $d(A,B) := \inf\{\|a-b\| \mid a \in A,\ b \in B\}$.

(b) *Eindigdimensionale ruimten*; deze zijn isomorf met een $\mathbb{R}^n$, voorzien van een topologie die geïnduceerd wordt door een norm (alle normen op $\mathbb{R}^n$ zijn equivalent, d.w.z. induceren dezelfde topologie). Convexiteit in $\mathbb{R}^n$ is het onderwerp van een afzonderlijk (het volgende) hoofdstuk.

STELLINGEN IN EEN GENORMEERDE LINEAIRE RUIMTE

4.12. STELLING. *Zij* E *een genormeerde lineaire ruimte. Zij* $C \subset E$ *convex, gesloten en niet leeg, en zij* $a \notin C$. *Dan is er een gesloten hypervlak in* E *dat* C *en* a *strikt scheidt.*

BEWIJS. Omdat C gesloten is, geldt

$$\sigma := d(a,C) = \inf_{x \in C} \|x-a\| > 0.$$

Zij $C_{\frac{1}{2}\sigma} := \{x \in E \mid d(x,C) < \frac{1}{2}\sigma\}$ en $B = \{x \in E \mid \|x-a\| < \frac{1}{2}\sigma\}$; er geldt $C_{\frac{1}{2}\sigma} \cap B = \emptyset$. Toepassing van stelling 4.8 op de open en convexe verzamelingen $C_{\frac{1}{2}\sigma}$ en B leert dat er een gesloten hypervlak in E is dat $C_{\frac{1}{2}\sigma}$ en B scheidt; men gaat gemakkelijk na dat dit hypervlak C en a strikt scheidt.

4.13. TOEPASSING: CONVEXE KEGELS. In de toepassingen van de convexe analyse komt men veelvuldig het begrip "kegel" tegen dat we als volgt definiëren.

DEFINITIES. Zij V een niet-triviale lineaire ruimte over $\mathbb{R}$.

(a) $K \subset V$ heet een *kegel* indien geldt: $x \in K,\ \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in K$.

(b) $K \subset V$ heet een *puntkegel* indien K een kegel is, terwijl $0 \in K$.

Er geldt (ga na): K is een *convexe kegel* $\Leftrightarrow$ voor alle $x,y \in K$ en $\lambda > 0$ geldt $x+y \in K$ en $\lambda x \in K$.

DEFINITIES: Zij E een genormeerde lineaire ruimte. Zij E' de *duale* van E, d.w.z. de lineaire ruimte van alle continue lineaire functies $E \to \mathbb{R}$; voor $x \in E$, $u \in E'$ schrijven we meestal $\langle x|u\rangle$ in plaats van $u(x)$. Zij $K \subset E$ een kegel.

(a) De *polaire* K° van K is

$$K^{\circ} := \{u \in E' \mid \langle K|u\rangle \le 0\}$$

(waarin "$\langle K|u\rangle \le 0$" betekent: $(\forall x \in K)\langle x|u\rangle \le 0$).

(b) De *bipolaire* $K^{\circ\circ}$ van K is

$$K^{\circ\circ} := \{x \in E \mid \langle x|K^{\circ}\rangle \le 0\}.$$

Men gaat gemakkelijk na dat K° en $K^{\circ\circ}$ convexe puntkegels zijn, terwijl $K \subset K^{\circ\circ}$. Verder is $K^{\circ\circ}$ gesloten: is x_n een rij in $K^{\circ\circ}$ met $x_n \to x$ en is $u \in K^{\circ}$, dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$\langle x_n|u\rangle \le 0$$

dus (wegens de continuïteit van u) $\langle x|u\rangle \le 0$; er volgt dat $x \in K^{\circ\circ}$. We concluderen dat $\bar{K} \subset K^{\circ\circ}$.

<u>STELLING</u>. *Is $K \subset E$ een niet-lege convexe kegel, dan is*

$$K^{\circ\circ} = \bar{K}.$$

<u>BEWIJS</u>. Er geldt $\bar{K} \subset K^{\circ\circ}$ (zie boven).
Veronderstel dat $a \notin \bar{K}$. Men gaat gemakkelijk na dat $\bar{K}$ een convexe puntkegel is; toepassing van stelling 4.12 leert dat er $u_0 \in E'$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ zijn met

(1) $$\langle \bar{K}|u_0\rangle < \alpha$$

en

$$\langle a|u_0\rangle > \alpha.$$

Wegens $0 \in \bar{K}$ is $\alpha > 0$, dus

(2) $$\langle a|u_0\rangle > 0.$$

Uit $\lambda\bar{K} = \bar{K}(\lambda>0)$ volgt met (1) dat $\langle\bar{K}|u_0\rangle \le 0$, dus $u_0 \in K^{\circ}$; uit (2) volgt nu dat $a \notin K^{\circ\circ}$.
We concluderen dat ook geldt $K^{\circ\circ} \subset \bar{K}$, dus $K^{\circ\circ} = \bar{K}$.

OPGAVEN

1. Zij E een topologische lineaire ruimte. Laten $A,B \subset E$ convex, open en niet-leeg zijn, terwijl $A \cap B = \emptyset$. Bewijs dat er een gesloten hypervlak is

in E dat A en B strikt scheidt.

2. Zij E een genormeerde lineaire ruimte. Zij $A \subset E$ convex, gesloten en niet-leeg; zij $B \subset E$ convex, compact en niet-leeg, terwijl $A \cap B = \emptyset$. Bewijs dat er een gesloten hypervlak in E is dat A en B strikt scheidt (vgl. opgave 1 en stelling 4.12).

3. Zij E een topologische lineaire ruimte. Zij $A \subset E$ convex, met $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$. Bewijs: $x \in \mathrm{int}(A) \Leftrightarrow$ elk hypervlak door x scheidt minstens twee punten van A strikt.

4. Geef met behulp van par. 4.7 en opgave 11 van hoofdstuk III een voorbeeld van een convex algebraïsch lichaam dat geen convex lichaam is (vgl. par. 3.26).

5. Zij K een open convexe kegel in een genormeerde ruimte. Bewijs dat $K + \bar{K} = K$.

6. Bewijs dat voor niet-lege kegels K_1, K_2 in een genormeerde ruimte geldt:
   (a) $(K_1+K_2)^\circ = K_1^\circ \cap K_2^\circ = (K_1 \cup K_2)^\circ$.
   (b) $(K_1 \cap K_2)^\circ \supset K_1^\circ + K_2^\circ = \mathrm{co}(K_1^\circ \cup K_2^\circ)$ (vgl. hoofdstuk V, opgave 13).

V. CONVEXE DEELVERZAMELINGEN VAN $\mathbb{R}^n$

5.1. In dit hoofdstuk bestuderen we convexe deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ (waarbij we steeds veronderstellen dat $n \geq 1$) of, wat op hetzelfde neerkomt, eindigdimensionale convexe deelverzamelingen van een lineaire ruimte. We maken daarmee een begin met het oudste en verst ontwikkelde deel van ons onderwerp, namelijk de convexe analyse in $\mathbb{R}^n$. Van de literatuur op dit gebied is het volgende boek een standaardwerk te noemen:

R.T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis,* Princeton University Press 1970.

Minder uitvoerige boeken, van klassiek-meetkundige aard, zijn:

H.G. EGGLESTON, *Convexity,* Cambridge University Press 1969.

F.A. VALENTINE, *Convex Sets,* McGraw-Hill, New York 1964.

ENKELE KLASSIEKE STELLINGEN

5.2. STELLING (VAN CARATHÉODORY). *Zij* $A \subset \mathbb{R}^n$.

(a) co(A) *is de verzameling van alle convexe combinaties van alle* (n+1)-*tallen punten van* A.

(b) *Is* dim(A) = k, *dan is* co(A) *de vereniging van alle* k-*simplices met hoekpunten in* A.

BEWIJS. Zij $x \in co(A)$. Volgens stelling 3.3 zijn er $x_1, x_2, \ldots, x_p \in A$ en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p \in \mathbb{R}$ met $\lambda_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq p)$ en $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ zó dat

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i.$$

Is $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ affien afhankelijk, dan zijn er $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, niet alle nul, met

$$\begin{cases} \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_p x_p = 0 \\ \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p = 0 \end{cases}$$

(vgl. par. 3.11). Voor alle $\rho \in \mathbb{R}$ geldt

(1) $$x = (\lambda_1 - \rho\mu_1)x_1 + \ldots + (\lambda_p - \rho\mu_p)x_p.$$

Men gaat gemakkelijk na dat $\{\sigma \in \mathbb{R} \,|\, \sigma\mu_i \leq \lambda_i \ (1 \leq i \leq p)\}$ een interval van de vorm $[\alpha, \beta]$ is (bedenk dat voor minstens één i geldt $\mu_i \neq 0$). Nemen we in (1): $\rho = \alpha$, dan vinden we

$$x = (\lambda_1 - \alpha\mu_1)x_1 + \ldots + (\lambda_p - \alpha\mu_p)x_p$$

waarbij $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \alpha\mu_i) = 1$ en $\lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq p)$, terwijl voor minstens één i geldt $\lambda_i - \alpha\mu_i = 0$. We hebben hiermee x geschreven als convexe combinatie van p-1 punten, bijvoorbeeld $x_2, x_3, \ldots, x_p$, van A. Is ook $(x_2, x_3, \ldots, x_p)$ affien afhankelijk, dan herhalen we dit proces, hetgeen zeker mogelijk is als $p > n+2$. Zo voortgaande vinden we tenslotte een schrijfwijze van x als convexe combinatie van q punten $y_1, y_2, \ldots, y_q$ van A met $q \leq n+1$, terwijl $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ affien onafhankelijk is.

(a) Is $q = n+1$, dan zijn we klaar. Is $q < n+1$, dan kunnen we op willekeurige wijze aanvullen met punten $y_{q+1}, y_{q+2}, \ldots, y_{n+1}$ van A, voorzien van coëfficienten 0.

(b) Is dim(A) = k, dan is $q \leq k+1$. Is $q = k+1$, dan behoort x tot het k-simplex $co(y_1, y_2, \ldots, y_{k+1})$, met hoekpunten in A. Is $q < k+1$, dan verkrijgen we een analoog resultaat door aan te vullen met punten $y_{q+1}, y_{q+2}, \ldots, y_{k+1}$ van A, voorzien van coëfficienten 0, zó dat $(y_1, y_2, \ldots, y_{k+1})$ een affien onafhankelijk stelsel is.

OPMERKINGEN.

(a) In $\mathbb{R}^n$ is de stelling van Carathéodory een verscherping van stelling 3.3.

(b) Men kan bewijzen: heeft $A \subset \mathbb{R}^n$ hoogstens n componenten en is $\dim(A) = n$, dan is co(A) de vereniging van alle (n-1)-simplices met hoekpunten in A (ga zelf aan de hand van een voorbeeld na dat deze uitspraak niet juist blijft als we het getal n-1 verkleinen).

5.3. TOEPASSING. Volgens stelling 3.24 geldt: A is open $\Rightarrow$ co(A) is open; echter geldt *niet*: A is gesloten $\Rightarrow$ co(A) is gesloten. In dit verband noemen we de volgende stelling, die een eenvoudig gevolg is van de stelling van Carathéodory:

STELLING. *In* $\mathbb{R}^n$ *is het convexe omhulsel van een compacte verzameling compact.*

BEWIJS. Zij $A \subset \mathbb{R}^n$ compact; volgens stelling 5.2 bestaat co(A) uit alle convexe combinaties van n+1 punten van A. De afbeelding $f\colon \mathbb{R}^{n(n+1)} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, gedefinieerd door

$$f(x_1,\ldots,x_{n+1},\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \qquad (x_i \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (1 \le i \le n+1))$$

is continu (ga na); definiëren we

$$L = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_i \ge 0 \quad (1 \le i \le n+1) \text{ en } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$$

dan is $\mathrm{co}(A) = f(A^{n+1} \times L)$. L is compact (ga na); er volgt dat co(A) het continue beeld van een compacte verzameling (zijnde het cartesisch produkt van compacte verzamelingen) is en dus zelf compact is.

5.4. STELLING (VAN HELLY). *Een collectie van minstens* n+1 *convexe verzamelingen in* $\mathbb{R}^n$, *waarvan elk* (n+1)*-tal een niet-lege doorsnede heeft, heeft in de beide volgende gevallen een niet-lege doorsnede:*

(a) *Indien de collectie eindig is.*

(b) *Indien de collectie uit compacte verzamelingen bestaat.*

BEWIJS.

(a) We geven een bewijs met behulp van volledige inductie.

Noem het aantal elementen in de collectie N. De collectie heeft zeker een niet-lege doorsnede indien $N = n+1$; stel dit is ook het geval als $N = k$ (waarin $k \geq n+1$), en beschouw het geval $N = k+1$. Is de collectie $\{C_1,\ldots,C_{k+1}\}$, dan is er volgens de inductieveronderstelling voor elke i met $1 \leq i \leq k+1$ een $x_i \in \mathbb{R}^n$ met

$$x_i \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k+1} C_j.$$

Wegens $k > n$ is het stelsel $(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1})$ affien afhankelijk; er volgt dat er $\mu_1,\ldots,\mu_{k+1}$ zijn, niet alle nul, met

$$\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i x_i = 0 \text{ en } \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i = 0.$$

Veronderstel dat $\mu_1 \geq 0,\ldots,\mu_s \geq 0$, $\mu_{s+1} < 0,\ldots,\mu_{k+1} < 0$ (hetgeen via een omschikking te bereiken is). Definieer

$$y = \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{s} \mu_i.$$

Dan is ook

$$y = \sum_{i=s+1}^{k+1} (-\mu_i)x_i \Big/ \sum_{i=s+1}^{k+1} (-\mu_i)$$

en er volgt dat y zowel tot $\bigcap_{i=s+1}^{k+1} C_i$ als tot $\bigcap_{i=1}^{s} C_i$, en dus tot de doorsnede van de gehele collectie, behoort.

(b) Volgens (a) heeft elke eindige deelcollectie van de gegeven collectie een niet-lege doorsnede; gebruik nu de compactheid van de gegeven verzamelingen.

5.5. Een hypervlak (vgl. par. 4.2.) in $\mathbb{R}^n$ is van de vorm $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (a|x) = \beta\}$ waarin $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$ en $(a|x) = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ als $a = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$. We behandelen nu een eenvoudige toepassing van de stelling van Helly.

STELLING (VAN KIRCHBERGER). *Laten* $A,B \subset \mathbb{R}^n$ *eindige verzamelingen zijn. Laat voor iedere* $C \subset A \cup B$ *bestaande uit hoogstens* $n+2$ *punten een hypervlak bestaan dat* $C \cap A$ *en* $C \cap B$ *strikt scheidt. Dan is er een hypervlak dat* A *en* B *strikt scheidt.*

BEWIJS. We mogen veronderstellen dat $A \cup B$ meer dan $n+2$ punten bevat. Voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$ definiëren we

$$A(x) = \{(y,\beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid (x|y) > \beta\}$$

en
$$B(x) = \{(y,\beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid (x|y) < \beta\}.$$

$A(x)$ en $B(x)$ zijn convexe deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. We beschouwen de eindige verzameling P bestaande uit alle $A(x)$ met $x \in A$ en alle $B(x)$ met $x \in B$. Uit het gegeven volgt dat voor elk $(n+2)$-tal elementen $A(x_1),\ldots,A(x_p)$, $B(x_{p+1}),\ldots,B(x_{n+2})$ uit P een $(y,\beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ bestaat met

$$\begin{cases} (y|x_i) > \beta, \text{ ofwel } y \in A(x_i), \text{ voor } 1 \le i \le p \\ (y|x_i) < \beta, \text{ ofwel } y \in B(x_i), \text{ voor } p+1 \le i \le n+2. \end{cases}$$

Er volgt dat (y,β) in de doorsnede van deze $n+2$ elementen zit. Toepassing van de stelling van Helly leert dat de doorsnede van alle elementen van P niet-leeg is, waaruit het gestelde volgt.

OPMERKING. Ga zelf aan de hand van een voorbeeld na dat het getal $n+2$ in de stelling van Kirchberger niet kan worden verkleind.

5.6. De volgende stelling heeft betrekking op *niet-lege compacte convexe* deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$; zij Ω_{cc} de collectie van al deze deelverzamelingen. We maken Ω_{cc} als volgt tot een metrische ruimte. We definiëren $e : \Omega_{cc} \times \Omega_{cc} \to \mathbb{R}$ door

$$e(A,B) := \sup\{d(x,B) \mid x \in A\} \qquad (A,B \in \Omega_{cc})$$

waarin d de euclidische metriek op $\mathbb{R}^n$ is; vervolgens definiëren we $h : \Omega_{cc} \times \Omega_{cc} \to \mathbb{R}$ door

$$h(A,B) := \max\{e(A,B),e(B,A)\} \qquad (A,B \in \Omega_{cc}).$$

Men gaat gemakkelijk na dat h een metriek, de zogenaamde *Hausdorff-metriek*, op Ω_{cc} is; voorzien van deze metriek is Ω_{cc} een metrische ruimte. Zij $R > 0$, en zij $\Omega_{cc}(R)$ de verzameling van alle niet-lege compacte convexe deelverzamelingen van de bol $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x,0) \le R\}$; we voorzien $\Omega_{cc}(R)$ van de Hausdorff-metriek.

STELLING (VAN BLASCHKE). *$\Omega_{cc}(R)$ is een compacte metrische ruimte.*

BEWIJS. Het is voldoende te bewijzen dat $\Omega_{cc}(R)$ rijcompact is. Zij B de n-dimensionale kubus

$$\{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le |\xi_i| \le R \ (1 \le i \le n)\}.$$

Verdeel elke ribbe van B in 2^k gelijke stukken, en beschouw hypervlakken die door de zo ontstane deelpunten gaan en die evenwijdig zijn met de zijvlakken van B; zij B_k de verzameling van de zo ontstane gesloten deelkubussen van B met ribben $R/2^{k-1}$. Elke $A \in \Omega_{cc}(R)$ is bevat in B; de vereniging van alle kubussen in B_k die iets met A gemeen hebben noemen we een k-overdekking van A. Hebben A en B dezelfde k-overdekking, dan is $h(A,B) < R\sqrt{n}/2^{k-1}$ (ga na). Zij (C_j) een rij in $\Omega_{cc}(R)$. Aangezien het aantal verschillende 1-overdekkingen eindig is, is er een deelrij $(C_j^{(1)})$ van (C_j) waarvan alle elementen dezelfde 1-overdekking hebben. Evenzo is er een deelrij $(C_j^{(2)})$ van $(C_j^{(1)})$ waarvan alle elementen dezelfde 2-overdekking hebben. Zo voortgaande vinden we voor elke $k \in \mathbb{N}$ een rij $(C_j^{(k)})$ met de volgende eigenschappen:

(a) alle elementen van $(C_j^{(k)})$ hebben dezelfde k-overdekking, dus voor alle $j,m \in \mathbb{N}$ is $h(C_j^{(k)},C_m^{(k)}) < R\sqrt{n}/2^{k-1}$;

(b) $(C_j^{(k)})$ is een deelrij van $(C_j^{(k-1)})$, dus $h(C_j^{(p)},C_m^{(q)}) < R\sqrt{n}|2^{q-1}$ voor alle $j,m \in \mathbb{N}$ en alle $p,q \in \mathbb{N}$ met $p > q$.

Beschouw de rij (D_j) met $D_j = C_j^{(j)}$ (diagonaalrij); uit het bovenstaande volgt dat dit een Cauchy-rij is. Zij A_m de afsluiting van $\mathrm{co}(\bigcup_{j=m}^{\infty} D_j)$. (A_m) is een monotoon dalende rij niet-lege compacte convexe verzamelingen (ga na), dus $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ is niet-leeg, compact en convex; er volgt dat $A \in \Omega_{cc}(R)$. We bewijzen dat $\lim_{j\to\infty} D_j = A$ (waarmee bewezen is dat in $\Omega_{cc}(R)$ elke rij een convergente deelrij heeft):

Zij $\varepsilon > 0$. Er is $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $j,m > N$ geldt $h(D_j,D_m) \le \varepsilon$, dus $e(D_m,D_j) \le \varepsilon$ en dus ook $e(A_m,D_j) \le \varepsilon$ (ga na); er volgt dat voor alle $j > N$ geldt $e(A,D_j) \le \varepsilon$. Verder is er $M \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $m > M$ geldt $e(A_m,A) \le \varepsilon$, immers: stel dit is niet het geval. Dan is er een rij (x_{n_i}) met $(\forall i \in \mathbb{N})x_{n_i} \in A_{n_i}$ en $d(x_{n_i},A) > \varepsilon$, waarbij d de euclidische metriek is. Wegens de compactheid van A_1 heeft deze rij een convergente deelrij (y_i); stel $y_i \to y$. Enerzijds is nu $d(y,A) \ge \varepsilon$, anderzijds is $y \in A$ (ga na), hetgeen een tegenspraak levert. Er volgt dat $(\forall m > M)e(D_m,A) \le \varepsilon$. We concluderen dat $(\forall m > \max(N,M))h(D_m,A) \le \varepsilon$.

OPMERKING. Het volume en de oppervlakte van compacte convexe deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ kunnen worden gedefiniëerd als continue functies op Ω_{cc}. Uit de stelling van Blaschke volgt dat elke reële continue functie op $\Omega_{cc}(R)$ een maximum en een minimum heeft; hiervan kan worden gebruik gemaakt bij het oplossen van optimaliseringsproblemen als het isoperimetrische probleem (bepaal het lichaam dat bij gegeven oppervlakte het grootste volume heeft).

HET RELATIEVE INWENDIGE

5.7. De volgende stelling wordt in eindigdimensionale beschouwingen veel gebruikt.

STELLING. *Zij* $C \subset \mathbb{R}^n$ *convex. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(a) C *is een convex algebraïsch lichaam.*

(b) C *is een convex lichaam.*

(c) $\dim(C) = n$.

BEWIJS.

(c) $\Rightarrow$ (b): Volgens stelling 5.2 bevat C een n-simplex $S = co(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Men bewijst gemakkelijk dat

$$\mathrm{int}(S) = \{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_i > 0 \ (0 \le i \le n), \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$$

dus $\mathrm{int}(S) \ne \emptyset$; er volgt dat $\mathrm{int}(C) \ne \emptyset$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Zie stelling 3.23 (c).

(a) $\Rightarrow$ (c): Zij $\dim(C) < n$; dan is $\mathrm{aff}(C) \ne \mathbb{R}^n$. Zij $c \in C$ en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{aff}(C)$. Behalve c heeft de lijn door x en c niets met $\mathrm{aff}(C)$ gemeen, dus ook niets met C; er volgt dat $c \notin C^i$. We concluderen dat $C^i = \emptyset$.

5.8. DEFINITIE. Zij $C \subset \mathbb{R}^n$. Het *relatieve inwendige* $\mathrm{ri}(C)$ van C is het inwendige van C, opgevat als topologische deelruimte van $\mathrm{aff}(C)$ (voorzien van de door $\mathbb{R}^n$ geïnduceerde topologie).

OPMERKING. Het is overbodig het begrip "relatieve afsluiting" in te voeren. Elke lineaire variëteit in $\mathbb{R}^n$, dus ook $\mathrm{aff}(C)$, is namelijk gesloten; er volgt dat $\overline{C}$ samenvalt met de afsluiting van C in $\mathrm{aff}(C)$ (ga na).

STELLING. *Zij* $C \subset \mathbb{R}^n$ *convex.*

(a) *Is* $C \ne \emptyset$, *dan is* $\mathrm{ri}(C) \ne \emptyset$ *en* $\dim(\mathrm{ri}(C)) = \dim(C)$.

(b) $\overline{\mathrm{ri}(C)} = \overline{C}$ *en* $\mathrm{ri}(\overline{C}) = \mathrm{ri}(C)$

BEWIJS. (a) volgt uit par. 5.7; (b) volgt door toepassing van (a) en stelling 3.27.

5.9. De volgende stelling dient ter voorbereiding van stelling 5.10 (betreffende eigenschappen van "ri").

STELLING. *Zij* $C \subset \mathbb{R}^n$ *convex, en zij* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineair. Dan is*

$$ri(TC) = T(ri(c)) \text{ en } \overline{TC} \supset T(\overline{C}).$$

BEWIJS. De tweede betrekking volgt uit de continuïteit van T (in eindige dimensie is elke lineaire afbeelding continu). Toepassing van deze betrekking op ri(C) en van par. 5.8 leert dat

$$\overline{T(ri(C))} \supset T(\overline{ri(C)}) = T(\overline{C}) \supset TC \supset T(ri(C)).$$

Er volgt dat $\overline{TC} = \overline{T(ri(C))}$; weer volgens par. 5.8 geldt nu $ri(TC) = ri(\overline{TC}) = ri\overline{(T(ri(C))} = ri(T(ri(C))$, dus

$$(2) \qquad ri(TC) \subset T(ri(C)).$$

Zij nu $x \in T(ri(C))$, $y \in ri(TC) \subset TC$, $x_1 \in ri(C)$, $y_1 \in C$ met $x = Tx_1$, $y = Ty_1$. Wegens $x_1 \in ri(C)$ is er $z_1 \in C$ met $x_1 \in \langle z_1, y_1\rangle$. Is $z = Tz_1$, dan geldt $z \in TC$, $x \in \langle z,y\rangle$; volgens stelling 3.23 is nu $x \in ri(TC)$. Er volgt dat

$$(3) \qquad T(ri(C)) \subset ri(TC).$$

Uit (2) en (3) volgt het gestelde.

5.10. STELLING. *Laten* $C,D \subset \mathbb{R}^n$ *convex zijn; zij* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dan geldt:*

(a) $ri(\lambda C) = \lambda\, ri(C)$.

(b) $ri(C+D) = ri(C)+ri(D)$.

Als bovendien $ri(C) \cap ri(D) \neq \emptyset$, *dan geldt:*

(c) $\overline{C \cap D} = \overline{C} \cap \overline{D}$ (*vgl. hoofdstuk* III, *opgave* 13).

(d) $ri(C \cap D) = ri(C) \cap ri(D)$.

BEWIJS.

(a) Pas par. 5.9 toe op $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gedefinieerd door $Tx = \lambda x$.

(b) Pas par. 5.9 toe op $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gedefinieerd door $T(x,y) = x+y\ (x,y \in \mathbb{R}^n)$; er volgt dat $ri(C+D) = ri(T(C\times D)) = T(ri(C\times D))$.

Men rekent gemakkelijk na dat $\mathrm{aff}(C\times D) = \mathrm{aff}(C) \times \mathrm{aff}(D)$ en $\mathrm{ri}(C\times D) =$ $= \mathrm{ri}(C) \times \mathrm{ri}(D)$; er geldt dus $\mathrm{ri}(C+D) = T(\mathrm{ri}(C) \times \mathrm{ri}(D)) = \mathrm{ri}(C)+\mathrm{ri}(D)$.

(c) en (d) Er geldt $\overline{C \cap D} \subset \overline{C} \cap \overline{D}$. Zij $x \in \mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D)$; zij $y \in \overline{C} \cap \overline{D}$. Volgens stelling 3.23 is $[x,y\rangle \subset \mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D)$, dus $y \in \overline{\mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D)}$; er volgt dat

$$\overline{C} \cap \overline{D} \subset \overline{\mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D)} \subset \overline{C \cap D} \subset \overline{C} \cap \overline{D}.$$

We concluderen dat $\overline{C \cap D} = \overline{C} \cap \overline{D}$, waarmee (c) bewezen is; bovendien volgt met par. 5.8 dat

$$\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D)) = \mathrm{ri}(C \cap D)$$

dus

$$\mathrm{ri}(C \cap D) \subset \mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D).$$

Zij nu $z \in \mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D)$, en zij $w \in \mathrm{ri}(C \cap D)$. Er zijn $u_1 \in C$, $u_2 \in D$ met $z \in \langle u_1,w\rangle \cap \langle u_2,w\rangle$; er volgt dat er $u \in C \cap D$ is met $z \in \langle u,w\rangle$. Volgens stelling 3.23 geldt $z \in \mathrm{ri}(C \cap D)$; we concluderen dat $\mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D) \subset \mathrm{ri}(C \cap D)$, waarmee (d) bewezen is.

OPMERKING. Ga na dat in (c) en (d) de eis $\mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D) \neq \emptyset$ niet mag worden weggelaten.

DE SCHEIDINGSSTELLING IN $\mathbb{R}^n$

5.11. De volgende stelling is een verscherping van stelling 4.8 voor eindig-dimensionale ruimten, en geeft hiervoor de voldoende *en* nodige voorwaarde voor echte scheiding:

STELLING (SCHEIDINGSSTELLING). *Laten* $C,D \subset \mathbb{R}^n$ *convex en niet-leeg zijn. Dan geldt: Er is een hypervlak in* $\mathbb{R}^n$ *dat* C *en* D *echt scheidt* $\Leftrightarrow \mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D) = \emptyset$.

BEWIJS. Men ziet direct dat het gestelde juist is als $n = 1$; veronderstel nu dat $n \geq 2$. Noem $A = C-D$; A is convex (vgl. par. 3.4, eigenschap (a)) en niet-leeg. Volgens stellling 5.10 is $\mathrm{ri}(A) = \mathrm{ri}(C) - \mathrm{ri}(D)$; er geldt dus:

$$\mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D) = \emptyset \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{ri}(A).$$

$\Leftarrow$: noem $ri(A) = B$; B is relatief open (d.w.z. open in $aff(B)$), convex (vgl. stelling 3.23) en niet-leeg (vgl. par. 5.8), terwijl $0 \notin B$. We zullen in een afzonderlijk lemma (zie hieronder) bewijzen dat er een hypervlak $H = f^{-1}(0)$ is met $0 \in H$ en $H \cap B = \emptyset$. Stel, bijvoorbeeld, dat $f(ri(A)) = f(B) > 0$ (bedenk dat B convex is); er volgt dan dat $f(A) \geq 0$ (ga na). We concluderen dat

$$(\forall c \in C)(\forall d \in D)f(c) \geq f(d) \text{ en } (\exists c \in C)(\exists d \in D)f(c) > f(d).$$

Is $\gamma = \inf\{f(c) \mid c \in C\}$, dan worden C en D echt gescheiden door het hypervlak $f^{-1}(\gamma)$.

$\Rightarrow$: zij $H = f^{-1}(\alpha)$ een hypervlak dat C en D echt scheidt; zij $f(C) \geq \alpha$, $f(D) \leq \alpha$, terwijl $(\exists c \in C)f(c) > \alpha$. Er volgt dat $f(A) \geq 0$ en $(\exists a \in A)f(a) > 0$. Zij $x \in ri(A)$. Er is $\delta > 0$ zó dat $[x,x+\delta(x-a)] \subset A$; er volgt dat $f(x+\delta(x-a)) \geq 0$ ofwel $(1+\delta)f(x) \geq \delta f(a)$, dus $f(x) > 0$. We concluderen dat $f(ri(A)) > 0$, dus $0 \notin ri(A)$.

<u>LEMMA</u>. *Zij* $B \subset \mathbb{R}^n$ *convex en relatief open, terwijl* $0 \notin B$. *Dan is er een hypervlak* H *in* $\mathbb{R}^n$ *met* $0 \in H$ *en* $H \cap B = \emptyset$.

<u>BEWIJS</u>. We bewijzen: is F een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ met $0 \leq \dim(F) \leq n-2$ en $F \cap B = \emptyset$, dan is er een hypervlak H in $\mathbb{R}^n$ dat F bevat en waarvoor geldt $H \cap B = \emptyset$ (het lemma volgt dan door te nemen $F = \{0\}$). Om deze uitspraak te bewijzen nemen we eerst $n = 2$; dan is $F = \{0\}$ en $0 \notin B$. Het gevraagde hypervlak H is dan een lijn in $\mathbb{R}^2$ door 0 die B niet snijdt; het bestaan hiervan is triviaal in de gevallen $\dim(B) = -1,0,1$, en volgt in het geval $\dim(B) = 2$ uit stelling 4.8 (aangezien B dan een open deel van $\mathbb{R}^2$ is). Vervolgens nemen we $n > 2$. Zij S een tweedimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ met $S \perp F$, en zij $B_1 = S \cap (B+F)$; B_1 is convex (ga na). Volgens stelling 5.10 is $ri(B+F) = ri(B) + ri(F) = B + F$. Wegens $ri(S) = S$ geldt, eveneens volgens stelling 5.10: $B_1 = \emptyset$ of $ri(B_1) = S \cap (B+F) = B_1$; in beide gevallen is B_1 relatief open. Wegens $0 \notin B_1$ is er volgens het bovenstaande een lijn m in S door 0 die B_1 niet snijdt. Noem $S_1 = F+m$; S_1 is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ die F bevat, en $\dim(S_1) = \dim(F)+1$. Stel dat $S_1 \cap B \neq \emptyset$; dan zijn er $f \in F$, $a \in m$ en $b \in B$ met $f+a = b$ ofwel $a = b-f$, hetgeen in tegenspraak is met $m \cap B_1 = \emptyset$. We concluderen dat $S_1 \cap B = \emptyset$. Voortzetting van dit proces levert na een eindig aantal stappen een hypervlak H met $H \supset F$ en $H \cap B = \emptyset$.

5.12. TOEPASSING: STUTHYPERVLAKKEN. Zij $A \subset \mathbb{R}^n$. Onder de *relatieve rand* $\mathrm{rfr}(A)$ van A verstaan we de rand van A in $\mathrm{aff}(A)$, dus de verzameling $\overline{A}\backslash \mathrm{ri}(A)$. Als in par. 4.10 kunnen we de volgende stelling bewijzen:

STELLING. *Zij* $C \subset \mathbb{R}^n$ *convex en niet-leeg. Dan heeft* C *in elk van zijn relatieve randpunten een echt stuthypervlak.*

5.13. TOEPASSING: EXTREMAALPUNTEN. In par. 3.10 voerden we het begrip "extremaalpunt" in. In het onderstaande bewijzen we dat sommige convexe delen van $\mathbb{R}^n$ geheel door hun extremaalpunten worden bepaald. Vooraf een lemma:

LEMMA. *Zij* $A \subset \mathbb{R}^n$ *begrensd en niet-leeg, terwijl* A *minstens twee punten bevat. Dan is* $\mathrm{ri}(A) \subset \mathrm{co}(\mathrm{rfr}(A))$.

BEWIJS. Zij $x \in \mathrm{ri}(A)$. Er is $y \in A$ met $y \neq x$; zij m de lijn door x en y. $m \cap A$ is begrensd en bevat een lijnstuk waarvan x inwendig punt is. Er volgt dat er $p,q \in m \cap \mathrm{rfr}(A)$ zijn met $x \in [p,q]$.

STELLING (VAN MINKOWSKI). *Zij* $C \subset \mathbb{R}^n$ *convex, compact en niet-leeg; zij* E *de verzameling der extremaalpunten van* C. *Dan is* $E \neq \emptyset$ *en* $C = \mathrm{co}(E)$.

BEWIJS. We geven een bewijs d.m.v. volledige inductie van de volgende uitspraak $P(d)$:
Is $C \subset \mathbb{R}^n$ convex, compact en niet-leeg en is $\dim(C) = d$, dan is $E \neq \emptyset$ en $C = \mathrm{co}(E)$. $P(0)$ is juist. Veronderstel dat $P(k-1)$ juist is; zij $\dim(C) = k$. Aangezien C begrensd is, is $\mathrm{rfr}(C) \neq \emptyset$; zij $x_0 \in \mathrm{rfr}(C)$. Laat $H = f^{-1}(\alpha)$ een echt stuthypervlak van C in x_0 zijn (vgl. par. 5.12) met $f(C) \leq \alpha$; $H \cap C$ is niet-leeg, convex en compact, terwijl $\dim(H \cap C) < \dim(C) = k$ (ga na). Volgens de inductieveronderstelling is de verzameling E_1 der extremaalpunten van $H \cap C$ niet-leeg, terwijl $H \cap C = \mathrm{co}(E_1)$. Veronderstel dat er $e \in \mathbb{R}^n$ is met $e \in E_1\backslash E$ (waarin E de verzameling der extremaalpunten van C is). Uit $e \notin E$ volgt dat er $x,y \in C$ en $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ zijn met $e = \lambda x + (1-\lambda)y$ en $x \neq y$. Wegens $e \in H$ geldt $f(e) = \alpha$, dus $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = \alpha$; met $f(x) \leq \alpha$, $f(y) \leq \alpha$ volgt dat $f(x) = f(y) = \alpha$, dus $x,y \in H \cap C$. Er volgt dat $e \notin E_1$, hetgeen een tegenspraak levert. We concluderen dat $E_1 \subset E$ (en dus $E \neq \emptyset$). Aangezien C gesloten is geldt $x_0 \in H \cap C$, dus $x_0 \in \mathrm{co}(E_1) \subset \mathrm{co}(E)$. We concluderen dat $\mathrm{rfr}(C) \subset \mathrm{co}(E)$. Verder geldt volgens bovenstaande lemma $\mathrm{ri}(C) \subset \mathrm{co}(\mathrm{rfr}(C))$, dus $\mathrm{ri}(C) \subset \mathrm{co}(E)$. Er volgt dat $C \subset \mathrm{co}(E)$, dus $C = \mathrm{co}(E)$; hiermee is de juistheid van $P(k)$ bewezen, waarmee het gestelde volgt.

OPMERKING. Met stelling 5.2 volgt nog dat elke $x \in C$ een convexe combinatie van (hoogstens) n+1 extremaalpunten van C is.

VEELVLAKSKEGELS

5.14. In par. 4.13 onderzochten we convexe kegels. Als bijzonder geval daarvan bestuderen we nu de voor de toepassingen belangrijke veelvlakskegels. Vooraf definiëren we: P^n is het niet-negatieve orthant in $\mathbb{R}^n$, dus

$$P^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$$

waarin $x \geq 0$ betekent: $(\forall i)\xi_i \geq 0$ (als $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$). Verder verstaan we onder een *gesloten halfruimte* in $\mathbb{R}^n$ een verzameling van de vorm $\{x \in \mathbb{R}^n | (x|p) \leq \alpha\}$ waarin $p \in \mathbb{R}^n$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, en onder een gesloten halfruimte met randpunt 0 een dergelijke verzameling waarbij $\alpha = 0$.

DEFINITIE. Een *veelvlakskegel* in $\mathbb{R}^n$ is de doorsnede van een eindige collectie gesloten halfruimten met randpunt 0.

Een veelvlakskegel is een convexe puntkegel (ga na).
Wordt een veelvlakskegel K bepaald door de ongelijkheden $(x|p_i) \leq 0$ $(1 \leq i \leq k)$, dan kunnen we K ook als volgt beschrijven: we definiëren $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ door $(Tx)_i = (x|p_i)$ $(1 \leq i \leq k)$; dan is

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n | Tx \leq 0\} = -T^{-1}P^k.$$

5.15. DEFINITIE. Een kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ heet *eindig voortgebracht* indien er een eindige collectie $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ is zó dat

$$K = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k | \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \geq 0\}.$$

Een eindig voortgebrachte kegel is een convexe puntkegel (ga na). We kunnen een eindig voorgebrachte kegel K in $\mathbb{R}^n$ ook als volgt beschrijven: er zijn $k \in \mathbb{N}$ en een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ zó dat

$$K = \{Tx | x \geq 0\} = TP^k.$$

STELLING. *De polaire van een eindig voortgebrachte kegel is een veelvlakskegel.*

<u>BEWIJS</u>. Zij $K = TP^k$ een eindig voortgebrachte kegel in $\mathbb{R}^n$. Voor alle $y \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$(TP^k|y) \leq 0 \Leftrightarrow (P^k|T^t y) \leq 0 \Leftrightarrow T^t y \leq 0$$

(ga na) waarin $T^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ de getransponeerde van T is. Er volgt dat

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n | T^t y \leq 0\}.$$

<u>5.16</u>. In het volgende bewijzen we dat veelvlakskegels en eindig voortgebrachte kegels dezelfde objecten zijn. Hiertoe bewijzen we eerst twee hulpstellingen, die overigens op zichzelf ook interessant zijn.

<u>STELLING</u>. *Zij* $T : \mathbb{R}^n \to R^k$ *lineair. Zij* $b \in \mathbb{R}^k$, *en zij* $A = \{x \in \mathbb{R}^n | Tx \leq b\}$. *Dan geldt:*

(a) A *heeft hoogstens eindig veel extremaalpunten.*

(b) *Is* A *begrensd en niet-leeg, dan is* A *een convex polytoop* (*zie par.* 3.8).

<u>BEWIJS</u>.

(a) Is $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, dan kunnen we A beschrijven met behulp van k ongelijkheden van het type

$$(x|p_i) \leq \beta_i$$

waarin $p_i \in \mathbb{R}^n (1 \leq i \leq k)$. Zij E de verzameling der extremaalpunten van A. Zij $x, y \in E$; we definiëren $I(x) = \{i | (x|p_i) < \beta_i\}$, en analoog $I(y)$. Veronderstel dat $I(x) = I(y)$. Er is $\varepsilon > 0$ zó dat geldt

$$(x+\varepsilon(x-y)|p_i) \leq \beta_i \tag{4}$$

voor alle $i \in I(x)$. Voor $i \notin I(x)$ is $(x|p_i) = (y|p_i) = \beta_i$, dus $(x+\varepsilon(x-y)|p_i) = \beta_i$; (4) geldt dus voor alle i. We concluderen dat $x+\varepsilon(x-y) \in A$. Wegens

$$x = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} y + \frac{1}{1+\varepsilon} [x+\varepsilon(x-y)]$$

volgt (aangezien $x, y \in E$) dat $x = y$. E bevat dus hoogstens evenveel punten als er deelverzamelingen van $\{1,2,\ldots,k\}$ zijn.

(b) A is ook gesloten, dus compact en niet-leeg; bovendien is A convex. Toepassing van de stelling van Minkowski (zie par. 5.13) levert het gestelde.

5.17. STELLING.

(a) *Is* $A \subset \mathbb{R}^n$ *compact en niet-leeg en is* $0 \notin A$, *dan is de door* A *voortgebrachte puntkegel*

$$\mathbb{R}_+A := \{\lambda a \mid \lambda \geq 0,\ a \in A\}$$

gesloten.

(b) *Een eindig voortgebrachte kegel in* $\mathbb{R}^n$ *is gesloten.*

BEWIJS.

(a) Zij $x \in \overline{\mathbb{R}_+A}$; er zijn rijen (λ_n) met $(\forall n)\lambda_n \geq 0$ en $(a_n) \subset A$ zó dat

$$\lambda_n a_n \to x \ (n\to\infty).$$

A is compact; er is dus een deelrij (b_n) van (a_n) die convergeert naar een punt $b \in A$. Verder is er $\varepsilon > 0$ zó dat $(\forall_n)\|b_n\| \geq \varepsilon$; er geldt dus

$$|\lambda_n| = \frac{|\lambda_n|\,\|b_n\|}{\|b_n\|} \leq \frac{1}{\varepsilon}\,\|\lambda_n b_n\|.$$

Uit de begrensdheid van de rij $(\lambda_n b_n)$ volgt die van (λ_n); er is dus een deelrij (μ_n) van (λ_n) die convergeert naar een $\mu \geq 0$. We concluderen dat er een deelrij (c_n) van (b_n) is zó dat

$$\begin{cases} \mu_n c_n \to x \\ \mu_n \to \mu \\ c_n \to b. \end{cases}$$

Er volgt dat $x = \mu b$, dus $x \in \mathbb{R}_+A$.

(b) Zij K een eindig voortgebrachte kegel. Is $K = \{0\}$,dan is K gesloten. Is $K \neq \{0\}$, dan zijn er $a_1,a_2,\ldots,a_k \in \mathbb{R}^n$, ongelijk 0, zó dat

$$K = \{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_ka_k \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k \geq 0\}.$$

Zij $A = co(a_1,a_2,\ldots,a_k)$; volgens par. 5.3 is A compact. Verder is $0 \notin A$, terwijl

$$K = \mathbb{R}_+A$$

(ga na). Pas nu (a) toe.

5.18. STELLING. *Zij* $K \subset \mathbb{R}^n$. *Dan geldt:* K *is een veelvlakskegel* $\Leftrightarrow$ K *is een eindig voortgebrachte kegel.*

BEWIJS.

$\Rightarrow$: Zij $K = \{x \in \mathbb{R}^n | Tx \leq 0\}$ (waarin $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineair is) een veelvlakskegel; er geldt

$$K = T^{-1}(T\mathbb{R}^n \cap (-P^k)). \tag{5}$$

Zij $A = T\mathbb{R}^n \cap (-P^k)$ en $B = \{(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_k) \in A | \sum_{i=1}^{k} \eta_i \geq -1\}$.
B is niet-leeg (want $0 \in B$) en

$$A = \mathbb{R}_+B. \tag{6}$$

B wordt beschreven door de ongelijkheden

$$\begin{cases} (y|p_i) \leq 0 & (1 \leq i \leq s) \\ (y|-p_i) \leq 0 & (1 \leq i \leq s) \\ (y|e_i) \leq 0 & (1 \leq i \leq k) \\ (y|-e) \leq 1 & \end{cases}$$

waarin $(p_1,p_2,\ldots,p_s)$ een basis van het orthogonale complement van $T\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^k$ is, $(e_1,e_2,\ldots,e_k)$ de "natuurlijke" basis van $\mathbb{R}^k$ is (met $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, etc.), en $e = (1,1,\ldots,1)$. B is begrensd (ga na); toepassing van par. 5.16 leert dat er eindig veel $a_1,a_2,\ldots,a_p \in \mathbb{R}^k$ zijn met

$$B = co(a_1,a_2,\ldots,a_p).$$

Met (6) volgt dat A een kegel is die wordt voortgebracht door $\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$. Er zijn $b_1,b_2,\ldots,b_p \in \mathbb{R}^n$ met $Tb_i = a_i$ $(1 \leq i \leq p)$.

Is $x \in K$, dan zijn er $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p \geq 0$ zó dat

$$Tx = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Tb_i$$

dus

$$x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i \in T^{-1}\{0\}.$$

Er volgt dat K de kegel is die wordt voortgebracht door $\{b_1,b_2,\ldots,b_p, c_1,c_2,\ldots,c_q, -c_1,-c_2,\ldots,-c_q\}$ waarin $(c_1,c_2,\ldots,c_q)$ een basis van de kern $T^{-1}\{0\}$ van T is.

$\Leftarrow$: Zij K een eindig voortgebrachte kegel. Volgens stelling 5.17 is K gesloten; met par. 4.13 volgt dat

$$K = K^{\circ\circ} = (K^{\circ})^{\circ}.$$

Nu is K° volgens par. 5.15 een veelvlakskegel, dus volgens het bovenstaande een eindig voortgebrachte kegel; nogmaals toepassen van par. 5.15 leert dat $K^{\circ\circ}$ een veelvlakskegel is.

OPMERKING. Uit het bovenstaande en par. 5.15 volgt dat $\{Tx|x \geq 0\}$ en $\{y|T^t y \leq 0\}$ elkaars polaire zijn.

5.19. TOEPASSING: HET LEMMA VAN FARKAS. Zij $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineair en zij $K = \{x|A^t x \leq 0\}$. Er geldt:

$$b \in K^{\circ} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^k)(A^t x \leq 0 \Rightarrow (b|x) \leq 0).$$

Uit de opmerking in par. 5.18 volgt dat $K^{\circ} = \{Ay|y \geq 0\}$; er geldt dus

(7) $$(\exists y \geq 0)\, b = Ay \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^k)(A^t x \leq 0 \Rightarrow (b|x) \leq 0).$$

(7) wordt het *lemma van Farkas* genoemd en wordt meestal als volgt genoteerd:

Van de beide stelsels

I. $A^t x \leq 0$, $(b|x) > 0$

II. $b = Ay$, $y \geq 0$

is er (bij gegeven A en b) *precies één oplosbaar.*

UITWEIDINGEN

5.20. CONVEXITEITSRUIMTEN. Het begrip "convex" is op diverse manieren gegeneraliseerd. In sommige publikaties wordt daarbij veel aandacht besteed aan generalisaties van de stellingen van Carathéodory (stelling 5.2), Helly (stelling 5.4) en Radon (zie opgave 11).
We noemen twee voorbeelden. In

V.W. BRYANT/R.J. WEBSTER, *Generalizations of the Theorems of Radon, Helly, and Carathéodory,* Monatshefte für Mathematik 73 (1969) 309-315

wordt een *convexiteitsruimte* gedefinieerd als een paar $(X,\cdot)$, waarin X een niet-lege verzameling is en $\cdot$ een afbeelding $(a,b) \mapsto a\cdot b$ van $X \times X$ in de verzameling der deelverzamelingen van X (men denke bij $a\cdot b$ aan het lijnstuk $[a,b]$) met de volgende eigenschappen:
(a) $a\cdot b \neq \emptyset$.
(b) $a\cdot b = b\cdot a$.
(c) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.
(d) Zij $a|b = \{x \in X | a \in b\cdot x\}$. Dan geldt:
$(a|b) \cap (c|d) \neq \emptyset \Rightarrow (a\cdot d) \cap (b\cdot c) \neq \emptyset$.
(e) $a\cdot a = \{a\} = a|a$.
(f) $(a\cdot b) \cap (a\cdot c) \neq \emptyset \Rightarrow b = c$ of $b \in a\cdot c$ of $c \in a\cdot b$.
Voor zo'n ruimte zijn de begrippen "onafhankelijkheid" en "dimensie" te definiëren, en kunnen de bovengenoemde stellingen gegeneraliseerd worden.
In

D.C. KAY/E.W. WOMBLE, *Axiomatic convexity theory and relationships between the Carathéodory, Helly, and Radon numbers,* Pacific J.Math. 38 (1971) 471-485

wordt een *convexiteitsruimte* gedefinieerd als een paar $(X,\mathcal{C})$ waarin X een verzameling is, en $\mathcal{C}$ een collectie deelverzamelingen van X met de volgende eigenschappen:
(a) $\emptyset \in \mathcal{C}$ en $X \in \mathcal{C}$.
(b) Van elke deelcollectie van $\mathcal{C}$ behoort de doorsnede tot $\mathcal{C}$.
Van $A \subset X$ wordt het *convexe omhulsel* $C(A)$ gedefinieerd als

$$C(A) = \bigcap_{\substack{B\in\mathcal{C} \\ B\supset A}} B.$$

Vervolgens worden drie getallen gedefinieerd:
We zeggen dat $\mathcal{C}$ *Carathéodory-getal* c heeft als c het kleinste natuurlijke getal is met de eigenschap dat voor alle $A \subset X$ geldt:

$$C(A) = \bigcup_{\substack{B \subset A \\ |B| \leq c}} C(B)$$

(waarin $|B|$ het aantal elementen van B is).
We zeggen dat $\mathcal{C}$ *Helly-getal* h heeft als h het kleinste natuurlijke getal is met de eigenschap dat elke eindige deelcollectie van $\mathcal{C}$ een niet-lege doorsnede heeft indien elk h-tal ervan een niet-lege doorsnede heeft.
We zeggen dat $\mathcal{C}$ *Radon-getal* r heeft als r het kleinste natuurlijke getal is met de eigenschap dat voor elke $A \subset X$ met $|A| \geq r$ er niet-lege $A_1, A_2 \subset A$ bestaan met $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ en $C(A_1) \cap C(A_2) \neq \emptyset$. Is $X = \mathbb{R}^n$ en is $\mathcal{C}$ de collectie van alle convexe delen van $\mathbb{R}^n$, dan is $c = h = n+1$ en $r = n+2$.
Men kan bewijzen dat voor een willekeurige $(X,\mathcal{C})$ waarvoor c, h en r bestaan geldt:

$$h+1 \leq r \leq ch+1.$$

Voor een uitvoerig literatuuroverzicht zie

H. VAN MAAREN, *Algebraic simplices in modules*, Diss. Utrecht 1979.

5.21. MULTIFUNCTIES. Een *multifunctie* f van X in Y is een afbeelding die aan elke $x \in X$ een deelverzameling $f(x)$ (eventueel $\emptyset$) van Y toevoegt; f is te interpreteren als functie $X \to \mathcal{P}(Y)$ waarin $\mathcal{P}(Y)$ de verzameling van alle deelverzamelingen van Y is. In de gevallen dat X een maatruimte of een topologische ruimte is en Y een topologische ruimte, kunnen voor multifuncties van X in Y eigenschappen als "meetbaarheid" en "continuïteit" gedefinieerd worden. Het is soms mogelijk deze eigenschappen te beschrijven met behulp van eigenschappen van de functie $f : X \to \mathcal{R}(f)$, waarin $\mathcal{R}(f) := \{f(x) \in \mathcal{P}(X) \mid x \in X\}$, namelijk door $\mathcal{R}(f)$ te voorzien van een topologie die verband houdt met die van Y. Een voorbeeld van zo'n topologie levert ons de Hausdorff-metriek (zie par. 5.6). Van de hiermee samenhangende stelling van Blaschke (zie par. 5.6) bestaan varianten en generalisaties. Als voorbeeld noemen we:

STELLING. *Zij X een volledige metrische ruimte. Laten $\mathcal{P}_1(X)$ en $\mathcal{P}_2(X)$ de collecties zijn van alle niet-lege begrensde gesloten delen resp. alle niet-*

lege compacte delen van X. Dan zijn $\mathcal{P}_1(X)$ *en* $\mathcal{P}_2(X)$*, voorzien van de Hausdorff-metriek, volledige metrische ruimten.*

Vgl. het bewijs van de stelling van Blaschke. Merk op dat convexiteit hier geen rol speelt (vgl. opgave 5).

Goed leesbare overzichtsartikelen op bovenstaand gebied zijn:

R.E. SMITHSON, *Multifunctions,* Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XX (1972) 31-53.

B.L. MCALLISTER, *Hyperspaces and Multifunctions, the first half century (1900-1950),* Nieuw-Archief voor Wiskunde (3), XXVI (1978) 309-329.

Is Y een lineaire ruimte, dan noemen we een multifunctie f van X in Y *convex* indien f(x) convex is voor alle $x \in X$. Van de literatuur over convexe multifuncties noemen we:

C. CASTAING/M. VALADIER, *Convex analysis and measurable multifunctions,* Springer, Berlin 1977.

OPGAVEN.

In het onderstaande is V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$.

1. Laat $A \subset V$ de dimensie k hebben; zij $a \in A$. Bewijs dat elke $x \in co(A)$ bevat is in een k-simplex waarvan a een hoekpunt is en waarvan de andere hoekpunten in A liggen.
2. Zij $A \subset V$. Bewijs dat co(A) de vereniging is van alle eindigdimensionale simplices met hoekpunten in A.
3. Zij $C_i \subset V$ convex $(1 \le i \le n)$ en $x \in co(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$. Bewijs dat x bevat is in een simplex waarvan elke C_i hoogstens één hoekpunt bevat.
4. Zij Γ de collectie van alle niet-lege compacte delen van $\mathbb{R}^n$, voorzien van de Hausdorff-metriek. Zij $(A_i) \subset \Gamma$, $A \in \Gamma$ met $A_i \to A (i\to\infty)$, en zij $x_i \in A_i$ $(i \in \mathbb{N})$, $x \in \mathbb{R}^n$ zó dat $x_i \to x (i\to\infty)$.
   Bewijs dat $x \in A$.
5. Zij Γ als in opgave 5. Bewijs: is $(A_i) \subset \Gamma$, $A \in \Gamma$ met $A_i \to A(i\to\infty)$, en zijn alle A_i convex, dan is A convex.
6. (a) Zij $C \subset \mathbb{R}^n$ convex. Bewijs dat $C^a = \overline{C}$.
   (b) Geef een voorbeeld van een convexe C in een topologische lineaire ruimte waarvoor geldt $C^a \neq \overline{C}$.

7. Zij $C \subset \mathbb{R}^n$ convex. Bewijs: C is gesloten $\Leftrightarrow$ voor iedere lijn m in $\mathbb{R}^n$ is $C \cap m$ gesloten.
8. Zij $C \subset \mathbb{R}^n$ convex, en zij $A \subset \mathbb{R}^n$ open. Bewijs: $A \cap \overline{C} \neq \emptyset \Rightarrow A \cap ri(C) \neq \emptyset$.
9. Laten $C,D \subset \mathbb{R}^n$ convex zijn; zij $C \subset \overline{D}$, terwijl $C \cap ri(D) \neq \emptyset$. Bewijs dat $ri(C) \subset ri(D)$.
10. (a) Bewijs de generalisatie van stelling 5.10(c) voor willekeurig veel convexe verzamelingen.
    (b) Bewijs dat de generalisatie van stelling 5.10(d) voor willekeurig veel convexe verzamelingen nièt, maar voor eindig veel wèl geldig is.
11. Bewijs de *stelling van Radon*: Laat $A \subset \mathbb{R}^n$ minstens $n+2$ punten bevatten. Dan zijn er $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ met $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = A$ en $co(A_1) \cap co(A_2) \neq \emptyset$.
12. Zij $K \subset \mathbb{R}^n$ een niet-lege convexe kegel; zij $C \subset \mathbb{R}^n$ convex en niet-leeg zó dat $C \cap K = \emptyset$. Bewijs dat er $y \in K^\circ$ is zó dat voor alle $c \in C$ geldt $(c|y) \geq 0$.
13. Bewijs dat voor twee veelvlakskegels K_1 en K_2 in $\mathbb{R}^n$ geldt

$$(K_1 \cap K_2)^\circ = K_1^\circ + K_2^\circ$$

    (vgl. hoofstuk IV, opgave 6).
14. Bewijs het lemma van Farkas door de scheidingsstelling toe te passen op $\{b\}$ en AP^n (bedenk dat geldt: $b \notin AP^n \Leftrightarrow$ er is een hypervlak dat $\{b\}$ en AP^n strikt scheidt).
15. Bewijs het *lemma van Gordan*: van de beide stelsels

$$\text{I.}\quad A^t x > 0$$
$$\text{II.}\quad Ay = 0,\ y \geq 0,\ y \neq 0$$

    is er (bij gegeven lineaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$) precies één oplosbaar.

VI. CONVEXE FUNCTIES OP EEN LINEAIRE RUIMTE

In dit hoofdstuk zijn V en E, evenals in het voorafgaande, niet-triviale lineaire resp. topologische lineaire ruimten over $\mathbb{R}$.

DE EPIGRAFIEK

6.1. DEFINITIE. Zij X een verzameling en f een functie $X \to \overline{\mathbb{R}}$. De *epigrafiek* epi(f) van f is de verzameling

$$\{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}.$$

Zie fig. 10.

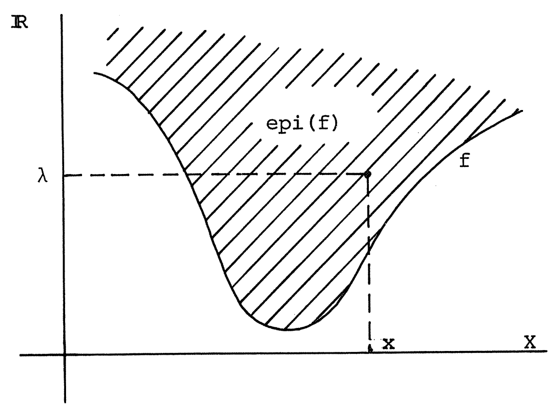

Fig. 10

In het volgende zullen eigenschappen van f soms beschreven worden in termen van eigenschappen van epi(f).
Is X een topologische ruimte, dan voorzien we $X \times \mathbb{R}$ van de produkttopologie. *Geslotenheid* van epi(f) blijkt te corresponderen met *ondercontinuïteit* van f (zie stelling 6.3). $V \times \mathbb{R}$ is op de bekende wijze tot een lineaire ruimte te maken die we aangeven met $V \oplus \mathbb{R}$. *Convexiteit* van epi(f) blijkt te corresponderen met *convexiteit* van f (zie stelling 6.10). $E \oplus \mathbb{R}$, voorzien van de produkttopologie, is een topologische lineaire ruimte.

Is in het bijzonder E een genormeerde lineaire ruimte (met norm $x \mapsto \|x\|$), dan wordt de topologie op $E \oplus \mathbb{R}$ voortgebracht door één van de (equivalente) normen $(x,\lambda) \mapsto \|x\|+|\lambda|$ en $(x,\lambda) \mapsto \max(\|x\|, |\lambda|)$.

ONDERCONTINUÏTEIT

Zij X een topologische ruimte.

6.2. DEFINITIE. Zij f een functie $X \to \overline{\mathbb{R}}$, en zij $a \in X$. f heet *ondercontinu in a* indien er bij iedere $K < f(a)$ een omgeving U van a is zó dat $f(U) > K$, en *ondercontinu* indien f ondercontinu is in ieder punt van X.

OPMERKINGEN.

(a) Een continue functie is ondercontinu.

(b) Is $a \in X$ een niet-geïsoleerd punt van X en is $f(a) = +\infty$, terwijl f ondercontinu is in a, dan is

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

(c) Is $f(a) = -\infty$, dan is f ondercontinu in a.

6.3. STELLING. *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(a) f *is ondercontinu.*

(b) *Voor elke* $\lambda \in \mathbb{R}$ *is* $\{x \in X | f(x) > \lambda\}$ *open.*

(c) *Voor elke* $\lambda \in \mathbb{R}$ *is* $\{x \in X | f(x) \leq \lambda\}$ *gesloten.*

(d) epi(f) *is gesloten (in* $X \times \mathbb{R}$).

BEWIJS. (a) $\Leftrightarrow$ (b) is een rechtstreeks gevolg van definitie (6.2); (b) $\Leftrightarrow$ (c) is triviaal. (a) $\Leftrightarrow$ (d): definieer $F: X \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ door $F(x,\lambda) = f(x)-\lambda$; met behulp van definitie (6.2) gaat men gemakkelijk na dat F ondercontinu is alleen dan als f het is. De ondercontinuïteit van F is volgens (c) equivalent met het gesloten zijn, voor alle $\mu \in \mathbb{R}$, van $\{(x,\lambda) | F(x,\lambda) \leq \mu\} =$ $= \{(x,\lambda) | (x,\lambda+\mu) \in \text{epi}(f)\}$, dus met het gesloten zijn van epi(f) (ga na).

6.4. Bewijs zelf de volgende eenvoudige eigenschappen:

(a) Het supremum van een collectie ondercontinue functies is ondercontinu.

(b) Is X compact en is $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ondercontinu, dan is f naar beneden begrensd, terwijl min f(x) (eventueel $+\infty$) bestaat.

(c) Laten f en g ondercontinue functies $X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ zijn; zij $\lambda > 0$. Bewijs dat λf en $f+g$ ondercontinu zijn.

6.5. De afsluiting $\overline{\mathrm{epi}(f)}$ van de epigrafiek van een $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ blijkt weer een epigrafiek te zijn: zij $(x,\lambda) \in \overline{\mathrm{epi}(f)}$, $\mu > \lambda$, en zij $U \times V$ een omgeving van (x,μ) in $X \times \mathbb{R}$. Er is een open interval $I \subset \mathbb{R}$ met $\lambda \in I$, $\mu \notin I$. Uit $(x,\lambda) \in \overline{\mathrm{epi}(f)}$ volgt dat er $(y,\sigma) \in \mathrm{epi}(f)$ is met $(y,\sigma) \in U \times I$; er geldt $f(y) \le \sigma < \mu$, dus $(y,\mu) \in \mathrm{epi}(f) \cap (U \times V)$. Er volgt dat $(x,\mu) \in \overline{\mathrm{epi}(f)}$. We concluderen dat de doorsnede van $\overline{\mathrm{epi}(f)}$ met een rechte $\{x\} \times \mathbb{R}$ is $\emptyset$, een halfrechte $[a,+\infty\rangle$ of $\mathbb{R}$; definiëren we in deze gevallen resp. $g(x) = +\infty$, $g(x) = a$ en $g(x) = -\infty$, dan is $\overline{\mathrm{epi}(f)}$ de epigrafiek van g.

DEFINITIE. Zij f een functie $X \to \overline{\mathbb{R}}$. Het *ondercontinue omhulsel* $\bar{f}$ *van* f is de functie $X \to \overline{\mathbb{R}}$ waarvan de epigrafiek $\overline{\mathrm{epi}(f)}$ is:

$$\mathrm{epi}(\bar{f}) = \overline{\mathrm{epi}(f)}.$$

6.6. $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heet een *minorant* van $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ als voor alle $x \in X$ geldt $g(x) \le f(x)$, ofwel als $\mathrm{epi}(g) \supset \mathrm{epi}(f)$. Volgens stelling 6.3 heeft elke ondercontinue minorant van f een gesloten epigrafiek (die $\mathrm{epi}(f)$ bevat); we concluderen dat $\bar{f}$ de *grootste ondercontinue minorant* van f is. Merk op dat $\bar{f}$ ook te definiëren is als het supremum van alle ondercontinue minoranten van f (de constante functie $-\infty$ is zo'n minorant).

6.7. In de literatuur wordt bij de definities van het begrip "ondercontinu" en van $\bar{f}$ vaak gebruik gemaakt van het begrip "liminf". We definiëren:

$$(1) \qquad \liminf_{x\to a} f(x) := \sup_U \{\inf f(x) \mid x \in U\backslash\{a\}\}$$

waarin U een omgevingsbasis van a doorloopt. Is X een genormeerde lineaire ruimte, dan is

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf\{f(x) \mid 0<\|x-a\| < \varepsilon\}$$

6.8. STELLING. *Zij* f *een functie* $X \to \overline{\mathbb{R}}$, *en zij* $a \in X$. *Dan geldt*:

(a) f *is ondercontinu* $\Leftrightarrow f = \bar{f}$.

(b) f *is ondercontinu in* $a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \liminf_{x\to a} f(x) \ge f(a).$$

(c) $\overline{f}(a) = \min\{f(a), \liminf_{x\to a} f(x)\}$.

(d) f *is ondercontinu in* a $\Leftrightarrow \overline{f}(a) = f(a)$.

BEWIJS.

(a) Toepassing van stelling 6.3 leert dat

$$f \text{ is ondercontinu} \Leftrightarrow \mathrm{epi}(f) = \overline{\mathrm{epi}(f)} \Leftrightarrow \mathrm{epi}(f) = \mathrm{epi}(\overline{f}) \Leftrightarrow f = \overline{f}$$

(ga na).

(b) volgt rechtstreeks uit definitie 6.2.

(c) Wegens de ondercontinuïteit van $\overline{f}$ geldt volgens (b)

$$\overline{f}(a) \le \liminf_{x\to a} \overline{f}(x) \le \liminf_{x\to a} f(x).$$

Verder is $\overline{f}(a) \le f(a)$, dus $\overline{f}(a) \le \mu$ waarbij

$$\mu := \min\{f(a), \liminf_{x\to a} f(x)\}.$$

Veronderstel nu dat $\overline{f}(a) < \mu$, en dat $\lambda \in \mathbb{R}$ voldoet aan $\overline{f}(a) \in I = [-\infty,\lambda\rangle$ en $\mu > \lambda$. Er is dan een omgeving U van a met $\inf\{f(x)\,|\,x \in U\backslash\{a\}\} > \lambda$, dus $(\forall x \in U) f(x) > \lambda$; $U \times I$ is dan een omgeving van $(a,\overline{f}(a))$ in $X \times \mathbb{R}$ die niets met epi(f) gemeen heeft, hetgeen in strijd is met $(a,\overline{f}(a)) \in \mathrm{epi}(\overline{f}) = \overline{\mathrm{epi}(f)}$. Er volgt dat $\overline{f}(a) = \mu$.

(d) is een onmiddellijk gevolg van (b) en (c).

OPMERKING. Soms definieert men, in plaats van (1):

$$\liminf_{x\to a} f(x) := \sup_U\{\inf f(x)\,|\,x \in U\}.$$

Bij gebruik van *deze* definitie geldt $\overline{f}(a) = \liminf_{x\to a} f(x)$.

CONVEXITEIT

6.9. DEFINITIE. Zij f een functie $V \to \overline{\mathbb{R}}$. f heet *convex* indien voor alle $x,y \in V$ en alle $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$ met $f(x) < \mu$, $f(y) < \nu$ en $0 < \lambda < 1$ geldt

(2) $$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\mu + (1-\lambda)\nu.$$

Vgl. definitie 2.21, par. 2.22 en opgave 9 van hoofdstuk II.

Uit de definitie volgt: f is convex $\Leftrightarrow$ voor elke lijn m in V is de restrictie $f|m$ van f tot m convex.
Is m de lijn door x en y (dus $m = \{(1-t)x+ty \mid t \in \mathbb{R}\}$) en definiëren we $f_m : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ door $f_m(t) = f((1-t)x+ty)$, dan geldt:

$$f|m \text{ is convex} \Leftrightarrow f_m \text{ is convex}$$

(ga na).

6.10. STELLING. *Zij* f *een functie* $V \to \overline{\mathbb{R}}$. *De volgende uitspraken zijn equivalent:*
(a) f *is convex*
(b) epi(f) *is convex*
(c) $\{(x,\lambda) \in V \oplus \mathbb{R} \mid f(x) < \lambda\}$ *is convex.*

BEWIJS.
(a) $\Leftrightarrow$ (c): Noem $A := \{(x,\lambda) \in V \oplus R \mid f(x) < \lambda\}$. Wegens $\lambda(x,\mu)+(1-\lambda)(y,\nu) = (\lambda x+(1-\lambda)y, \lambda\mu+(1-\lambda)\nu)$ geldt: A is convex $\Leftrightarrow$ is $f(x) < \mu$, $f(y) < \nu$ en $0 < \lambda < 1$, dan is

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda\mu+(1-\lambda)\nu.$$

Vergelijking met definitie 6.9 leert dat (a) en (c) equivalent zijn.
(b) $\Leftrightarrow$ (c): Veronderstel dat epi(f) convex is; zij $(x,\mu) \in A$, $(y,\nu) \in A$ en $0 < \lambda < 1$. Er geldt $f(x) < \mu$, $f(y) < \nu$; kies μ_0, ν_0 zó dat $f(x) \le \mu_0 < \mu$, $f(y) \le \nu_0 < \nu$. Uit $(x,\mu_0) \in \text{epi}(f)$, $(y,\nu_0) \in \text{epi}(f)$ volgt $(\lambda x+(1-\lambda)y, \lambda\mu_0+(1-\lambda)\nu_0) \in \text{epi}(f)$ ofwel

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda\mu_0+(1-\lambda)\nu_0 < \lambda\mu+(1-\lambda)\nu.$$

Er volgt dat $(\lambda x+(1-\lambda)y, \lambda\mu+(1-\lambda)\nu) \in A$, dus dat A convex is. Is omgekeerd A convex en is $f(x) \le \mu$, $f(y) \le \nu$, $0 < \lambda < 1$, dan is voor alle $\varepsilon > 0$

$$f(x) < \mu+\varepsilon,\ f(y) < \nu+\varepsilon$$

dus

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda(\mu+\varepsilon)+(1-\lambda)(\nu+\varepsilon) = \lambda\mu+(1-\lambda)\nu+\varepsilon.$$

Er volgt dat $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda\mu+(1-\lambda)\nu$, dus dat epi(f) convex is.

6.11. DEFINITIES.

(a) Het *effectieve domein* dom(f) van een convexe $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ is de verzameling $\{x \in V | f(x) < +\infty\}$.

(b) Een *eigenlijke convexe functie* op V is een convexe functie $V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ die niet de constante functie $+\infty$ is.

(c) Een *oneigenlijke convexe functie* op V is een convexe functie op V die niet eigenlijk is.

Het effectieve domein van een convexe functie is convex (ga na). Men kan zich een eigenlijke convexe functie op V ontstaan denken door voortzetting tot V van een reële convexe functie op dom(f) (met waarden $+\infty$ buiten dom(f); vgl. par. 2.24).

6.12. Evenals voor functies $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ (vgl. par. 2.25) blijkt ook hier (zie onderstaande stelling) dat de klasse van oneigenlijke convexe functies gemakkelijk te overzien is. Vooraf definiëren we (als voor $\mathbb{R}^n$, in par. 5.8) het *relatieve inwendige* ri(C) van $C \subset E$ als het inwendige van C, opgevat als topologische deelruimte van aff(C) (voorzien van de door E geïnduceerde topologie).

STELLING. *Zij* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *een oneigenlijke convexe functie. Dan geldt:*

(a) *Voor alle* $x \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ *is* $f(x) = -\infty$.

(b) *Is* f *ondercontinu, dan is* dom(f) *gesloten, en* $f|\mathrm{dom}(f) = -\infty$.

BEWIJS.

(a) Het gestelde is juist indien $f = +\infty$. Is dit niet het geval, dan is er $a \in \mathrm{dom}(f)$ met $f(a) = -\infty$. Zij $y \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ met $y \neq a$, en zij m de lijn door a en y. $f|m$ is een oneigenlijke convexe functie, en $y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f|m))$ (ga na); gebruik nu par. 2.25.

(b) Zij weer $f \neq +\infty$ en $f(a) = -\infty$. Veronderstel dat er $b \in E$ is met $f(b) \in \mathbb{R}$; zij m de lijn door a en b. Er geldt $\langle a,b\rangle \subset \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f|m))$; volgens par. 2.25 is dus $f(x) = -\infty$ voor alle $x \in \langle a,b\rangle$. Anderzijds is er, wegens de ondercontinuïteit van f in b, een omgeving U van b met $f(U) > -\infty$, hetgeen een tegenspraak levert. We concluderen dat $f|\mathrm{dom}(f) = -\infty$.
De geslotenheid van dom(f) volgt uit $\mathrm{dom}(f) = \{x \in E | f(x) \leq 0\}$ (vgl. stelling 6.3)

6.13. DEFINITIE. Zij f een functie $V \to \mathbb{R}$. f heet *strikt convex* indien voor alle $x,y \in V$ en alle $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ geldt

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

6.14. Bewijs zelf de volgende eenvoudige eigenschappen:

(a) Zijn f en g eigenlijke convexe functies op V en is $\lambda > 0$, $\mu > 0$, dan is $\lambda f+\mu g$ convex.

(b) De som van eindig veel eigenlijke convexe functies op V is convex.

(c) De (puntsgewijze) limiet van een convergente rij convexe functies op V is convex.

(d) Zij f een eigenlijke convexe functie op V; zij $x_i \in V$, $\lambda_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ en $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$. Dan is

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

(e) Het supremum van een collectie convexe functies op V is convex.

6.15. VOORBEELD: INDICATORFUNCTIES. Zij $A \subset V$. De *indicatorfunctie* $\delta_A : V \to \overline{\mathbb{R}}$ van A definiëren we door

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in A \\ +\infty & \text{als } x \in V\backslash A. \end{cases}$$

De lezer bewijze zelf de volgende stelling:

STELLING. *Zij* $A \subset E$. *Dan geldt:*

(a) A *is convex* $\Leftrightarrow$ δ_A *is convex.*

(b) A *is gesloten* $\Leftrightarrow$ δ_A *is ondercontinu.*

6.16. CONVEXE OMHULSELS. Zij $A \subset V \times \mathbb{R}$ convex. We definiëren $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ door

$$f(x) = \inf\{\lambda \mid (x,\lambda) \in A\} \tag{3}$$

(waarbij $\inf \emptyset = +\infty$). De lezer bewijze door toepassing van definitie 6.9 dat f convex is; f is de grootste functie op V waarvan de epigrafiek A bevat. We passen het bovenstaande toe op $A = \mathrm{co}(\mathrm{epi}(f))$ waarin f een *willekeurige* functie $V \to \overline{\mathbb{R}}$ is. De door (3) gedefinieerde functie heet in dit geval het *convexe omhulsel* co(f) *van* f; er geldt dus

$$\mathrm{co}(f)(x) = \inf\{\lambda \mid (x,\lambda) \in \mathrm{co}(\mathrm{epi}(f))\}.$$

Vgl. fig. 11.

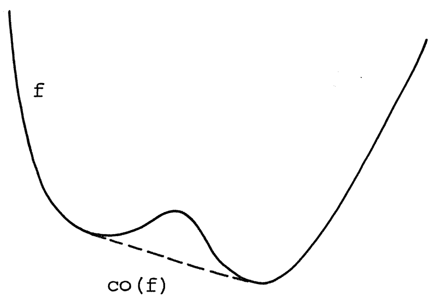

Fig. 11

co(f) is de *grootste convexe minorant* van f (ga na). Voor functies $f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is co(f) ook te definiëren als

$$\mathrm{co}(f)(x) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\} \qquad (x \in V)$$

waarbij het infimum genomen wordt over alle convexe combinaties $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ (van punten van V) die gelijk zijn aan x (ga na) .
Zij $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ convex. Uit de convexiteit van epi(f) volgt die van $\overline{\mathrm{epi}(f)} = \mathrm{epi}(\overline{f})$; er volgt dat $\overline{f}$ convex is. Combinatie met het bovenstaande leert ons dat voor een *willekeurige* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ de functie $\overline{\mathrm{co}(f)}$ de grootste onder-continue convexe minorant van f is.

6.17. INF-CONVOLUTIE. Laten f en g convexe functies $V \to \overline{\mathbb{R}}$ zijn. Gebruik van (3) met A = epi(f) + epi(g) levert ons de zogenaamde *inf-convolutie* $f \,\square\, g$ van f en g:

$$(f \,\square\, g)(x) = \inf\{\lambda \,|\, (x,\lambda) \in \mathrm{epi}(f) + \mathrm{epi}(g)\} \qquad (x \in V).$$

Aangezien epi(f) + epi(g) convex is, is ook $f \,\square\, g$ convex.
Voor functies $f,g : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is $f \,\square\, g$ ook te definiëren als

$$(f \,\square\, g)(x) = \inf\{f(x_1)+g(x_2) \,|\, x_1+x_2 = x\}.$$

De gelijkenis tussen de hiermee equivalente schrijfwijze

$$(f \,\square\, g)(x) = \inf\{f(y)+g(x-y)\,|\,y \in V\}$$

en de convolutie (integraal) van twee functies heeft aanleiding gegeven tot de naam (inf-)"convolutie".

6.18. VOORBEELDEN.

(a) Zij B een bilineaire vorm op V, d.w.z. een functie $V \times V \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt

$$\begin{cases} B(\alpha x+\beta y,z) = \alpha B(x,z)+\beta B(y,z) \\ B(x,\alpha y+\beta z) = \alpha B(x,y)+\beta B(x,z) \end{cases}$$

voor alle $x,y,z \in V$ en alle $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Geldt voor alle x: $B(x,x) \geq 0$, dan is de functie $x \mapsto B(x,x)$ convex, immers

$$B(\lambda x+(1-\lambda)y,\ \lambda x+(1-\lambda)y) =$$

$$= \lambda^2 B(x,x)+\lambda(1-\lambda)[B(x,y)+B(y,x)]+(1-\lambda)^2 B(y,y)$$

voor alle $x,y \in V$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Is nu $x \neq y$, dan geldt

$$B(x-y,x-y) = B(x,x)-B(x,y)-B(y,x)+B(y,y) \geq 0$$

ofwel

$$B(x,y)+B(y,x) \leq B(x,x)+B(y,y)$$

dus, als $\lambda \in \langle 0,1\rangle$:

$$B(\lambda x+(1-\lambda)y,\ \lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda B(x,x)+(1-\lambda)B(y,y).$$

Geldt voor alle $x \neq 0$: $B(x,x) > 0$, dan is de functie $x \mapsto B(x,x)$ strikt convex (ga na). Voorbeelden van bilineaire vormen als bovengenoemd zijn een inprodukt op V, en de vorm $(x,y) \mapsto (Ax|y)$ op $\mathbb{R}^n$ waarin A een positief semidefiniete dan wel een positief definiete lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is (d.w.z. $(Ax|x) \geq 0$ voor alle x, resp. $(Ax|x) > 0$ voor alle $x \neq 0$).

(b) Zij E een genormeerde lineaire ruimte, en zij $C \subset E$ convex en niet-leeg. Zij $x_0 \in E$; de afstand van x_0 en C wordt gedefinieerd als

$$d(x_0,C) := \inf_{y \in C} \|x_0-y\|.$$

Er geldt

$$d(x_0,C) = \inf_{y \in E}\{\|x_0-y\|+\delta_C(y)\} = (f \,\square\, \delta_C)(x_0)$$

waarin $f(x) = \|x\|$ (vgl. par. 6.15 en 6.17). Er volgt dat de functie $x \mapsto d(x,C)$ convex is.

(c) In (b) gebruikten we de convexiteit van de functie $x \mapsto \|x\|$. Algemeen geldt: is $C \subset V$ een convex algebraïsch lichaam met $0 \in C^i$, dan is het juk van C (vgl. par. 3.19) een convexe functie op V.

(d) Zij $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ convex en $a \in V$. Dan is

$$(f \,\square\, \delta_{\{a\}})(x) = f(x-a) \qquad (x \in V).$$

(e) De eenvoudigste convexe functies op V zijn de *lineaire* en de *affiene*; de laatste zijn van de vorm

$$x \mapsto f(x)+\alpha \tag{4}$$

waarin $f : V \to \mathbb{R}$ lineair is, terwijl $\alpha \in \mathbb{R}$. Een *continue affiene functie* op E is van de vorm (4) waarbij f continu lineair is.

6.19. DE RICHTINGSAFGELEIDE. Zij E een genormeerde lineaire ruimte (over $\mathbb{R}$); zij f een eigenlijke convexe functie op E. f heet in $x_0 \in E$ *differentieerbaar in de richting* x, met *richtingsafgeleide* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, indien

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x_0+\varepsilon x)-f(x_0)}{\varepsilon} = \alpha.$$

We schrijven deze richtingsafgeleide als $f'(x_0;x)$.

STELLING. *Zij* E *een genormeerde lineaire ruimte. Zij* f *een eigenlijke convexe functie op* E, *en zij* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. *Dan geldt:*

(a) $f'(x_0;x)$ *bestaat (als reëel getal of als oneigenlijke limiet* $+\infty$ *of* $-\infty$) *voor alle* $x \in E$.

(b) *De functie* $x \mapsto f'(x_0;x)$ *is positief homogeen en convex.*

BEWIJS.

(a) Zij $x \in E$. Definieer $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ door $g(\varepsilon) = f(x_0+\varepsilon x)$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$; g is een eigenlijke convexe functie (vgl. par. 6.9). Volgens par. 2.26 bestaat $g'_+(0)$, en dit is juist $f'(x_0;x)$.

(b) De positieve homogeniteit van de functie $x \mapsto f'(x_0;x)$ (d.w.z. het feit dat voor alle $x \in E$ en alle $\lambda \geq 0$ geldt $f'(x_0;\lambda x) = \lambda f'(x_0;x)$) volgt rechtstreeks uit de definitie van $f'(x_0;x)$; de convexiteit ervan volgt uit

$$\frac{1}{\varepsilon}[f(x_0+\varepsilon(\lambda y+(1-\lambda)z))-f(x_0)] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}[f(\lambda(x_0+\varepsilon y)+(1-\lambda)(x_0+\varepsilon z))-f(x_0)] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}[\lambda f(x_0+\varepsilon y)+(1-\lambda)f(x_0+\varepsilon z)-f(x_0)] =$$

$$= \lambda\cdot\frac{f(x_0+\varepsilon y)-f(x_0)}{\varepsilon} + (1-\lambda)\cdot\frac{f(x_0+\varepsilon z)-f(x_0)}{\varepsilon}$$

waarin $y,z \in E$, $\varepsilon > 0$ en $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ (vgl. hoofstuk 2, opgave 9).

CONTINUÏTEIT

6.20. We zeggen dat $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ in $a \in E$ *lokaal naar boven (beneden) begrensd* is indien er een omgeving van a is waarop f naar boven (beneden) begrensd is.

STELLING. *Zij* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *convex, en zij* $a \in E$. *Is* $f(a) > -\infty$ *en is* f *in* a *lokaal naar boven begrensd, dan geldt:*

(a) f *is een eigenlijke convexe functie, en* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)) \neq \emptyset$.

(b) f *is overal in* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ *lokaal naar boven begrensd.*

(c) f *is continu op* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

BEWIJS. Door in plaats van f de functie $g : x \mapsto f(x+a)$ te beschouwen zien we dat we ons kunnen beperken tot het geval $a = 0$. Zij U een omgeving van 0 waarop f naar boven begrensd is: zij $(\forall x \in U) f(x) \leq M < +\infty$.

(a) Er geldt $U \subset \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$; wegens $f(0) > -\infty$ volgt met par. 6.12 dat f een eigenlijke convexe functie is.

(b) Zij $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$; er is $\lambda > 1$ zó dat $\lambda x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$. $W := x_0+(1-\frac{1}{\lambda})U$ is een omgeving van x_0; voor alle $y \in W$, $y = x_0+(1-\frac{1}{\lambda})u$ (waarin $u \in U$) geldt

$$f(y) = f(\tfrac{1}{\lambda}(\lambda x_0)+(1-\tfrac{1}{\lambda})u) \le \tfrac{1}{\lambda}f(\lambda x_0) + (1-\tfrac{1}{\lambda})f(u) \le$$

$$\le \tfrac{1}{\lambda}f(\lambda x_0) + (1-\tfrac{1}{\lambda})M.$$

Er volgt dat f in x_0 lokaal naar boven begrensd is.

(c) Zij $0 < \varepsilon < 1$. $X := \varepsilon[U \cap (-U)]$ is een omgeving van 0; voor alle $x \in X$ is $\frac{1}{\varepsilon}x \in U$, dus $f(\frac{1}{\varepsilon}x) \le M$ en

$$f(x) = f((1-\varepsilon)\cdot 0+\varepsilon\cdot\tfrac{1}{\varepsilon}x) \le (1-\varepsilon)f(0)+\varepsilon f(\tfrac{1}{\varepsilon}x) \le f(0)+\varepsilon[M-f(0)].$$

Eveneens geldt $-\frac{1}{\varepsilon}x \in U$, dus

$$f(0) = f(\tfrac{1}{1+\varepsilon}x + \tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(-\tfrac{1}{\varepsilon}x)) \le \tfrac{1}{1+\varepsilon}f(x) + \tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}f(-\tfrac{1}{\varepsilon}x) \le$$

$$\le \tfrac{1}{1+\varepsilon}f(x) + \tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}M.$$

Er volgt dat voor alle $x \in X$ geldt $|f(x)-f(0)| \le \varepsilon[M-f(0)]$, dus dat f continu is in 0. Met (b) volgt dat f continu is op int(dom(f)).

6.21. We bewijzen nu een verscherping van laatstgenoemde stelling voor het geval dat E een genormeerde lineaire ruimte is (vgl. par. 2.7). Zij $A \subset E$ open. $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ heet *lokaal Lipschitz-continu op* A indien f op A reële waarden aanneemt, terwijl er bij elke $a \in A$ een omgeving U van a en een $K > 0$ zijn zó dat

$$|f(x)-f(y)| \le K\|x-y\|$$

voor alle $x,y \in U$.

STELLING. *Zij* E *een genormeerde lineaire ruimte; zij* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *een eigenlijke convexe functie. Is* f *ergens in* E *lokaal naar boven begrensd, dan is* f *op* int(dom(f)) *lokaal Lipschitz-continu.*

BEWIJS. Zij $a \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$. Volgens par. 6.20 is f continu in a; er zijn dus $r_0 > 0$ en $m,M \in \mathbb{R}$ zó dat voor alle $x \in B(a;r_0) := \{x \in E \,|\, \|x-a\| \le r_0\}$ geldt $m \le f(x) \le M$. Zij $0 < r < r_0$, en zij $x,y \in B(a;r)$. Is $\|x-y\| = \sigma$ en $z = y+ \frac{r_0-r}{\sigma}(y-x)$, dan is $y = \lambda z+(1-\lambda)x$ waarin $\lambda = \sigma/(\sigma+r_0-r)$; verder is $\|z-a\| \le \|y-a\|+r_0-r \le r_0$, dus $z \in B(a;r_0)$. Er volgt dat

$$f(y) \le \lambda f(z) + (1-\lambda)f(x)$$

dus

$$f(y) - f(x) \le \lambda[f(z)-f(x)] \le \lambda(M-m) \le \frac{M-m}{r_0-r}\|x-y\| .$$

Na verwisseling van x en y volgt dat

$$(\forall x,y \in B(a;r))\,|f(x)-f(y)| \le \frac{M-m}{r_0-r}\|x-y\|$$

waaruit het gestelde volgt.

CONTINUÏTEIT EN ONDERCONTINUÏTEIT IN $\mathbb{R}^n$

6.22. LEMMA. *Zij* $A \subset \mathbb{R}^n$ *open; zij* $x_0 \in A$. *Dan is er een n-simplex* S *met* $S \subset A$ *en* $x_0 \in \mathrm{int}(S)$.

BEWIJS. Er is $\varepsilon > 0$ zó dat de open bol met middelpunt x_0 en straal ε in A ligt. Laten $e_1,\ldots,e_n$ een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$ vormen, en zij $p := -\frac{\varepsilon}{2n}\sum_{i=1}^n e_i$; het n-simplex $T := \mathrm{co}(\frac{1}{2}\varepsilon e_1,\ldots,\frac{1}{2}\varepsilon e_n,p)$ ligt in de gesloten bol met middelpunt 0 en straal $\frac{1}{2}\varepsilon$. 0 is te schrijven als

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n}(\tfrac{1}{2}\varepsilon e_i) + \tfrac{1}{2}p = \sum_{i=1}^n \mu_i(\tfrac{1}{2}\varepsilon e_i) + \mu_0 p$$

waarin $0 < \mu_i < 1$ $(0 \le i \le n)$ en $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$; er volgt dat $0 \in \mathrm{int}(T)$, dus $x_0 \in \mathrm{int}(T+x_0)$, terwijl $T+x_0$ een in A gelegen n-simplex is.

6.23. STELLING. *Zij* f *een convexe functie* $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. *Dan is de restrictie van* f *tot* ri(dom(f)) *continu.*

BEWIJS.

(a) Zij f oneigenlijk convex. Volgens par. 6.12 is de restrictie van f tot ri(dom(f)) constant (namelijk $-\infty$), dus continu.

(b) Zij f eigenlijk convex, en zij $x_0 \in$ ri(dom(f)). Is dim(ri(dom(f))) = k, dan is er volgens lemma 6.22 een k-simplex $S = \mathrm{co}(a_0,a_1,\ldots,a_k)$ met $S \subset$ ri(dom(f)) en $x_0 \in$ ri(S). Op S is f naar boven begrensd: is $x \in S$,

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i \text{ met } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \text{ en } \lambda_i \ge 0 \ (0\le i\le k)$$

dan is

$$f(x) \le \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(a_i) \le \max_{0\le i\le k} f(a_i).$$

Er volgt (wegens $\dim(S) = k$) dat de restrictie van f tot $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$ in x_0 lokaal naar boven begrensd is; pas nu par. 6.20 toe.

OPMERKINGEN.

(a) Vgl. stelling 6.23 met par. 2.7.

(b) Uit stelling 6.23 volgt *niet* dat f continu is in elk punt van $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$. Wel geldt (zie stelling 6.24) dat f ondercontinu is in elk punt van $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$.

(c) Een *reële convexe functie op* $\mathbb{R}^n$ is volgens stelling 6.23 *continu*.

6.24. STELLING. *Zij* f *een eigenlijke convexe functie op* $\mathbb{R}^n$. *Dan geldt:*

(a) $\overline{f}(x) = f(x)$ *als* $x \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ *of* $x \notin \overline{\mathrm{dom}(f)}$.

(b) $\overline{f}$ *is eigenlijk convex.*

BEWIJS.

(a) Zij $x_0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ en zij $\varepsilon > 0$. Uit stelling 6.23 volgt dat er een omgeving U van x_0 in $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$ is zó dat $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ voor alle $x \in U$, dus $U \times \langle f(x_0)+\varepsilon,+\infty\rangle \subset \mathrm{epi}(f)$. We concluderen dat voor alle $\mu > f(x_0)$ geldt $(x_0,\mu) \in \mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f))$.
Zij $A := \{(x_0,\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ (de "verticaal" door x_0); volgens het bovenstaande is $A \cap \mathrm{ri}(\mathrm{epi}(f)) \neq \emptyset$. Toepassing van stelling 5.10(c) levert

$$A \cap \overline{\mathrm{epi}(f)} = \overline{A \cap \mathrm{epi}(f)} = \overline{[f(x_0),+\infty\rangle} = [f(x_0),+\infty\rangle$$

dus $\overline{f}(x_0) = f(x_0)$. Is $y_0 \notin \overline{\mathrm{dom}(f)}$, dan is $\overline{f}(y_0) = +\infty = f(y_0)$ (vgl. stelling 6.8(c)).

(b) Uit (a) en par. 6.12 volgt dat $\overline{f}$ een eigenlijke convexe functie is.

6.25. Combinatie van par. 6.21 en par. 6.23 levert de volgende stelling:

STELLING. *Zij* f *een eigenlijke convexe functie op* $\mathbb{R}^n$. *Dan is de restrictie van* f *tot* $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ *lokaal Lipschitz-continu* (vgl. par. 2.7).

6.26. Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open, en zij $T := \{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een collectie functies $U \to \mathbb{R}$. T heet *lokaal equi-Lipschitz-continu* indien er bij elke $x \in U$ een omgeving X van x en een $K > 0$ zijn zó dat

$$(\forall y,z \in X)(\forall \alpha \in A)|f_\alpha(y)-f_\alpha(z)| \le K\|y-z\|.$$

STELLING. *Zij* $U \subset \mathbb{R}^n$ *open, en zij* $F := \{f_\alpha | \alpha \in A\}$ *een collectie convexe functies* $U \to \mathbb{R}$. *Is voor elke* $x \in U$ *de verzameling* $\{f_\alpha(x)|\alpha \in A\}$ *begrensd, dan is* F *lokaal equi-Lipschitz-continu.*

BEWIJS (vgl. het bewijs van stelling 6.23). Zij $a \in U$. We definiëren

$$\left.\begin{aligned} M(x) &:= \sup\{f_\alpha(x)|\alpha \in A\} \\ m(x) &:= \inf\{f_\alpha(x)|\alpha \in A\} \end{aligned}\right. \qquad (x \in U).$$

Volgens lemma 6.22 is er een n-simplex $S = co(a_0,a_1,\dots,a_n)$ met $S \subset U$ en $a \in int(S)$. Er geldt

$$(\forall \alpha \in A)(\forall x \in S) f_\alpha(x) \le M$$

waarin $M := \max\{M(a_i)|0 \le i \le n\}$.
Zij $r_0 > 0$ zó dat $B(a;r_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | \|x-a\| \le r_0\} \subset S$, en zij $x \in B(a;r_0)$. Is $\|x-a\| = \sigma$ en $y = a + \frac{r_0}{\sigma}(a-x)$, dan geldt $y \in B(a;r_0)$ en $a = \lambda x + (1-\lambda)y$ waarbij $\lambda = r_0/(r_0+\sigma)$. Er volgt dat voor alle $\alpha \in A$ geldt

$$f_\alpha(a) \le \lambda f_\alpha(x) + (1-\lambda)f_\alpha(y) \le \lambda f_\alpha(x) + (1-\lambda)M$$

ofwel

$$f_\alpha(x) \ge \frac{1}{\lambda}f_\alpha(a) + \frac{\lambda-1}{\lambda}M \ge m$$

waarin $m := \min(M,m(a))$.
We concluderen dat

$$(\forall \alpha \in A)(\forall x \in B(a;r_0)) m \le f_\alpha(x) \le M.$$

Zij $0 < r < r_0$. Uit het bewijs in par. 6.21 volgt nu dat voor alle $x,y \in B(a;r)$ en alle $\alpha \in A$ geldt

$$|f_\alpha(x)-f_\alpha(y)| \le \frac{M-m}{r_0-r}\|x-y\|$$

waaruit het gestelde volgt.

6.27. Uit het voorafgaande blijkt dat er een zwakke analogie bestaat tussen lineaire en convexe functies: vgl. stelling 6.23 met de stelling die zegt dat elke lineaire functie op $\mathbb{R}^n$ continu is, en vgl. par. 6.26 met de volgende stelling: is E een Banachruimte en is $F := \{f_\alpha | \alpha \in A\}$ een collectie continue lineaire vormen op E zó dat voor elke $x \in E$ de verzameling $\{f_\alpha(x) | \alpha \in A\}$ begrensd is, dan is F uniform begrensd (d.w.z. dan is er $K > 0$ zó dat $(\forall\alpha \in A) \| f_\alpha \| \le K$).

DIFFERENTIEERBARE CONVEXE FUNCTIES

6.28. DEFINITIES. Zij E een genormeerde lineaire ruimte, en zij E' de duale van E, gedefinieerd in par. 4.13. Zij f een eigenlijke convexe functie op E, en zij $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$.

(a) f heet in x_0 *differentieerbaar*, ook wel *Fréchet-differentieerbaar* (F-differentieerbaar), indien er $x' \in E'$ is zó dat

$$(5) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-\langle x-x_0 | x' \rangle}{\| x-x_0 \|} = 0$$

ofwel

$$f(x) = f(x_0)+\langle x-x_0 | x' \rangle + o(\| x-x_0 \|) \; (x \to x_0).$$

x' is door (5) eenduidig bepaald; men geeft x' aan met $f'(x_0)$, $df(x_0)$ of $\nabla f(x_0)$ en noemt hem de *afgeleide* of *(Fréchet-)differentiaal* van f in x_0.

(b) f heet in x_0 *Gâteaux-differentieerbaar* (G-differentieerbaar) indien er $x' \in E'$ is zó dat voor alle $x \in E$ geldt

$$(6) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon x)-f(x_0)}{\varepsilon} = \langle x | x' \rangle.$$

x' is door (6) eenduidig bepaald; men noemt x' de *gradiënt* of *Gâteaux-differentiaal* van f in x_0 en geeft hem vaak aan met $\nabla f(x_0)$.

Uit F-differentieerbaarheid volgt G-differentieerbaarheid. Het omgekeerde is niet waar; dit is echter wel het geval voor eigenlijke convexe functies op $\mathbb{R}^n$.

Bestaat de G-differentiaal $\nabla f(x_0)$, dan bestaat ook $f'(x_0;x)$ voor elke x, terwijl dan

$$f'(x_0;x) = \langle x|\nabla f(x_0)\rangle.$$

Echter volgt uit het bestaan van alle richtingsafgeleiden van f in x_0 niet de G-differentieerbaarheid van f in x_0 (hiervoor is nodig en voldoende dat $f'(x_0;x)$ eindig is voor alle $x \in E$ en continu lineair van x afhangt).

6.29 STELLING. *Laten van* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *alle partiële afgeleiden tot en met die van de tweede orde bestaan en continu zijn. Zij*

$$A(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) \cdots\cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Dan geldt:

f is convex $\Leftrightarrow$ *voor alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *is de matrix* $A(x)$ *positief semidefiniet* (vgl. stelling 2.12 en voorbeeld 6.18)(a)).

BEWIJS. Volgens par. 6.9 geldt: f is convex $\Leftrightarrow$ voor alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ is de functie $g : t \mapsto f(x+ty)$ convex. Volgens stelling 2.12 geldt: g is convex $\Leftrightarrow (\forall t) g''(t) \geq 0$. Nu is

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+ty)y_i$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+ty)y_i y_j = (A(x+ty)y|y).$$

We concluderen: f is convex $\Leftrightarrow (\forall x,y,t)(A(x+ty)y|y) \geq 0$, waaruit het gestelde volgt.

SUBDIFFERENTIEERBAARHEID

6.30. Convexe functies zijn niet noodzakelijk differentieerbaar. In het onderstaande voeren we het begrip "subdifferentieerbaar" in dat een variant is op het begrip "differentieerbaar" en dat in de convexe analyse zeer bruikbaar is gebleken.

Zij E een *genormeerde lineaire ruimte*, en zij E' de duale van E.

DEFINITIES. Zij f een eigenlijke convexe functie op E.

(a) Zij $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, $x_0' \in E'$. x_0' heet een *subgradiënt van* f *in* x_0 *als*

$$(\forall x \in E) f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0 | x_0' \rangle.$$

(b) $\partial f(x_0)$ is de verzameling van alle subgradiënten van f in x_0; $\partial f(x_0)$ is een convexe deelverzameling van E'. f heet *subdifferentieerbaar in* x_0 als $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

(c) De *subdifferentiaal* ∂f *van* f is de afbeelding $x \mapsto \partial f(x)$ (die aan elke $x \in E$ een deelverzameling van E' toevoegt).

(d) Het *domein* $\mathrm{dom}(\partial f)$ van ∂f is de verzameling $\{x \in E | \partial f(x) \neq \emptyset\}$; er geldt $\mathrm{dom}(\partial f) \subset \mathrm{dom}(f)$.

6.31. VOORBEELDEN.

(a) Zij $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ convex. Volgens stelling 2.6 is f subdifferentieerbaar in elke $c \in \langle a,b\rangle$, terwijl $\partial f(c) = [f_-'(c), f_+'(c)]$.

(b) Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & \text{als } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{als } |x| > 1. \end{cases}$$

f is een eigenlijke convexe functie die subdifferentieerbaar (zelfs differentieerbaar) is in $\langle -1,+1\rangle$. Er geldt $-1,+1 \in \mathrm{dom}(f)$, maar f is niet subdifferentieerbaar in -1 en $+1$.

(c) Zij $E = \mathbb{R}^n$, $f(x) = \|x\|$. f is in 0 niet differentieerbaar, maar wel subdifferentieerbaar: $\partial f(0)$ bestaat uit alle $x' \in \mathbb{R}^n$ waarvoor geldt

$$(\forall y \in \mathbb{R}^n) \|y\| \geq (y|x')$$

en er volgt dat $\partial f(0)$ de eenheidsbol $\{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$ is (ga na). Vgl. het geval $n = 1$.

6.32. In het onderstaande geven we een meetkundige interpretatie van subdifferentieerbaarheid.

Vooraf merken we op dat elke $F \in (E \oplus \mathbb{R})'$ te schrijven is als

$$F(x,\lambda) = \langle x|x_0'\rangle + \alpha_0\lambda \qquad ((x,\lambda) \in E \oplus \mathbb{R})$$

voor zekere $x_0' \in E'$ en $\alpha_0 \in \mathbb{R}$; we schrijven wel $F = (x_0',\alpha_0)$.
Een gesloten hypervlak H in $E \oplus \mathbb{R}$ wordt dus bepaald door een vergelijking van de vorm

(7) $$\langle x|x_0'\rangle + \alpha_0\lambda = \beta_0$$

(waarin $(x_0',\alpha_0) \neq (0,0)$, terwijl $\beta_0 \in \mathbb{R}$). Is $\alpha_0 = 0$ (dan is $x_0' \neq 0$), dan noemen we H *verticaal*. Is $\alpha_0 \neq 0$, dan is (7) te schrijven als

$$\lambda = \langle x|-\frac{1}{\alpha_0}x_0'\rangle + \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

en is H blijkbaar de grafiek van de continue affiene functie
$E \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle x|-\frac{1}{\alpha_0}x_0'\rangle + \frac{\beta_0}{\alpha_0}$.

<u>6.33</u>. Zij f een eigenlijke convexe functie op E.

<u>LEMMA</u>. *Zij* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, *en zij* $F = (x_0',\alpha_0) \in (E \oplus \mathbb{R})'$. *Zij* $H = F^{-1}(\beta_0)$ *een stuthypervlak van* $\mathrm{epi}(f)$ *in* $(x_0,f(x_0))$. *Dan geldt:*
(a) *Is* $F(\mathrm{epi}(f)) \geq \beta_0$, *dan is* $\alpha_0 \geq 0$.
(b) *Is* $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, *dan is* $\alpha_0 \neq 0$ *(d.w.z. dan is* H *niet-verticaal).*

<u>BEWIJS</u>.
(a) Uit $F(\mathrm{epi}(f)) \geq \beta_0$ volgt

$$\langle x|x_0'\rangle + \alpha_0\lambda \geq \beta_0$$

voor alle $(x,\lambda) \in \mathrm{epi}(f)$; nemen we hierbij $\lambda \to +\infty$ dan zien we dat $\alpha_0 \geq 0$ (ga na).
(b) Zij $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$; veronderstel dat $\alpha_0 = 0$ en $F(\mathrm{epi}(f)) \geq \beta_0$. Er volgt dat

$$\langle x|x_0'\rangle \geq \beta_0 = \langle x_0|x_0'\rangle$$

dus

(8) $$\langle x-x_0|x_0'\rangle \geq 0$$

voor alle $x \in \mathrm{dom}(f)$. Zij $y \in E$ willekeurig. Wegens $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ is er $\varepsilon > 0$ zó dat $x_0+\varepsilon y \in \mathrm{dom}(f)$; substitutie $x = x_0+\varepsilon y$ in (8) levert

$$\langle y|x_0'\rangle \geq 0.$$

Vervanging van y door $-y$ leert dat $\langle y|x_0'\rangle \leq 0$; we concluderen dat $\langle y|x_0'\rangle = 0$. Er volgt dat $x_0' = 0$, hetgeen een tegenspraak levert.

<u>6.34. STELLING</u>. *Zij f een eigenlijke convexe functie op E, en zij $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Dan geldt: f is subdifferentieerbaar in $x_0 \Leftrightarrow \mathrm{epi}(f)$ heeft in $(x_0,f(x_0))$ een niet-verticaal gesloten stuthypervlak.*

<u>BEWIJS</u>.

$\Rightarrow$: Zij $x_0' \in \partial f(x_0)$, en zij $F := (x_0',-1)$. Zij $\beta_0 := \langle x_0|x_0'\rangle - f(x_0)$ en $H := F^{-1}(\beta_0)$; H is een niet-verticaal gesloten hypervlak in $E \oplus \mathbb{R}$. Er geldt

$$F(x_0,f(x_0)) = \beta_0$$

dus $(x_0,f(x_0)) \in H$, terwijl voor alle $(x,\lambda) \in \mathrm{epi}(f)$ geldt

$$F(x,\lambda) = \langle x|x_0'\rangle - \lambda \leq \langle x|x_0'\rangle - f(x) \leq \langle x_0|x_0'\rangle - f(x_0) = \beta_0$$

aangezien $f(x) \leq \lambda$ en $f(x) \geq f(x_0) + \langle x-x_0|x_0'\rangle$. Er volgt dat $F(\mathrm{epi}(f)) \leq \beta_0$, dus H is een stuthypervlak van epi(f) in $(x_0,f(x_0))$.

$\Leftarrow$: Zij $H = F^{-1}(\beta_0)$ een niet-verticaal gesloten stuthypervlak van epi(f) in $(x_0,f(x_0))$, waarbij $F = (x_0',\alpha_0)$. Er geldt $F(x_0,f(x_0)) = \beta_0$; we mogen veronderstellen dat

$$(9) \qquad F(\mathrm{epi}(f)) \geq \beta_0.$$

Uit (9) volgt met par. 6.33 dat $\alpha_0 \geq 0$; wegens $\alpha_0 \neq 0$ geldt dus $\alpha_0 > 0$. Verder volgt uit (9) dat voor alle $x \in \mathrm{dom}(f)$ geldt

$$\langle x|x_0'\rangle + \alpha_0 f(x) \geq \beta_0 = \langle x_0|x_0'\rangle + \alpha_0 f(x_0)$$

dus

$$(10) \qquad f(x) \geq f(x_0) + \langle x-x_0 | -\frac{1}{\alpha_0} x_0' \rangle .$$

Aangezien (10) ook geldt voor $x \notin \mathrm{dom}(f)$ volgt dat $-\frac{1}{\alpha_0} x_0' \in \partial f(x_0)$, dus $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

6.35. STELLING. *Zij f een eigenlijke convexe functie op* E.

(a) *Is f continu in zekere* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, *dan is f subdifferentieerbaar in alle* $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

(b) *Is* $E = \mathbb{R}^n$, *dan is f subdifferentieerbaar in alle* $x \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$.

BEWIJS.

(a) f is continu in x_0, dus er is een omgeving U van x_0 waarop f naar boven begrensd is:

$$(\exists K)(\forall x \in U) f(x) \leq K.$$

Er volgt dat $U \times \langle K,+\infty\rangle \subset \mathrm{epi}(f)$, dus epi(f) is een convex lichaam. Volgens par. 4.10 heeft epi(f) in $(x_0, f(x_0))$ een echt gesloten stuthypervlak H. Wegens $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ volgt met par. 6.33 dat H niet-verticaal is; toepassing van stelling 6.34 leert dat $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.
Volgens par. 6.20 is f continu op int(dom(f)); uit het bovenstaande volgt nu dat $\partial f(x) \neq \emptyset$ voor alle $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

(b) Zij $x_0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$. Volgens par. 5.12 heeft epi(f) in $(x_0, f(x_0))$ een echt stuthypervlak H (ga na dat $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{rfr}(\mathrm{epi}(f))$). Veronderstel dat H verticaal is: $H = F^{-1}(\beta_0)$ met $F = (x_0', 0)$; als in het bewijs in par. 6.33 volgt dat dan

$$\langle y | x_0' \rangle = 0$$

voor alle $y \in \mathrm{dom}(f)$, dus dat $\mathrm{epi}(f) \subset H$. Dit laatste levert echter een tegenspraak, aangezien H een *echt* stuthypervlak van epi(f) is. We concluderen dat H niet-verticaal is, dus dat $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

GEVOLG. Een convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is subdifferentieerbaar.

6.36. STELLING. *Zij f een eigenlijke convexe functie op* E, *en zij* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. *Dan geldt:*

$$x_0' \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow (\forall x \in E) f'(x_0;x) \geq \langle x | x_0' \rangle .$$

BEWIJS. Er geldt:

$$
\begin{aligned}
& x_0' \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (\forall x \in E) f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0 | x_0' \rangle \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0) f(x_0 + \varepsilon x) \geq f(x_0) + \varepsilon \langle x | x_0' \rangle \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0) \frac{1}{\varepsilon}[f(x_0 + \varepsilon x) - f(x_0)] \geq \langle x | x_0' \rangle
\end{aligned}
$$

waaruit het gestelde volgt, aangezien

$$\frac{1}{\varepsilon}[f(x_0+\varepsilon x) - f(x_0)] \downarrow f'(x_0;x) \qquad (\varepsilon \downarrow 0)$$

(vgl. par. 2.5).

6.37. STELLING. *Zij f een eigenlijke convexe functie op* E, *en zij* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. *Dan geldt: Is f G-differentieerbaar in* x_0, *met G-differentiaal* $\nabla f(x_0)$, *dan is* $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

BEWIJS. Volgens par. 6.28 geldt

$$(\forall x \in E) f'(x_0;x) = \langle x | \nabla f(x_0) \rangle.$$

Met stelling 6.36 volgt hieruit dat $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$. Is omgekeerd $x_0' \in \partial f(x_0)$, dan geldt volgens stelling 6.36 voor alle $x \in E$

$$\langle x | \nabla f(x_0) \rangle \geq \langle x | x_0' \rangle$$

ofwel

$$\langle x | \nabla f(x_0) - x_0' \rangle \geq 0.$$

Er volgt (ga na) dat $\nabla f(x_0) - x_0' = 0$ ofwel $x_0' = \nabla f(x_0)$.

OPMERKING. Men kan bewijzen: is f continu in $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ en heeft $\partial f(x_0)$ precies één element, dan is f G-differentieerbaar in x_0.

6.38. Een van de belangrijkste rekenregels van de subdifferentiaalrekening wordt gegeven door onderstaande stelling, waarvan een eerste versie is te vinden in de "theses" van Rockafellar (Harvard, 1963).

STELLING. *Laten* f_1, f_2 *eigenlijke convexe functies op* E *zijn. Dan geldt:*

(a) *Voor alle* $x \in E$ *is* $\partial(f_1+f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$.

(b) *Is er een punt in* $\mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$ *waarin* f_1 *continu is, dan geldt voor alle* $x \in E$

$$\partial(f_1+f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

BEWIJS.

(a) Is $x_1' \in \partial f_1(x)$ en $x_2' \in \partial f_2(x)$, dan geldt voor alle $y \in E$

$$f_1(y) \geq f_1(x) + \langle y-x | x_1' \rangle$$

en

$$f_2(y) \geq f_2(x) + \langle y-x | x_2' \rangle$$

dus

$$(f_1+f_2)(y) \geq (f_1+f_2)(x) + \langle y-x | x_1'+x_2' \rangle.$$

Er volgt dat $x_1'+x_2' \in \partial(f_1+f_2)(x)$; we concluderen dat

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) \subset \partial(f_1+f_2)(x).$$

(b) Zij $x_0 \in E$, $x_0' \in \partial(f_1+f_2)(x_0)$ (dus $x_0 \in \mathrm{dom}(f_1+f_2) = \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$). Definieer g_1 en g_2 door

$$(11) \quad \begin{cases} g_1(x) = f_1(x+x_0) - f_1(x_0) - \langle x | x_0' \rangle \\ g_2(x) = f_2(x+x_0) - f_2(x_0) \end{cases}$$

($x \in E$). g_1 en g_2 zijn eigenlijke convexe functies op E waarvoor geldt $\mathrm{dom}(g_1) = \mathrm{dom}(f_1)-x_0$, $\mathrm{dom}(g_2) = \mathrm{dom}(f_2)-x_0$, $g_1(0) = g_2(0) = 0$ en $0 \in \partial(g_1+g_2)(0)$; verder is g_1 continu in een punt van $\mathrm{dom}(g_1) \cap \mathrm{dom}(g_2)$. Zij

$$\begin{cases} C_1 = \{(x,\lambda) \in E \oplus \mathbb{R} \mid g_1(x) \leq \lambda\} \\ C_2 = \{(x,\lambda) \in E \oplus \mathbb{R} \mid \lambda \leq -g_2(x)\} \end{cases}$$

C_1 en C_2 zijn convex en niet-leeg (ga na; merk op dat $C_1 = \mathrm{epi}(g_1)$).
Vgl. fig. 12.

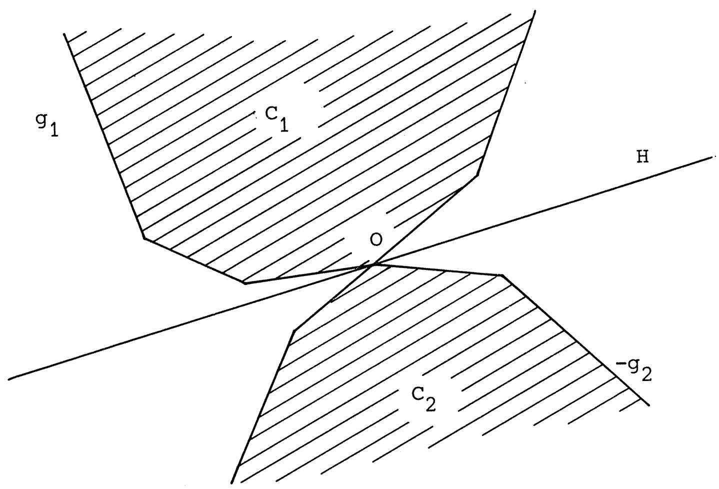

Fig. 12

We gaan C_1 en C_2 scheiden. Allereerst merken we op dat uit de continuïteit van g_1 in een punt van $\mathrm{dom}(g_1)$ volgt dat $\mathrm{int}(C_1) \neq \emptyset$ (vgl. het bewijs van stelling 6.35). Verder is $\mathrm{int}(C_1) \cap C_1 = \emptyset$, immers uit $(x,\lambda) \in \in \mathrm{int}(C_1) \cap C_2$ volgt dat er $\varepsilon > 0$ is zó dat $\{x\} \times \langle\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon\rangle \subset C_1$, dus

$$g_1(x) \leq \lambda-\varepsilon < \lambda \leq -g_2(x).$$

Dit levert een tegenspraak, aangezien uit $0 \in \partial(g_1+g_2)(0)$ volgt dat

$$(\forall x \in E)\, g_1(x) \geq -g_2(x).$$

Volgens stelling 4.8 is er een gesloten hypervlak H dat C_1 en C_2 echt scheidt. Zij $H = F^{-1}(\beta)$, $F(C_1) \leq \beta$, $F(C_2) \geq \beta$, $F = (x',\alpha)$ met $(x',\alpha) \neq \neq (0,0)$; wegens $(0,0) \in H$ is $\beta = 0$. Veronderstel dat $\alpha = 0$ (dus $x' \neq 0$). Dan geldt

$$(12) \qquad (\forall x \in \mathrm{dom}(g_1))\ \langle x|x'\rangle \leq 0$$

en

$$(13) \qquad (\forall x \in \mathrm{dom}(g_2))\ \langle x|x'\rangle \geq 0.$$

Er is een punt $y \in \mathrm{dom}(g_1) \cap \mathrm{dom}(g_2)$ waarin g_1 continu is, dus $y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(g_1))$. Met (12) volgt (ga na) dat $\langle y|x'\rangle < 0$, hetgeen in strijd is met (13). We concluderen dat $\alpha \neq 0$; wegens $(\forall\lambda > 0)(0,\lambda) \in C_1$ geldt $\alpha < 0$. Noemen we $y_0' := -\frac{1}{\alpha}x'$, dan is dus

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathrm{dom}(g_1))\ \langle x|y_0'\rangle \leq g_1(x) \\ (\forall x \in \mathrm{dom}(g_2))\ \langle x|y_0'\rangle \geq -g_2(x) \end{cases}$$

en met (11) volgt dat voor alle $x \in E$ geldt

$$\begin{cases} f_1(x+x_0) \geq f_1(x_0) + \langle x|x_0'+y_0'\rangle \\ f_2(x+x_0) \geq f_2(x_0) + \langle x|-y_0'\rangle \end{cases}$$

ofwel $x_0' + y_0' \in \partial f_1(x_0)$, $-y_0' \in \partial f_2(x_0)$. We concluderen dat $x_0' = (x_0'+y_0') + (-y_0') \in \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)$. Er volgt dat $\partial(f_1+f_2)(x_0) \subset \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)$.

<u>OPMERKING</u>. De relatie $\partial(f_1+f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$ geldt *niet* algemeen.

<u>6.39</u>. In het eindigdimensionale geval kunnen we het in par. 6.38 gestelde als volgt verscherpen:

<u>STELLING</u>. *Laten* f_1 en f_2 *eigenlijke convexe functies op* $\mathbb{R}^n$ *zijn, met* $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f_1)) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f_2)) \neq \emptyset$. *Dan geldt voor alle* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\partial(f_1+f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

<u>BEWIJS</u>. We volgen de bewijsgang van par. 6.38. Na g_1, g_2, C_1 en C_2 gedefinieerd te hebben constateren we dat $\mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2) = \emptyset$. Volgens par. 5.11 is er een hypervlak $H = F^{-1}(\beta)$ dat C_1 en C_2 echt scheidt. Zij $F = (x',\alpha)$, en veronderstel dat $\alpha = 0$. Dan is

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x|x'\rangle = 0\}$$

een hypervlak in $\mathbb{R}^n$ dat $\mathrm{dom}(g_1)$ en $\mathrm{dom}(g_2)$ echt scheidt, hetgeen volgens par. 5.11 in strijd is met het gegeven; er volgt dat $\alpha \neq 0$. We maken het bewijs af als in par. 6.38.

OPGAVEN

Neem V en E als in het voorafgaande.

1. Zij X een topologische ruimte, $A \subset S$, en zij f een functie $A \to \overline{\mathbb{R}}$. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:
   (a) Voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ is $\{x \in A | f(x) \leq \lambda\}$ gesloten in X.
   (b) $\{(x,\lambda) \in A \times \mathbb{R} | f(x) \leq \lambda\}$ is gesloten in $X \times \mathbb{R}$.
   (c) f is ondercontinu, en voor alle $a \in \overline{A} \setminus A$ geldt

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

2. Bewijs, met de notaties van par. 6.9:
   $f|m$ is convex $\Leftrightarrow f_m$ is convex.

3. Laten V en W lineaire ruimten (over $\mathbb{R}$) zijn; zij $T : V \to W$ lineair, en zij $f : W \to \overline{\mathbb{R}}$ convex. We definiëren $g : V \to \overline{\mathbb{R}}$ door $g(x) = f(Tx)$. Bewijs dat g convex is.

4. Zij $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ een convexe functie waarvan het effectieve domein relatief open is. Bewijs: $(\forall x \in E) f(x) > -\infty$ of $(\forall x \in E) |f(x)| = +\infty$.

5. Bewijs de stelling in par. 6.15.

6. Laten V en W lineaire ruimten zijn; zij $f : V \times W \to \overline{\mathbb{R}}$ convex. We definiëren $g : V \to \overline{\mathbb{R}}$ door

$$g(x) = \inf\{f(x,y) | y \in W\}.$$

   Bewijs dat g convex is.

7. Zij $A \subset V \times \mathbb{R}$ convex. Definieer $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ door

$$f(x) = \inf\{\lambda | (x,\lambda) \in A\}.$$

   Bewijs dat f convex is.

8. Zij f een continue eigenlijke convexe functie op E, en zij $\lambda \in \mathbb{R}$. Zij $A := \{x \in E | f(x) \leq \lambda\}$, $B := \{x \in E | f(x) < \lambda\}$. Bewijs:
   (a) Uit de gegevens volgt niet dat $B = \mathrm{int}(A)$.
   (b) Is er een $x \in E$ met $f(x) < \lambda$, dan is $B = \mathrm{int}(A)$.

9. Zij f een reële convexe functie op V. Bewijs:
   (a) Elk lokaal minimum van f is een globaal minimum.
   (b) Is f strikt convex, dan heeft f hoogstens één globaal minimum.
   (Vgl. hoofstuk II, opgave 1).

10. Zij E een lineaire ruimte met inprodukt (en bijbehorende norm); zij $C \subset E$ convex en niet-leeg, en zij $x_0 \in E$. Bewijs: er is hoogstens één beste benadering van x_0 in C, d.w.z. hoogstens één $c \in C$ met

$$\|x_0 - c\| = d(x_0, C).$$

11. Laten f en g convexe functies $V \to \overline{\mathbb{R}}$ zijn. Bepaal dom(f $\square$ g).

12. (a) Zij $C \subset E$ convex, en zij $f : C \to \mathbb{R}$ convex. Bewijs dat f òf overal òf nergens in $\overline{C}$ lokaal naar beneden begrensd is.
    N.B. f heet in $a \in \overline{C}$ lokaal naar beneden begrensd indien er een omgeving U van a is zó dat f op $U \cap C$ naar beneden begrensd is.
    (b) Zij $C \subset \mathbb{R}^n$ convex, en zij $f : C \to \mathbb{R}$ convex. Bewijs dat f overal in $\overline{C}$ lokaal naar beneden begrensd is.
    (c) Geef een voorbeeld van het tweede in (a) genoemde geval.

13. Zij $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ convex, en zij $a \in \mathrm{dom}(f)$. Bewijs: f is continu in a $\Leftrightarrow$ f is in a lokaal naar boven begrensd. Vgl. par. 6.20.

14. Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ convex, niet-leeg en open, en zij $f : U \to \mathbb{R}$ convex. Bewijs dat f Lipschitz-continu is op elk compact deel van U. Vgl. par. 2.7.

15. Zij f een functie $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ zó dat $x \mapsto f(x,y)$ voor alle $y \in \mathbb{R}^q$ continu is, terwijl $y \to f(x,y)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^p$ convex is. Bewijs dat f continu is (gebruik par. 6.26).

16. Bewijs dat de functie $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, gedefinieerd door

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} -(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n)^{\frac{1}{n}} & \text{als } \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \ldots, \xi_n \geq 0 \\ +\infty & \text{elders} \end{cases}$$

convex is.

17. Zij f een functie $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; zij $x \to f(x,t)$ convex voor alle $t \in [a,b]$, terwijl f continue partiële afgeleiden van de tweede orde naar x_i en x_j heeft. Bewijs dat de functie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

convex is.

18. Zij E een genormeerde lineaire ruimte, en zij f een functie $E \to \mathbb{R}$. Definieer "subdifferentieerbaarheid" van f als in par. 6.30, en bewijs: is f subdifferentieerbaar, dan is f convex.

19. We definiëren de maximumnorm f op $\mathbb{R}^n$ door $f(x_1,\ldots,x_n) = \max_i |x_i|$. Bewijs dat $\partial f(0) = \mathrm{co}(e_1,\ldots,e_n,-e_1,\ldots,-e_n)$, waarbij

$$e_i = (e_{i1},\ldots,e_{in}) \text{ met } e_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ als } k = i \\ 0 \text{ als } k \neq i \end{cases} \quad (1 \le i \le n).$$

20. Zij E een genormeerde lineaire ruimte; zij $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ $(x \in E)$.
   (a) Bewijs dat f convex is.
   (b) Bewijs dat voor alle $x \in E$ geldt:
   $\partial f(x) = \{x' \in E' \,|\, \langle x|x'\rangle = \|x\|\cdot\|x'\| \text{ en } \|x'\| = \|x\|\}$
   waarbij

$$\|x'\| := \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle x|x'\rangle|}{\|x\|}.$$

   (c) Bewijs: is E een Hilbertruimte, dan is $\partial f(x) = \{x\}$ $(x \in E)$.

21. Zij E een genormeerde lineaire ruimte; zij $f : E \to \mathbb{R}$ G-differentieerbaar met G-differentiaal ∇f. Bewijs:
   (a) f is convex $\Leftrightarrow$ $(\forall x,y \in E) f(y) \ge f(x)+\langle y-x|\nabla f(x)\rangle$.
   (b) f is strikt convex $\Leftrightarrow$ $(\forall x,y \in E) f(y) > f(x)+\langle y-x|\nabla f(x)\rangle$.

22. Zij E een genormeerde lineaire ruimte; zij f een eigenlijke convexe functie op E die continu is in $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Bewijs dat

$$(\forall x \in E) f'(x_0;x) = \max\{\langle x|x_0'\rangle \,|\, x_0' \in \partial f(x_0)\}.$$

AANWIJZING. Uit de continuïteit van f in x_0 volgt dat $\mathrm{int}(\mathrm{epi}(f)) \neq \emptyset$ (vgl. het bewijs van stelling 6.35); pas par. 4.9 toe.

23. Bewijs de "OPMERKING" bij stelling 6.37 (vgl. opgave 22).

24. Bedenk een situatie waarin geldt

$$\partial(f_1+f_2)(x) \neq \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

(vgl. par. 6.38).

25. Leid de stelling in par. 6.38 voor het geval dat $E = \mathbb{R}^n$ af uit de stelling in par. 6.39.

VII. DUALITEIT

7.1. In dit hoofdstuk houden we ons bezig met enkele onderwerpen waarbij het begrip "geconjugeerde" (of "duale") functie een rol speelt. Zoals al in par. 2.18 is uiteengezet komt dit begrip reeds in vrij oude artikelen voor; de eerste algemene beschouwingen erover zijn te vinden in

W. FENCHEL, *On conjugate convex functions,* Canad. J. Math. 1 (1949) 73-77.

E is in dit hoofdstuk een (niet-triviale) genormeerde lineaire ruimte (over $\mathbb{R}$), met norm $x \mapsto \|x\|$, en E' is de duale van E. We merken nog op dat er (als gevolg van de stelling van Hahn-Banach) bij elke $x \in E$ met $x \neq 0$ een $x' \in E'$ is met $\langle x|x'\rangle \neq 0$ (hetgeen ook volgt uit stelling 4.12; ga na).

DE GECONJUGEERDE FUNCTIE

7.2. DEFINITIES.

(a) De *geconjugeerde* (ook: *duale* of *polaire*) functie van een functie $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ is de functie

$$f^* : E' \to \overline{\mathbb{R}}$$

gedefinieerd door

$$f^*(x') = \sup_{x \in E}\{\langle x|x'\rangle - f(x)\} \qquad (x' \in E').$$

(b) De *geconjugeerde* van een functie $g : E' \to \overline{\mathbb{R}}$ is de functie

$$g^* : E \to \overline{\mathbb{R}}$$

gedefinieerd door

$$g^*(x) = \sup_{x' \in E'}\{\langle x|x'\rangle - g(x')\} \qquad (x \in E).$$

(c) De *bipolaire* functie f^{**} van een functie $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ of $E' \to \overline{\mathbb{R}}$ is de geconjugeerde $(f^*)^*$ van de geconjugeerde van f.

7.3. OPMERKINGEN.

(a) Is $f^*(x')$ een reëel getal, dan is dit blijkbaar het kleinste reële getal α waarvoor geldt

$$(\forall x \in E) f(x) \geq \langle x|x'\rangle - \alpha.$$

vgl. par. 2.17.

(b) $x \mapsto \langle x|x'\rangle - g(x')$ is een continue affiene functie op E. Voorzien we E' van de gebruikelijke (sterke of norm-) topologie, bepaald door de norm $x' \mapsto \|x'\|$ waarbij

$$\|x'\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle x|x'\rangle|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |\langle x|x'\rangle|$$

dan is ook $x' \mapsto \langle x|x'\rangle - f(x)$ een continue affiene functie op E'. Echter is dan niet *elke* continue affiene functie op E' noodzakelijk van de vorm $x' \mapsto \langle x|x'\rangle - \alpha$ met $x \in E$ en $\alpha \in \mathbb{R}$; dat is wel het geval indien we E' (bijvoorbeeld) voorzien van de zwakke topologie (waarin, bijvoorbeeld, $x'_n \to x'$ betekent dat $\langle x|x'_n\rangle \to \langle x|x'\rangle$ voor alle $x \in E$).

(c) Het begrip "geconjugeerde functie" hangt samen met de in de theorie der differentiaalvergelijkingen bekende *Legendre-transformatie* (ook: duale transformatie), voor functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$X = y', \ Y = xy' - y.$$

7.4. Bewijs zelf de volgende eenvoudige eigenschappen:

(a) Is ook h een functie $E \to \overline{\mathbb{R}}$ en is $f \leq h$, dan is $f^* \geq h^*$.

(b) $(+\infty)^* = -\infty$.

(c) Neemt f de waarde $-\infty$ aan, dan is $f^* = +\infty$; in het bijzonder: $(-\infty)^* = +\infty$. Merk op dat uit (b) en (c) volgt dat *niet* altijd geldt $f^{**} = f$. Wel geldt altijd $f^{**} \leq f$ (ga na; zie ook stelling 7.12).

(d) Is $\{f_\alpha | \alpha \in A\}$ een collectie functies $E \to \overline{\mathbb{R}}$, dan is

$$(\inf_\alpha f_\alpha)^* = \sup_\alpha f_\alpha^*$$

$$(\sup_\alpha f_\alpha)^* \leq \inf_\alpha f_\alpha^*$$

terwijl in de laatste ongelijkheid niet altijd het gelijkteken geldt.

(e) Voor alle $\lambda > 0$ is

$$(\lambda f)^*(x') = \lambda f^*(x'/\lambda) \qquad (x' \in E').$$

(f) Voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ is

$$(f+\alpha)^* = f^* - \alpha.$$

(g) Voor alle $x \in E$, $x' \in E'$ is

$$f_x^*(x') = f^*(x') + \langle x|x'\rangle$$

waarin $f_x(y) = f(y-x)$ $(y \in E)$.

(h) $\inf\{f(x) \mid x \in E\} = -f^*(0)$.

7.5. VOORBEELDEN.

(a) Zij $f(x) = \langle x|x_0'\rangle - \alpha$ waarin $x_0' \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dan is

$$f^*(x') = \sup_{x\in E}\{\langle x|x'-x_0'\rangle + \alpha\} = \begin{cases} +\infty & \text{als } x' \neq x_0' \\ \alpha & \text{als } x' = x_0' \end{cases}$$

dus $f^* = \delta_{\{x_0'\}} + \alpha$ (vgl. par. 6.15).

(b) Zij $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$. Dan is

$$\begin{aligned} f^*(x') &= \sup_{x\in E}\{\langle x|x'\rangle - \tfrac{1}{2}\|x\|^2\} = \\ &= \sup_{t\geq 0}\sup_{\|x\|=t}\{\langle x|x'\rangle - \tfrac{1}{2}\|x\|^2\} = \\ &= \sup_{t\geq 0}\{t\sup_{\|x\|=1}\langle x|x'\rangle - \tfrac{1}{2}t^2\} = \\ &= \sup_{t\geq 0}\{t\|x'\| - \tfrac{1}{2}t^2\} = \tfrac{1}{2}\|x'\|^2. \end{aligned}$$

7.6. DEFINITIE. Zij $A \subset E$. De *stutfunctie* van A is de geconjugeerde functie δ_A^* van de indicatorfunctie δ_A:

$$\delta_A^*(x') = \sup_{x\in E}\{\langle x|x'\rangle - \delta_A(x)\} = \sup_{x\in A}\langle x|x'\rangle \qquad (x' \in E').$$

Geef zelf een meetkundige interpretatie van δ_A^* voor het geval dat $E = \mathbb{R}^n$.

7.7. STELLING. *Laten* f *en* g *functies* $E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *zijn. Dan is*

$$(f \,\square\, g)^* = f^* + g^*$$

(*vgl. par.* 6.17).

BEWIJS. Voor alle $x' \in E'$ is

$$\begin{aligned}(f \,\square\, g)^*(x') &= \sup_x [\langle x|x'\rangle - \inf_{x_1+x_2=x} \{f(x_1) + g(x_2)\}] = \\ &= \sup_x \sup_{x_1+x_2=x} \{\langle x|x'\rangle - f(x_1) - g(x_2)\} = \\ &= \sup_{x_1,x_2} [\{\langle x_1|x'\rangle - f(x_1)\} + \{\langle x_2|x'\rangle - g(x_2)\}] = \\ &= f^*(x') + g^*(x').\end{aligned}$$

7.8. VOORBEELD. Zij $C \subset E$ convex en niet-leeg, en zij

$$f(x) := \inf_{y \in C} \|x-y\| \qquad (x \in E).$$

In par. 6.18, voorbeeld (b) hebben we gezien dat $f = g \,\square\, \delta_C$ waarin $g(x) = \|x\|$ $(x \in E)$. Nu is, voor alle $x' \in E'$,

$$\begin{aligned}g^*(x') &= \sup_x \{\langle x|x'\rangle - \|x\|\} = \\ &= \sup_{t \geq 0} \sup_{\|x\|=t} \{\langle x|x'\rangle - t\} = \\ &= \sup_{t \geq 0} t(\|x'\|-1) = \begin{cases} +\infty & \text{als } \|x'\| > 1 \\ 0 & \text{als } \|x'\| \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

dus $g^* = \delta_S$ waarin $S = \{x' \in E' \,|\, \|x'\| \leq 1\}$. Er volgt dat

$$f^* = g^* + \delta_C^* = \delta_S + \delta_C^*$$

dus

$$f^*(x') = \begin{cases} \delta_C^*(x') & \text{als } \|x'\| \leq 1 \\ +\infty & \text{als } \|x'\| > 1. \end{cases}$$

7.9. STELLING. *Voor elke* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *is* f^* *een ondercontinue convexe functie (t.o.v. de normtopologie op* E'; *vgl. par.* 7.3, *opmerking* (b)).

BEWIJS. Wordt aan de lezer overgelaten.

7.10. Voor elke $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ en alle $x \in E$, $x' \in E'$ geldt

$$f^*(x') \geq \langle x|x'\rangle - f(x)$$

dus

$$f(x) + f^*(x') \geq \langle x|x'\rangle \tag{1}$$

mits het linkerlid gedefinieerd is. Men noemt (1) de *ongelijkheid van Fenchel*; vgl. par. 2.18.

7.11. STELLING. *Zij* f *een eigenlijke convexe functie op* E. *Dan geldt*:

$$x' \in \partial f(x) \Leftrightarrow f^*(x') = \langle x|x'\rangle - f(x). \tag{2}$$

BEWIJS. Er geldt

$$\begin{aligned} x' \in \partial f(x) &\Leftrightarrow (\forall y \in E) f(y) \geq f(x) + \langle y-x|x'\rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in E) \langle x|x'\rangle - f(x) \geq \langle y|x'\rangle - f(y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sup_y \{\langle y|x'\rangle - f(y)\} = \langle x|x'\rangle - f(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^*(x') = \langle x|x'\rangle - f(x). \end{aligned}$$

OPMERKING. De laatste gelijkheid is equivalent met

$$f(x) + f^*(x') = \langle x|x'\rangle$$

mits het linkerlid gedefinieerd is. Blijkbaar zijn de subgradiënten van f de elementen van E' die de ongelijkheid van Fenchel (zie par. 7.10) in een gelijkheid doen overgaan.

7.12. STELLING. *Zij f een functie* $E \to \overline{\mathbb{R}}$. *Dan geldt:*

(a) f^{**} *is het supremum van de verzameling van alle continue affiene minoranten van f.*

(b) f^{**} *is een ondercontinue convexe functie op* E.

(c) $f^{***} = f^{*}$.

BEWIJS.

(a) Zij F het genoemde supremum.
Er geldt

$$f^{**}(x) = \sup_{x'}\{\langle x|x'\rangle - f^{*}(x')\} \qquad (x \in E).$$

Elke functie $g : x \mapsto \langle x|x'\rangle - f^{*}(x')$ is continu en affien op E; bovendien volgt uit de ongelijkheid van Fenchel dat g een minorant is van f. Er volgt dat $f^{**} \le F$. Is $x \mapsto \langle x|x'\rangle - \alpha$ een continue affiene minorant van f, dan is

$$(\forall x \in E)\langle x|x'\rangle - \alpha \le f(x)$$

dus

$$\alpha \ge \sup_{x}\{\langle x|x'\rangle - f(x)\} = f^{*}(x').$$

Er volgt dat

$$\langle x|x'\rangle - \alpha \le \langle x|x'\rangle - f^{*}(x')$$

dus

$$F(x) \le \sup_{x'}\{\langle x|x'\rangle - f^{*}(x')\} = f^{**}(x)$$

voor alle $x \in E$. We concluderen dat $f^{**} = F$.

(b) Vgl. stelling 7.9.

(c) Volgens (a) is $f^{**} \le f$; met par. 7.4, eigenschap (a), volgt dat $f^{***} \ge f^{*}$. Verder volgt uit de ongelijkheid van Fenchel dat

$$f^{*}(x') + f^{**}(x) \ge \langle x|x'\rangle \quad (x \in E,\ x' \in E')$$

dus

$$f^*(x') \geq \sup_x\{<x|x'> - f^{**}(x)\} = f^{***}(x')$$

voor alle $x' \in E'$. We concluderen dat $f^{***} = f^*$.

7.13. In het volgende treffen we enige voorbereidingen tot het geven van een andere karakterisering van f^{**}. Allereerst bewijzen we:

STELLING. *Een ondercontinue eigenlijke convexe functie* $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *heeft een continue affiene minorant, en wel is er bij elke* $x_0 \in E$ *en elke* $\alpha_0 \in \langle -\infty, g(x_0)\rangle$ *een continue affiene functie* h *met* $h(x_0) = \alpha_0$ *en* $h < g$.

BEWIJS. Zij $x_0 \in E$ en $-\infty < \alpha_0 < g(x_0)$; er geldt $X_0 := (x_0,\alpha_0) \notin \mathrm{epi}(g)$. Aangezien $\mathrm{epi}(g)$ convex en gesloten is in $E \oplus \mathbb{R}$ en bovendien niet-leeg, is er volgens stelling 4.12 een gesloten hypervlak $H = F^{-1}(\beta)$ dat $\mathrm{epi}(g)$ en X_0 strikt scheidt. Zij $F = (x',\alpha)$ en

(3) $$(\forall (x,\lambda) \in \mathrm{epi}(g)) < x|x'> + \alpha\lambda > \beta$$

(4) $$<x_0|x'> + \alpha\alpha_0 < \beta.$$

Uit (3) volgt (neem $\lambda \to +\infty$) dat $\alpha \geq 0$.

(a) Is $g(x_0) < +\infty$, dan volgt uit (3) en (4) dat

$$<x_0|x'> + \alpha g(x_0) > \beta > <x_0|x'> + \alpha\alpha_0$$

dus $\alpha(g(x_0)-\alpha_0) > 0$; we concluderen dat $\alpha > 0$. Definieer de continue affiene functie h op E door

$$h(x) = <x-x_0|-\tfrac{1}{\alpha}x'> + \alpha_0.$$

Volgens (3) en (4) geldt

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(g))\, g(x) > \frac{\beta}{\alpha} + <x|-\tfrac{1}{\alpha}x'> =$$

$$= h(x) + <x_0|-\tfrac{1}{\alpha}x'> + \frac{\beta}{\alpha} - \alpha_0 > h(x)$$

dus $h < g$, terwijl $h(x_0) = \alpha_0$.

(b) Is $g(x_0) = +\infty$ en $\alpha > 0$, dan kunnen we te werk gaan als onder (a).

(c) Is $g(x_0) = +\infty$ en $\alpha = 0$, dan geldt voor de continue affiene functie k op E, gedefinieerd door

$$k(x) = \langle x|-x'\rangle + \beta$$

dat $k(x_0) > 0$ en $(\forall x \in \mathrm{dom}(g))k(x) \le 0$. Uit (a) volgt dat g een continue affiene minorant m heeft met $m < g$; is $m(x_0) \ge \alpha_0$, dan kunnen we nemen $h := m + \alpha_0 - m(x_0)$. Stel nu $m(x_0) < \alpha_0$. Voor alle $\lambda > 0$ is $m + \lambda k$ een continue affiene functie met $m + \lambda k < g$; neem nu $h := m + \lambda_0 k$ met $\lambda_0 = (\alpha_0 - m(x_0))/k(x_0)$.

GEVOLG. Een ondercontinue eigenlijke convexe functie is het supremum van de verzameling van zijn continue affiene minoranten; is g zo'n functie, dan geldt $g^{**} = g$.

7.14. Teneinde in het volgende tot een eenvoudige formulering te komen voeren we nog het begrip "afsluiting van een functie" in. De afsluiting lijkt sterk op het ondercontinue omhulsel, maar valt er niet altijd mee samen.

DEFINITIES. Zij f een functie $E \to \overline{\mathbb{R}}$.

(a) De *afsluiting* $c\ell(f)$ van f is de functie $E \to \overline{\mathbb{R}}$ gedefinieerd door

$$c\ell(f) = \begin{cases} \overline{f} & \text{als } (\forall x \in E)\overline{f}(x) > -\infty \\ -\infty & \text{als } (\exists x \in E)\overline{f}(x) = -\infty. \end{cases}$$

(b) f heet *gesloten* als $c\ell(f) = f$.

7.15. VOORBEELDEN.

(a) Zij $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ convex. Neemt $\overline{f}$ de waarde $-\infty$ aan, dan neemt $\overline{f}$ volgens par. 6.12 slechts de waarden $-\infty$ en $+\infty$ aan, en wel is dan (ga na)

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} -\infty & \text{als } x \in \overline{\mathrm{dom}(f)} \\ +\infty & \text{als } x \notin \overline{\mathrm{dom}(f)} \end{cases}$$

Blijkbaar verschilt $c\ell(f)$ in dit geval slechts buiten $\overline{\mathrm{dom}(f)}$ van $\overline{f}$: $c\ell(f)$ is daar $-\infty$, $\overline{f}$ is daar $+\infty$.

(b) Is f een eigenlijke convexe functie op $\mathbb{R}^n$, dan is $\overline{f}$ volgens stelling 6.24 ook eigenlijk convex; in dit geval is $c\ell(f) = \overline{f}$. Voor eigenlijke convexe functies op $\mathbb{R}^n$ betekent "gesloten" dus hetzelfde als "ondercontinu".

7.16. De in par. 7.13 aangekondigde karakterisering van f^{**} luidt als volgt (f is een functie $E \to \overline{\mathbb{R}}$):

STELLING. $f^{**} = c\ell(co(f))$.

BEWIJS. Noem $g = c\ell(co(f))$; g is een ondercontinue convexe functie (vgl. par. 6.16 en par. 7.14). Heeft f een continue affiene minorant h, dan geldt $h \leq f$ en dus ook $h \leq \overline{co(f)}$; $\overline{co(f)}$ kan dan niet de waarde $-\infty$ aannemen, en dan is $\overline{co(f)} = c\ell(co(f)) = g$.

(a) Is $g = +\infty$, dan is ook $f = +\infty$, dus $f^{**} = +\infty = g$.

(b) Neemt g de waarde $-\infty$ aan, dan heeft f volgens het bovenstaande geen continue affiene minorant, en dan is $f^{**} = -\infty = g$.

(c) In alle andere gevallen is g een ondercontinue eigenlijke convexe functie, terwijl $g = \overline{co(f)}$. Er geldt $f^{**} \leq g$ (ga na); veronderstel dat er $x_0 \in E$ is met $f^{**}(x_0) < g(x_0)$. Er is dan een $a \in \mathbb{R}$ met $f^{**}(x_0) < a < g(x_0)$. Volgens par. 7.13 is er een continue affiene functie h met $h(x_0) = a$ en $h < g$; er volgt dat $f^{**}(x_0) \geq h(x_0) = a$, hetgeen een tegenspraak levert. We concluderen dat $f^{**} = g$.

7.17. STELLING. *Is* f *een eigenlijke convexe functie op* $\mathbb{R}^n$, *dan is* $f^{**} = \overline{f}$.

BEWIJS. Combineer par. 7.16 met par. 7.15, voorbeeld (b).

OPMERKING. Vgl. stelling 2.16.

DE VERZAMELING $\Gamma(E)$

7.18. In de literatuur wordt veel gebruikt de met het bovenstaande samenhangende verzameling $\Gamma(E)$:

DEFINITIE. $\Gamma(E)$ is de verzameling van alle functies $E \to \overline{\mathbb{R}}$ die te schrijven zijn als het supremum van een collectie functies op E van de vorm $x \mapsto \langle x|x'\rangle + \alpha$ waarbij $x' \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Op analoge wijze definiëren we $\Gamma(E')$ als de verzameling van alle functies $E' \to \overline{\mathbb{R}}$ die te schrijven zijn als het supremum van een collectie functies op E' van de vorm $x' \mapsto \langle x|x'\rangle + \alpha$ waarin $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Merk op dat $\Gamma(E)$ ook te definiëren is als de verzameling van alle functies $E \to \overline{\mathbb{R}}$ die te schrijven zijn als het supremum van een collectie continue affiene functies op E, maar dat iets analoogs voor $\Gamma(E')$ alleen geldt als we E' voorzien van een geschikte (bijvoorbeeld de zwakke) topologie; vgl. par. 7.3, opmerking (b).

7.19. STELLING. *Zij* f *een functie* $E \to \overline{\mathbb{R}}$. *De volgende voorwaarden zijn equivalent:*

(a) $f \in \Gamma(E)$.

(b) $f = f^{**}$.

(c) $f = -\infty$ *of* $f = +\infty$ *of* f *is een ondercontinue eigenlijke convexe functie.*

BEWIJS.

(a) $\Rightarrow$ (c): Zij $f \in \Gamma(E)$. Als supremum van een collectie A van continue affiene (dus convexe) functies is f ondercontinu en convex. Is $A = \emptyset$, dan is $f = -\infty$. Is $A \neq \emptyset$, dan is $(\forall x \in E) f(x) > -\infty$; is bovendien $f \neq +\infty$, dan is f een eigenlijke convexe functie.

(c) $\Rightarrow$ (b): volgens par. 7.4, eigenschappen (b) en (c) is $(-\infty)^{**} = -\infty$ en $(+\infty)^{**} = +\infty$, terwijl volgens par. 7.16 voor een ondercontinue eigenlijke convexe functie geldt $f^{**} = c\ell(f) = \overline{f} = f$.

(b) $\Rightarrow$ (a): volgens stelling 7.12(a).

7.20. STELLING. *De afbeelding* $f \mapsto f^*$ *is een bijectie van* $\Gamma(E)$ *op* $\Gamma(E')$.

BEWIJS. Zij $f \in \Gamma(E)$. Uit de definities van f^* en $\Gamma(E')$ volgt dat $f^* \in \Gamma(E')$; verder is $f^{**} = f$ (zie stelling 7.19), dus de afbeelding $f \mapsto f^*$ is een injectie $\Gamma(E) \to \Gamma(E')$ (ga na).

Zij $g \in \Gamma(E')$; er geldt $g^* \in \Gamma(E)$. Verder volgt als in het bewijs van stelling 7.12(a) dat g^{**} het supremum is van de verzameling van *alle* minoranten van g van de vorm $x' \mapsto \langle x|x'\rangle + \alpha$ waarin $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dus $g \leq g^{**} \leq g$ ofwel $g = g^{**} = (g^*)^*$. We concluderen dat de afbeelding $f \mapsto f^*$ een surjectie $\Gamma(E) \to \Gamma(E')$ is, waarmee het gestelde bewezen is.

We definiëren $\Gamma_0(E)$ resp. $\Gamma_0(E')$ als de verzameling van alle f in $\Gamma(E)$ resp. $\Gamma(E')$ met $f \neq -\infty$ en $f \neq +\infty$ ($\Gamma_0(E)$ is dus de verzameling van alle ondercontinue eigenlijke convexe functies op E). Uit het bovenstaande volgt dat de afbeelding $f \mapsto f^*$ een bijectie $\Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ is.

STUTFUNCTIES

7.21. STELLING. *Zij* $C \subset E$ *convex. Dan geldt:*

(a) $C = \emptyset \Leftrightarrow \delta_C = +\infty$.

(b) $C \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta_C$ *is eigenlijk convex.*

(c) C *is gesloten en niet-leeg* $\Leftrightarrow \delta_C \in \Gamma_0(E)$.

(d) $\overline{\delta}_C = \delta_{\overline{C}}$.

(e) $\delta_C^{**} = \delta_{\overline{C}}$.

<u>BEWIJS</u>.

(a), (b) en (c) zijn een direct gevolg van par. 6.15.

(d): de formule is juist als $C = \emptyset$. Is $C \neq \emptyset$, dan is

$$\mathrm{epi}(\overline{\delta}_C) = \overline{\mathrm{epi}(\delta_C)} = \overline{C \times [0,+\infty>} = \overline{C} \times [0,+\infty> = \mathrm{epi}(\delta_{\overline{C}}),$$

dus $\overline{\delta}_C = \delta_{\overline{C}}$.

(e): de formule is juist als $C = \emptyset$. Is $C \neq \emptyset$, dan is volgens par. 7.16 en (d):

$$\delta_C^{**} = c\ell(\delta_C) = \overline{\delta}_C = \delta_{\overline{C}}$$

(waarbij gebruikt is dat $\delta_{\overline{C}}$ eigenlijk convex is).

<u>7.22. STELLING</u>. *Is* $C \subset E$ *niet-leeg, convex en gesloten, dan is* $\delta_C^* \in \Gamma_0(E')$.

<u>BEWIJS</u>. Gebruik stelling 7.21(c) en par. 7.20.

<u>7.23</u>. Onmiddellijk uit definitie 7.6 volgt dat een stutfunctie positief homogeen is. Omgekeerd geldt:

<u>STELLING</u>. *Is* $g \in \Gamma_0(E')$ *positief homogeen, dan is er precies één niet-lege, convexe en gesloten* $C \subset E$ *met* $\delta_C^* = g$.

<u>BEWIJS</u>.

"Minstens één": we gaan bewijzen dat g^* een indicatorfunctie is. Voor alle $\lambda > 0$ en alle $x' \in E'$ geldt

$$(\lambda g^*)^*(x') = \lambda g^{**}(x'/\lambda) = \lambda g(x'/\lambda) = g(x')$$

dus

$$(\lambda g^*)^* = g$$

waaruit volgt

$$\lambda g^* = (\lambda g^*)^{**} = g^*.$$

We concluderen dat g^* alleen de waarden 0 en $+\infty$ kan aannemen; er volgt dat $g^* = \delta_C$ waarin

$$C = \{x \in E \mid g^*(x) = 0\} \tag{5}$$

dus $g = g^{**} = \delta_C^*$. Ga zelf na dat C niet-leeg, convex en gesloten is.
"Hoogstens één": laten $C_1, C_2 \subset E$ niet-leeg, convex en gesloten zijn, terwijl

$$\delta_{C_1}^* = \delta_{C_2}^*.$$

Dan is

$$\delta_{C_1} = \delta_{C_1}^{**} = \delta_{C_2}^{**} = \delta_{C_2}$$

dus $C_1 = C_2$.

OPMERKINGEN.

(a) De in (5) gedefinieerde verzameling C is te schrijven als

$$C = \{x \in E \mid (\forall x' \in E')\ \langle x|x'\rangle \le g(x')\}$$

(ga na).

(b) Uit bovenstaande stelling volgt dat er in $\mathbb{R}^n$ een eeneenduidig verband bestaat tussen de niet-lege gesloten convexe verzamelingen en de positief homogene ondercontinue eigenlijke convexe functies.

(c) Is $C \subset E$, dan hebben C en $\overline{C}$ dezelfde stutfunctie; dit is ook de stutfunctie van elke A met $C \subset A \subset \overline{C}$. Het is dan ook niet mogelijk alleen met behulp van de stutfunctie van C de verzameling C zelf terug te vinden; bovenstaande stelling leert dat dit wel kan als we nog weten dat C convex en gesloten is.

OPGAVEN

Neem E als in par. 7.1.

1. Zij $\phi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ een *even* functie. Definieer $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ en $g : E' \to \overline{\mathbb{R}}$ door $f(x) = \phi(\|x\|)$, $g(x') = \phi^*(\|x'\|)$ $(x \in E,\ x' \in E')$. Bewijs dat $f^* = g$.

2. Bewijs dat de enige $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ die voldoet aan $f^* = f$ de functie

$x \mapsto \frac{1}{2}(x|x)$ is (vgl. par. 7.5, voorbeeld (b)).

3. Bewijs: heeft $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ een continue affiene minorant, dan is $f^{**} = \overline{co(f)}$.

4. Zij f een functie $E \to \overline{\mathbb{R}}$; zij $x_0 \in E$ met $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.
   Bewijs:
   (a) $f^{**}(x_0) = f(x_0)$
   (b) $\partial f^{**}(x_0) = \partial f(x_0)$.

5. Bewijs: voor elke $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ is f^{**} de grootste minorant van f in $\Gamma(E)$.

6. Zij $f \in \Gamma(E)$. Bewijs dat voor alle $x \in E$, $x' \in E'$ geldt:

$$x' \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^{*}(x')$$

   waarbij x geïdentificeerd wordt met de lineaire vorm $x' \mapsto \langle x|x'\rangle$ op E'. Ga na dat "$\Rightarrow$" geldt voor *alle* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ (vgl. opgave 4).

7. Bewijs dat voor alle convexe $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ geldt:
   f is eigenlijk $\Leftrightarrow$ f^{*} is eigenlijk.

8. Zij $A \subset E$. Bewijs dat

$$\delta_A^{**} = \delta_B$$

   waarin $B = \overline{co}(A)$.

9. Laten $C,D \subset E$ convex zijn. Bewijs:
   (a) $\delta_{C+D}^{*} = \delta_C^{*} + \delta_D^{*}$. Ziet U een verband met stelling 7.7?
   (b) $\overline{C} \subset \overline{D} \Leftrightarrow \delta_C^{*} \leq \delta_D^{*}$.

10. Bewijs dat de stutfuncties van de niet-lege begrensde convexe delen van $\mathbb{R}^n$ de positief homogene convexe functies $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zijn.

11. Zij $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ positief homogeen en convex, terwijl $f \not\equiv +\infty$. Bewijs dat $c\ell(f)$ een stutfunctie is.

VIII. OPTIMALISERINGSPROBLEMEN

8.1. In dit hoofdstuk willen we aan de hand van verschillende onderwerpen een indruk trachten te geven van de wijze waarop men het voorafgaande kan toepassen bij het onderzoek van optimaliseringsproblemen.

Zij E een (niet-triviale) genormeerde lineaire ruimte (over $\mathbb{R}$), en zij f een eigenlijke convexe functie op E. f heeft een (globaal) minimum in $x_0 \in E$ indien

$$(\forall x \in E) f(x) \geq f(x_0) = f(x_0) + \langle x-x_0 | 0 \rangle$$

dus er geldt:

(1) f heeft een (globaal) minimum in $x_0 \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x_0)$.

Een meetkundige interpretatie van het rechterlid van (1) is: epi(f) heeft in $(x_0, f(x_0))$ een *horizontaal (gesloten) stuthypervlak* (vgl. stelling 6.34). Deze karakterisering heeft een analogon in de theorie der differentieerbare functies, waar optimaliseren vaak plaatsvindt door het zoeken van een horizontaal raakvlak aan een grafiek; in het geval dat de functies ook nog convex zijn is zo'n raakvlak namelijk tevens een horizontaal stuthypervlak aan de bijbehorende epigrafiek.

8.2. Zij $C \subset E$ convex en niet-leeg, met $\mathrm{dom}(f) \cap C \neq \emptyset$; de restrictie van f tot C geven we aan met f_C. Minimaliseren van f over C komt neer op het minimaliseren van de (eigenlijke) convexe functie $g := f + \delta_C$ over E; er volgt met (1) dat f_C een minimum heeft in $x_0 \in C$ precies dan als $0 \in \partial g(x_0)$. Uit par. 6.38 volgt dat we de laatste voorwaarde kunnen schrijven als

(2) $$0 \in \partial f(x_0) + \partial \delta_C(x_0)$$

in elk van de volgende gevallen:

(a) Er is een punt in $C \cap \mathrm{dom}(f)$ waarin f continu is.

(b) $\mathrm{int}(C) \cap \mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$.

8.3. Ten aanzien van de in (2) voorkomende verzameling $\partial\delta_C(x_0)$ merken we op dat geldt:

(3) $$\begin{cases} x' \in \partial\delta_C(x_0) \Leftrightarrow (\forall x \in E)\, \delta_C(x) \geq \delta_C(x_0) + \langle x-x_0 | x' \rangle \Leftrightarrow \\ \qquad \Leftrightarrow (\forall x \in C)\ \langle x-x_0 | x' \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Blijkbaar is $\partial\delta_C(x_0)$ een convexe puntkegel (merk op dat $0 \in \partial\delta_C(x_0)$). De lezer bewijze zelf:

STELLING. *Is* $x_0 \in \mathrm{int}(C)$, *dan is* $\partial\delta_C(x_0) = \{0\}$.

Geef zelf een meetkundige interpretatie van de laatste ongelijkheid in (3) voor het geval dat $E = \mathbb{R}^n$; vgl. fig. 13. Een $x' \in \partial\delta_C(x_0)$ wordt een *normaal* op C in x_0 genoemd; $\partial\delta_C(x_0)$ heet ook de *normalenkegel* van C in x_0.

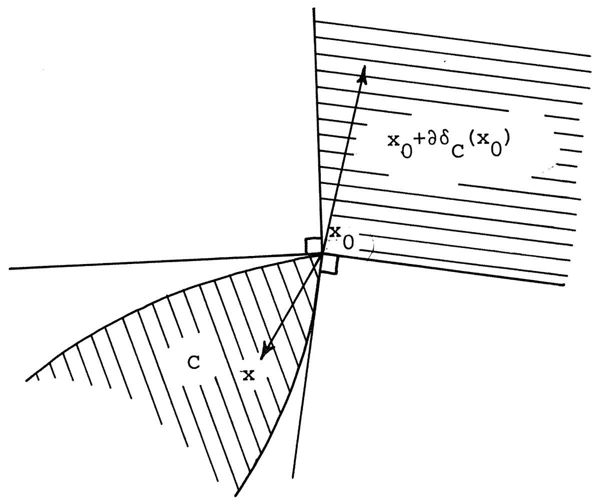

Fig. 13

CONVEXE PROGRAMMERING IN $\mathbb{R}^n$.

8.4. Een voor de toepassingen belangrijk geval is dat waarin

(4) $\quad C = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \leq 0\}$

waarbij g een convexe functie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is. Uit het voorafgaande volgt (ga dit na) dat g continu en subdifferentieerbaar is. Verder geldt (vgl. opgave 8 van hoofdstuk VI) dat

$$\text{int}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) < 0\} \neq \emptyset$$

indien g voldoet aan de zogenaamde

VOORWAARDE VAN SLATER: Er is een $x \in \mathbb{R}^n$ met $g(x) < 0$.

In par. 8.3 is vermeld dat $\partial\delta_C(x_0) = \{0\}$ indien $g(x_0) < 0$. In het volgende bepalen we $\partial\delta_C(x_0)$ voor het geval dat $g(x_0) = 0$.

8.5. STELLING. *Zij* C *als in* (4). *Is aan de voorwaarde van Slater voldaan en is* $g(x_0) = 0$, *dan is*

$$\partial\delta_C(x_0) = K^\circ$$

waarin

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g'(x_0;x) < 0\}.$$

BEWIJS. Wegens $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$ geldt volgens stelling 3.27:

$$C = \overline{\mathrm{int}(C)}$$

dus

$$x' \in \partial\delta_C(x_0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{int}(C))(x-x_0|x') \leq 0$$

(vgl. (3)). Is $x \in \mathrm{int}(C)$ en is $\lambda > 0$, dan is

$$g'(x_0;\lambda(x-x_0)) = \lambda \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{g(x_0+\varepsilon(x-x_0))-g(x_0)}{\varepsilon} =$$

$$= \lambda \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}g((1-\varepsilon)x_0+\varepsilon x) \leq \lambda g(x) < 0.$$

Is omgekeerd $g'(x_0;x) < 0$, dan is er $\varepsilon > 0$ zó dat $g(x_0+\varepsilon x) < 0$, dus $y := x_0 + \varepsilon x \in \mathrm{int}(C)$ terwijl $x = \frac{1}{\varepsilon}(y-x_o)$. We concluderen dat

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g'(x_0;x) < 0\} = \Omega(\mathrm{int}(C)-x_0)$$

waarin $\Omega = \langle 0,\infty\rangle$. Er volgt dat

$$x' \in \partial\delta_C(x_0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{int}(C))(x-x_0|x') \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in K)(x|x') \leq 0 \Leftrightarrow x' \in K^\circ$$

dus $\partial\delta_C(x_0) = K^\circ$.

8.6. STELLING. *Zij* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *convex, en zij* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Dan is de functie*

$$g'_{x_0} : x \mapsto g'(x_0;x)$$

de stutfunctie van $\partial g(x_0)$.

BEWIJS. Volgens par. 6.19 is g'_{x_0} positief homogeen en convex. Aangezien g een convexe functie is met waarden in $\mathbb{R}$, is g'_{x_0} eveneens een functie met waarden in $\mathbb{R}$ (vgl. stelling 2.6); er volgt dat g'_{x_0} continu is. Uit par. 7.23 volgt nu dat g'_{x_0} een stutfunctie is, en wel is $g'_{x_0} = \delta^*_D$ waarin

(5) $$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall x' \in \mathbb{R}^n)(x|x') \le g'_{x_0}(x')\}.$$

Verder geldt volgens stelling 6.36:

(6) $$x \in \partial g(x_0) \Leftrightarrow (\forall x' \in \mathbb{R}^n) g'_{x_0}(x') \ge (x'|x).$$

Uit (5) en (6) volgt dat $D = \partial g(x_0)$, waaruit het gestelde volgt.

8.7. STELLING. *Laat* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *convex zijn en voldoen aan de voorwaarde van Slater; zij*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \le 0\}.$$

Zij $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *zó dat* $g(x_0) = 0$. *Dan is* $\partial\delta_C(x_0)$ *de door* $\partial g(x_0)$ *voortgebrachte convexe puntkegel:*

$$\partial\delta_C(x_0) = \mathbb{R}_+ \partial g(x_0).$$

BEWIJS. Definiëer g'_{x_0} als in stelling 8.6 en K als in stelling 8.5; met stelling 8.5 volgt dat

(7) $$\partial\delta_C(x_0) = K^\circ = \overline{K^\circ} = \{x \in \mathbb{R}^n | g'_{x_0}(x) \le 0\}^\circ$$

(gebruik de continuïteit van g'_{x_0}). Volgens stelling 8.6 is

$$g'_{x_0} = \delta^*_D$$

waarin $D = \partial g(x_0)$; er volgt dat

$$\{x \in \mathbb{R}^n | g'_{x_0}(x) \le 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | (\forall y \in D)(x|y) \le 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n | (\forall y \in K_D)(x|y) \le 0\} = K_D^\circ$$

waarin K_D de door D voortgebrachte convexe puntkegel $\mathbb{R}_+ D$ is. Met (7) en par. 4.13 volgt dat

$$\partial \delta_C(x_0) = K_D^{\circ\circ} = \overline{K}_D. \tag{8}$$

$\partial g(x_0)$ is gesloten (ga na); aangezien g'_{x_0} alleen reële waarden aanneemt is $\partial g(x_0)$ begrensd (vgl. opgave 10 van hoofdstuk VII). Er volgt dat $\partial g(x_0)$ compact is. Verder volgt uit de voorwaarde van Slater dat $0 \notin \partial g(x_0)$ (ga na); toepassing van stelling 5.17 leert nu dat K_D gesloten is, zodat uit (8) het gestelde volgt.

8.8. Een *convex programmeringsprobleem* in $\mathbb{R}_n$ is van de volgende vorm. Gegeven zijn de *convexe* reële functies $f, g_1, g_2, \ldots, g_p$ op $\mathbb{R}^n$. Gevraagd wordt het minimum van f op de door de p ongelijkheden

$$g_i(x) \le 0 \quad (1 \le i \le p) \tag{9}$$

bepaalde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Kortweg:

$$(\mathrm{CP}) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \le 0 \quad (1 \le i \le p) \end{cases}$$

x_0 heet een *oplossing* van (CP) indien

$$f(x_0) = \min\{f(x) | g_i(x) \le 0 \quad (1 \le i \le p)\}.$$

Een bijzonder geval van (CP) is dat waarin f *lineair* is, terwijl de g_i *affien* zijn; we spreken dan van een *lineair programmeringsprobleem*. In dat geval is (9) te schrijven in de vorm

$$Ax \le b$$

waarin A een $p \times n$ -matrix is, terwijl $b \in \mathbb{R}^p$.

STELLING. *Laat voldaan zijn aan de volgende voorwaarde van Slater:er is een* $x \in \mathbb{R}^n$ *met*

$$g_i(x) < 0 \quad (1 \le i \le p).$$

Zij $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Dan is* x_0 *een oplossing van* (CP) *precies dan als er* $x' \in \partial f(x_0)$ *en* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ *zijn met*

$$(10) \qquad \begin{cases} -x' \in \lambda_1 \partial g_1(x_0) + \lambda_2 \partial g_2(x_0) + \ldots + \lambda_p \partial g_p(x_0) \\ g_i(x_0) \le 0,\ \lambda_i \ge 0,\ \lambda_i g_i(x_0) = 0 \quad (1 \le i \le p) \end{cases}$$

BEWIJS. Zij $C_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0\}$ $(1 \le i \le p)$, $C := \cap_{i=1}^{p} C_i$. Volgens de par. 8.1 en 8.2 is x_0 een oplossing van (CP) precies dan als er $x' \in \partial f(x_0)$ is met $-x' \in \partial\delta_C(x_0)$. Er geldt

$$\delta_C = \sum_{i=1}^{p} \delta_{C_i}.$$

Uit het gegeven volgt dat

$$\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{int}(C_i) \neq \emptyset.$$

Toepassing van par. 6.38 leert dat de voorwaarde $-x' \in \partial\delta_C(x_0)$ is te schrijvan als

$$(11) \qquad -x' \in \partial\delta_{C_1}(x_0) + \partial\delta_{C_2}(x_0) + \ldots + \partial\delta_{C_p}(x_0).$$

Uit het eerder bewezene volgt: is $x_0 \in \operatorname{int}(C_i)$, d.w.z. is $g_i(x_0) < 0$, dan is $\partial\delta_{C_i}(x_o) = \{0\}$, en is $g_i(x_o) = 0$, dan is $\partial\delta_{C_i}(x_0) = \mathbb{R}_+ \partial g_i(x_0)$. Er volgt dat (11) equivalent is met: er zijn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \ge 0$ met

$$-x' \in \lambda_1 \partial g_1(x_0) + \lambda_2 \partial g_2(x_0) + \ldots + \lambda_p \partial g_p(x_0)$$

waarbij we $\lambda_i = 0$ nemen indien $g_i(x_0) < 0$.

8.9. Zijn de functies $f, g_1, g_2, \ldots, g_p$ bovendien Gâteaux-differentieerbaar, dan volgt met stelling 6.37 dat (10) is te schrijven als

$$\text{(KT)} \quad \begin{cases} \nabla f(x_0)+\lambda_1\nabla g_1(x_0)+\lambda_2\nabla g_2(x_0)+\ldots+\lambda_p\nabla g_p(x_0) = 0 \\ g_i(x_0) \le 0,\ \lambda_i \ge 0,\ \lambda_i g_i(x_0) = 0 (1 \le i \le p) \end{cases}$$

De voorwaarden (KT) heten de *voorwaarden van Kuhn-Tucker*; de λ_i heten daarbij de *multiplicatoren van Lagrange*.

Een analogie met de multiplicatorenmethode van Lagrange dringt zich op. Het betreft daar optimaliseringsproblemen met als nevenvoorwaarden *gelijkheden*, waarbij alle betreffende functies differentieerbaar zijn; voor een optimum gelden nodige voorwaarden van de vorm

$$\nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = 0$$

(vgl. (KT)) die echter niet voldoende zijn. Merk op dat de voorwaarden (KT) nodig *en* voldoende zijn.

OPMERKING. Een van de eerste publikaties waarin de aandacht wordt gevestigd op de rol die convexiteit speelt in minimumproblemen met ongelijkheden als nevenvoorwaarden is

H.W. KUHN/A.W. TUCKER, "*Nonlinear programming*", in Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley (1951) 481-492.

8.10. VOORBEELD. Minimaliseren van de functie x+y over het deel van het xy-vlak bepaald door

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ (x-1)^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$

(ga zelf na dat de betreffende functies convex zijn; vgl. stelling 6.29) kan plaatsvinden door het oplossen van λ_1, λ_2, x en y uit de voorwaarden van Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} 1+2\lambda_1 x+2\lambda_2(x-1) = 0 \\ 1+2\lambda_1 y+2\lambda_2 y = 0 \\ x^2+y^2 \le 1 \\ (x-1)^2+y^2 \le 1 \\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-1) = 0 \\ \lambda_2[(x-1)^2+y^2-1] = 0. \end{cases}$$

Na enig rekenwerk vinden we $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $x = 1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; het bedoelde minimum (ter grootte $1-\sqrt{2}$) wordt dus aangenomen in $(1-\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

ZADELPUNTSFORMULERINGEN

8.11. De eerste vergelijking in (KT) (zie par. 8.9) is te schrijven als

$$\nabla F(x_0,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p) = 0$$

waarbij de functie $F : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt door

$$F(x,y) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \eta_i g_i(x)$$

($x \in \mathbb{R}^n$, $y = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_p) \in \mathbb{R}^p$) terwijl ∇ op x werkt.
In het onderstaande laten we zien hoe de functie F gebruikt kan worden om een oplossing x_0 van (CP) te karakteriseren m.b.v. zadelpuntsbeschouwingen.

DEFINITIE. Zij $P^p = \{y \in \mathbb{R}^p | y \ge 0\}$. $(x_0,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times P^p$ heet een *zadelpunt* van F op $\mathbb{R}^n \times P^p$ indien voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times P^p$ geldt

$$F(x_0,y) \le F(x_0,\lambda) \le F(x,\lambda).$$

8.12. STELLING. *Laat voldaan zijn aan de voorwaarde van Slater: er is een* $x \in \mathbb{R}^n$ *met*

$$g_i(x) < 0 \quad (1 \le i \le p).$$

Zij $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Dan geldt:*
x_0 *is een oplossing van* (CP) $\Leftrightarrow$ *er is* $\lambda \in P^p$ *zó dat* (x_0,λ) *zadelpunt van* F *op* $\mathbb{R}^n \times P^p$ *is.*

BEWIJS.
"$\Leftarrow$": $F(x_0,y) \le F(x_0,\lambda)$ is te schrijven als

$$(12)\qquad \sum(\eta_i-\lambda_i)g_i(x_o) \le 0.$$

Aangezien (12) geldt voor alle $y \in P^p$ volgt dat

$$(13)\qquad g_i(x_0) \le 0 \quad (1 \le i \le p)$$

(ga na). Verder geldt

$$F(x_0,0) \le F(x_0,\lambda)$$

ofwel

$$\sum\lambda_i g_i(x_0) \ge 0.$$

Met (13) volgt dat

$$\sum\lambda_i g_i(x_o) = 0.$$

Substitutie hiervan in $F(x_0,\lambda) \le F(x,\lambda)$ levert

$$(14)\qquad f(x_0) \le f(x) + \sum\lambda_i g_i(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Uit (14) volgt dat voor elke $x \in \mathbb{R}^n$ met $g_i(x) \le 0$ $(1 \le i \le p)$ geldt $f(x) \ge$
$\ge f(x_0)$. We concluderen dat x_0 oplossing is van (CP).
"$\Rightarrow$": zij A de verzameling van alle $(\alpha,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ waarvoor een $x \in \mathbb{R}^n$ bestaat zó dat

$$f(x)-f(x_0) < \alpha \text{ en } g_i(x) \le \eta_i \quad (1 \le i \le p)$$

(waarbij $y = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_p)$). Uit het gegeven volgt (ga na) dat A convex is, en dat $(0,0) \notin A$. Volgens par. 5.11 is er een hypervlak in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ dat A en

(0,0) scheidt; er volgt dat er $(\beta,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ is met $(\beta,u) \neq (0,0)$ en zó dat voor alle $(\alpha,y) \in A$ geldt

$$(15) \qquad \beta\alpha+(y|u) \geq 0.$$

Nemen we in (15) achtereenvolgens $\alpha \to +\infty$ en $\eta_i \to +\infty$ $(i=1,2,\ldots,p)$, dan zien we dat $\beta \geq 0$ en $u \in P^p$. Nemen we vervolgens in (15): $\eta_i = g_i(x)$ $(1\leq i\leq p)$ en $\alpha \downarrow f(x) - f(x_0)$, dan vinden we

$$(16) \qquad \beta[f(x) - f(x_0)] + \sum u_i g_i(x) \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Veronderstel dat $\beta = 0$. Dan is $u \neq 0$, en met de voorwaarde van Slater leidt (16) dan tot een tegenspraak. We concluderen dat $\beta > 0$; deling door β doet (16) overgaan in

$$(17) \qquad f(x_0) \leq f(x) + \sum\lambda_i g_i(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

voor zekere $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p) \in P^p$. Substitutie $x = x_0$ in (17) levert $\sum\lambda_i g_i(x_0) \geq 0$. Er volgt dat $\sum\lambda_i g_i(x_0) = 0$, dus

$$(18) \qquad F(x_0,\lambda) \leq F(x,\lambda).$$

Voor alle $y = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_p) \in P^p$ geldt $\sum\eta_i g_i(x_0) \leq 0$, dus

$$F(x_0,y) = f(x_0) + \sum\eta_i g_i(x_0) \leq f(x_0) =$$

$$= f(x_0) + \sum\lambda_i g_i(x_0) = F(x_0,\lambda).$$

Met (18) volgt dat (x_0,λ) zadelpunt van F op $\mathbb{R}^n \times P^p$ is.

OPMERKING. Ga na dat in het bewijs van "$\Leftarrow$" convexiteit geen rol speelt.

8.13. In par. 8.12 gebruikten we de voorwaarde van Slater om te bewijzen dat in (16) de coëfficient β van $f(x)-f(x_0)$ niet nul is. Ook andere voorwaarden zijn hiervoor bruikbaar; zie bijvoorbeeld:

O.L. MANGASARIAN, *Nonlinear programming*, McGraw-Hill, New York 1969

M.S. BAZARAA / C.M. SHETTY, *Foundations of optimization*, Springer, Berlin 1976 (Lecture notes in economics and mathematical systems no. 122).

8.14. Kenmerkend voor de convexe programmering is de overgang van een minimum-(maximum-)probleem op een daarmee equivalent maximum(minimum)probleem, het zogenaamde *duale probleem*. Als voorbeeld van zo'n overgang noemen we in het onderstaande de dualiteitsstelling van Fenchel.

Zij E weer een (niet-triviale) genormeerde lineaire ruimte. We noemen $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *concaaf* indien $-g$ convex is; we definiëren dan

$$\mathrm{dom}(g) = \{x \in E \mid g(x) > -\infty\}.$$

g heet *eigenlijk concaaf* indien $-g$ eigenlijk convex is. De geconjugeerde g^* van een concave g definiëren we door

$$g^*(x') = \inf_{x \in E}\{\langle x|x'\rangle - g(x)\} \quad (x' \in E').$$

g^* is concaaf, en voor alle $x' \in E'$ is $g^*(x') = -(-g)^*(-x')$.

8.15. STELLING (DUALITEITSSTELLING VAN FENCHEL). *Zij* f *een eigenlijke convexe functie op* E *en* g *een eigenlijke concave functie op* E.

(a) *Is er een punt in* $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ *waarin* f *of* g *continu is, dan geldt*

$$\text{(F)} \qquad \inf_{x \in E}\{f(x) - g(x)\} = \max_{x' \in E'}\{g^*(x') - f^*(x')\}.$$

(b) *Is* $E = \mathbb{R}^n$ *en is* $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f)) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(g)) \neq \emptyset$, *dan geldt* (F) *eveneens.*

BEWIJS. Voor alle $x \in E$, $x' \in E'$ geldt

$$f(x) + f^*(x') \geq \langle x|x'\rangle \geq g(x) + g^*(x')$$

dus

$$f(x) - g(x) \geq g^*(x') - f^*(x')$$

en er volgt dat

$$\text{(19)} \qquad m := \inf_{x \in E}\{f(x) - g(x)\} \geq \sup_{x' \in E'}\{g^*(x') - f^*(x')\}.$$

Is $m = -\infty$, dan geldt (F); zij nu $m > -\infty$. Uit de gegevens volgt dat dan $m \in \mathbb{R}$. Zij

$$C_1 = \{(x,\lambda) \in E \oplus R \,|\, f(x) \leq \lambda\}$$

$$C_2 = \{(x,\lambda) \in E \oplus R \,|\, \lambda \leq g(x)+m\}.$$

C_1 en C_2 zijn convex; als in de par. 6.38 en 6.39 volgt dat er een niet-verticaal gesloten hypervlak $H = F^{-1}(\beta)$ in $E \oplus \mathbb{R}$ is dat C_1 en C_2 echt scheidt. Is $F(C_1) \geq \beta \geq F(C_2)$ en $F = (x',\alpha)$ (met $x' \in E', \alpha \in \mathbb{R}$) dan geldt bovendien $\alpha > 0$. Uit $F(C_1) \geq \beta \geq F(C_2)$ volgt dat voor alle $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ geldt

$$\langle x|x'\rangle + \alpha f(x) \geq \beta \geq \langle x|x'\rangle + \alpha\{g(x) + m\}$$

ofwel

$$f(x) \geq \langle x|y'\rangle - \gamma \geq g(x) + m$$

waarin $y' = -x'/\alpha \in E'$ en $\gamma = -\beta/\alpha$; deze ongelijkheden blijken bovendien voor alle $x \in E$ te gelden. Er volgt dat

$$f^*(y') \leq \gamma \text{ en } g^*(y') \geq \gamma + m$$

dus (met (19))

$$m \leq g^*(y') - f^*(y') \leq \sup_{x'\in E'} \{g^*(x') - f^*(x')\} \leq m$$

waaruit (F) volgt.

<u>8.16. VOORBEELD</u>. Zij $C \subset E$ convex en niet-leeg, en zij

$$f(x) := \|x-x_0\|, \; g(x) := -\delta_C(x) \qquad (x \in E)$$

waarin $x_0 \in E$. Toepassing van stelling 8.15 (ga na dat deze geoorloofd is) levert

$$\inf_{x\in C}\|x-x_0\| = \inf_{x\in E}\{f(x) - g(x)\} = \max_{x'\in E'} \{g^*(x') - f^*(x')\}.$$

Volgens voorbeeld 7.8 en par. 7.4, eigenschap (g) is

$$f^*(x') = \delta_S(x') + \langle x_0|x'\rangle \qquad (x'\in E')$$

waarin $S = \{x'\in E' \mid \|x'\| \le 1\}$.
Verder is $g^*(x') = -\delta_C^*(-x')$, dus

$$\begin{aligned}\inf_{x\in C}\|x-x_0\| &= \max_{x'\in E'} \{-\delta_C^*(-x') - \delta_S(x') - \langle x_0|x'\rangle\} = \\ &= \max_{x'\in S} \{\langle x_0|-x'\rangle - \delta_C^*(-x')\} = \\ &= \max_{\|x'\|\le 1} \{\langle x_0|x'\rangle - \delta_C^*(x')\}.\end{aligned}$$

Geef zelf een meetkundige interpretatie van deze formule voor het geval $E = \mathbb{R}^n$.

PROX-AFBEELDINGEN

8.17. Zij f een ondercontinue eigenlijke convexe functie op $\mathbb{R}^n$. Zij $x_0 \in \mathbb{R}^n$; we definiëren de functie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) = f(x) + \tfrac{1}{2}\|x-x_0\|^2$$

waarin $x \mapsto \|x\|$ de euclidische norm is. Ga na dat F ondercontinu en convex is. We gaan aantonen dat F een globaal minimum heeft. Volgens par. 7.13 heeft f een affiene minorant: er zijn $a \in \mathbb{R}^n$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ zó dat

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) f(x) \ge (x|a) - \alpha.$$

Er volgt dat voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$F(x) \ge (x|a)-\alpha+\tfrac{1}{2}\|x-x_0\|^2 = \tfrac{1}{2}\|x-(x_0-a)\|^2+(x_0|a)-\tfrac{1}{2}\|a\|^2-\alpha.$$

Zij $b \in \mathrm{dom}(f)$; volgens de zojuist bewezen ongelijkheid is er $R > 0$ zó dat $F(x) > F(b)$ voor alle x met $\|x-(x_0-a)\| > R$. Op de (compacte) bol $\{x \mid \|x-(x_0-a)\| \le R\}$ heeft F een minimum (vgl.par. 6.4, eigenschap (b)) m; laat dit worden aangenomen in c. Er geldt $m \le F(b)$, en er volgt dat F een globaal minimum m in c heeft.

Veronderstel dat $F(c) = F(d) = m$. Wegens

$$\left\|\frac{c+d}{2} - x_0\right\|^2 = \tfrac{1}{2}\|c-x_0\|^2 + \tfrac{1}{2}\|d-x_0\|^2 - \tfrac{1}{4}\|c-d\|^2$$

geldt dan

$$m \le F\left(\frac{c+d}{2}\right) = f\left(\frac{c+d}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\left\|\frac{c+d}{2} - x_0\right\|^2 \le$$

$$\le \tfrac{1}{2}f(c) + \tfrac{1}{2}f(d) + \tfrac{1}{4}\|c-x_0\|^2 + \tfrac{1}{4}\|d-x_0\|^2 - \tfrac{1}{8}\|c-d\|^2 \le$$

$$\le m - \tfrac{1}{8}\|c-d\|^2$$

dus $c = d$. Er volgt dat het minimum van F in precies één punt wordt aangenomen; dit punt noteren we als

$$\mathrm{prox}_f(x_0).$$

OPMERKINGEN.

(a) De uniciteit van het minimumpunt c volgt ook uit het feit dat F strikt convex is; vgl. par. 6.18, voorbeeld (a) en opgave 9 van hoofdstuk 6.

(b) In het geval dat $f = \delta_C$, waarin $C \subset \mathbb{R}^n$ niet-leeg, convex en gesloten is (vgl. stelling 7.21(c)), is $\mathrm{prox}_f(x_0)$ de beste benadering van x_0 in C, d.w.z. het punt van C waarin $\|x-x_0\|$ minimaal is (ook genoemd: de *projectie* van x_0 op C).

8.18. STELLING. *Zij* f *een ondercontinue eigenlijke convexe functie op* $\mathbb{R}^n$, *en zij* $x,y,z \in \mathbb{R}^n$. *De volgende voorwaarden zijn equivalent:*

(a) $z = x+y$ *en* $f(x)+f^*(y) = (x|y)$.

(b) $x = \mathrm{prox}_f(z)$ *en* $y = \mathrm{prox}_{f^*}(z)$.

BEWIJS. Definieer: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door $g(u) = \tfrac{1}{2}\|u-z\|^2$ en $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door $F = f+g$. Volgens par. 6.38 is $\partial F = \partial f + \partial g$. Met par. 8.1 volgt nu:

$$x = \mathrm{prox}_f(z) \Leftrightarrow 0 \in \partial F(x) \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x) + \partial g(x).$$

De functie g is F-differentieerbaar, terwijl $(\forall u \in \mathbb{R}^n)\ \nabla g(u) = u-z$ (ga na); met stelling 6.37 volgt dat

(20) $\qquad x = \mathrm{prox}_f(z) \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x) + x-z \Leftrightarrow (\exists y \in \partial f(x))\, z = x+y$

en analoog:

(21) $\qquad y = \mathrm{prox}_{f^*}(z) \Leftrightarrow (\exists x \in \partial f^*(y))\, z = x+y.$

Verder geldt volgens de stellingen 7.11 en 7.19:

(22) $\qquad y \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(y) = (x|y) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(y).$

(a) $\Rightarrow$ (b): volgens (22) geldt $y \in \partial f(x)$ en $x \in \partial f^*(y)$; volgens (20) is $x = \mathrm{prox}_f(z)$, volgens (21) is $y = \mathrm{prox}_{f^*}(z)$.
(b) $\Rightarrow$ (a): volgens (20) is er $y_0 \in \partial f(x)$ met $z = x+y_0$; volgens (22) geldt $f(x)+f^*(y_0) = (x|y_0)$, dus $x \in \partial f^*(y_0)$. Volgens (21) is nu $y_0 = \mathrm{prox}_{f^*}(z) = y$. Er volgt dat $z = x+y$ en $f(x) + f^*(y) = (x|y)$.

8.19. VOORBEELD. Zij $K \subset \mathbb{R}^n$ een niet-lege convexe gesloten kegel. We definiëren $f := \delta_K$; er volgt (ga na) dat $f^* = \delta_{K^\circ}$. De voorwaarde

$$\delta_K(x) + \delta_{K^\circ}(y) = (x|y)$$

is equivalent met

$$x \in K,\ y \in K^\circ,\ (x|y) = 0.$$

Uit stelling 8.18 volgt dat de formule

$$z = \mathrm{prox}_f(z) + \mathrm{prox}_{f^*}(z)$$

in dit geval de eenduidige ontbinding van $z \in \mathbb{R}^n$ geeft in twee onderling loodrechte elementen van K en K°, namelijk de projecties van z op K en K°.

8.20. OPMERKING. Bovenstaande beschouwingen betreffende prox-afbeeldingen zijn eenvoudig te generaliseren tot Hilbertruimten. Zie bijvoorbeeld:

J.-J. MOREAU, *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, Bull. Soc. math. France 93 (1965) 273-299.

8.21. Zij E een genormeerde lineaire ruimte. Een multifunctie (vgl. par. 5.21) T van E in E' heet een *monotone operator* indien

$$\langle x-y | x'-y' \rangle \geq 0$$

voor alle $x,y \in E$ en alle $x',y' \in E'$ met $x' \in Tx$, $y' \in Ty$. Merk op dat een monotoon stijgende $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotoon in de zojuist genoemde zin is.
T heet *cyclisch monotoon* indien voor elk p-tal $x_1,x_2,\ldots,x_p \in E$ en elk p-tal $x_1' \in Tx_1, x_2' \in Tx_2, \ldots, x_p' \in Tx_p$ (waarbij $p \in \mathbb{N}$) geldt

$$\langle x_1-x_2|x_1'\rangle + \langle x_2-x_3|x_2'\rangle + \ldots + \langle x_{p-1}-x_p|x_{p-1}'\rangle + \\ + \langle x_p-x_1|x_p'\rangle \geq 0. \tag{23}$$

Blijkbaar is elke cyclisch monotone operator monotoon (neem in (23): $p = 2$); het omgekeerde is niet het geval.
Monotone operatoren spelen een belangrijke rol in de variatierekening. Een van de eerste publikaties waarin monotone operatoren in het kader van de convexe analyse worden bestudeerd is:

G.J. MINTY, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*, Duke Math. J. 29 (1962) 341-346.

De volgende stellingen tonen iets van het verband dat er tussen monotone operatoren en convexe functies bestaat.

8.22. STELLING. *Zij f een eigenlijke convexe functie op E. Dan is ∂f cyclisch monotoon.*

BEWIJS. Zij $x_i' \in \partial f(x_i)$ $(1 \leq i \leq p)$. Dan is

$$\begin{aligned}
f(x_2) &\geq f(x_1) + \langle x_2-x_1|x_1'\rangle \\
f(x_3) &\geq f(x_2) + \langle x_3-x_2|x_2'\rangle \\
&\vdots \\
f(x_p) &\geq f(x_{p-1}) + \langle x_p-x_{p-1}|x_{p-1}'\rangle \\
f(x_1) &\geq f(x_p) + \langle x_1-x_p|x_p'\rangle
\end{aligned}$$

en optellen levert

$$0 \geq \langle x_2 - x_1 | x_1' \rangle + \ldots + \langle x_1 - x_p | x_p' \rangle$$

waaruit het gestelde volgt.

8.23. We noemen een (cyclisch) monotone operator T van E in E' *maximaal* (cyclisch) monotoon indien er geen (cyclisch) monotone operator T_1 van E in E' is waarvan de grafiek

$$\{(x,x') \in E \times E' | x' \in T_1 x\}$$

de grafiek van T als echte deelverzameling bevat.

STELLING. *Zij f een ondercontinue eigenlijke convexe functie op* $\mathbb{R}^n$. *Dan is* ∂f *maximaal monotoon en maximaal cyclisch monotoon.*

BEWIJS. Laat voor $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ gelden dat

$$(24) \qquad (x - x_0 | y - y_0) \geq 0$$

voor alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ met $y \in \partial f(x)$. Zij

$$x_1 = \mathrm{prox}_f(x_0 + y_0), \quad y_1 = \mathrm{prox}_{f*}(x_0 + y_0)$$

(vgl. par. 8.17); volgens stelling 8.18 geldt $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$ en $y_1 \in \partial f(x_1)$. Substitutie $x = x_1$, $y = y_1$ in (24) levert

$$-\|x_0 - x_1\|^2 = (x_1 - x_0 | x_0 - x_1) \geq 0$$

dus $x_0 = x_1$ en bijgevolg $y_0 = y_1 \in \partial f(x_1) = \partial f(x_0)$. We concluderen dat ∂f maximaal monotoon is. Met stelling 8.22 volgt nu dat ∂f ook maximaal cyclisch monotoon is.

OPMERKING. Een zeer leesbaar overzicht van de theorie der maximaal monotone operatoren is te vinden in:

H. BRÉZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* North-Holland publishing company, Amsterdam 1973.

LITERATUUR

De volgende boeken kunnen dienst doen bij voortgezette studie op het gebied van de convexe optimalisering, vooral in oneindigdimensionale ruimten:

I. EKELAND/R. TEMAM, *Convex analysis and variational problems*, North-Holland publishing company, Amsterdam 1976.

P.-J. LAURENT, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris 1972.

I.V. GIRSANOV, *Lectures on Mathematical theory of extremum problems*, Springer, Berlin 1972 (Lecture notes in economics and mathematical systems no. 67).

R. WETS, *Grundlagen Konvexer Optimierung*, Springer, Berlin 1976 (Lecture notes in economics and mathematical systems no. 137).

NOTATIES

$[a,b]$	: als deel van $\mathbb{R}$: de verzameling van alle $x \in \mathbb{R}$ met $a \leq x \leq b$; in een lineaire ruimte: het lijnstuk met eindpunten a en b (zie par. 3.1)
$\langle a,b \rangle$	: het inwendige van $[a,b]$. Analoog $\langle a,b]$ en $[a,b\rangle$
$(x\|y)$	: het inprodukt van x en y (zie par. 5.5)
$\langle x\|u \rangle$	: de waarde van $u \in E'$ in $x \in E$ (zie par. 4.13)
$\mathbb{R}_+$	: de verzameling van alle $x \in \mathbb{R}$ met $x \geq 0$
$\overline{\mathbb{R}}$	: $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ (zie par. 2.20)
int(A)	: het inwendige van A
$\overline{A}$	: de afsluiting van A
fr(A)	: de rand van A
ri(A)	: het relatieve inwendige van A (zie par. 5.8 en par. 6.12)
rfr(A)	: de relatieve rand van A (zie par. 5.12)
A^i	: het algebraïsch inwendige van A (zie par. 3.14)
A^a	: de algebraïsche afsluiting van A (zie par. 3.14)
co(A)	: het convexe omhulsel van A (zie par. 3.2)
$\overline{\text{co}}(A)$	: het gesloten convexe omhulsel van A (zie par. 3.25)
aff(A)	: het affiene omhulsel van A (zie par. 3.6)

$\dim(A)$: de dimensie van A (zie par. 3.6)

E' : de duale van E (zie par. 4.13)

K° : de polaire van K (zie par. 4.13)

$K^{\circ\circ}$: de bipolaire van K (zie par. 4.13)

P^n : het niet-negatieve orthant in $\mathbb{R}^n$ (zie par. 5.14)

T^t : de getransponeerde van de lineaire afbeelding T

$V \oplus \mathbb{R}$: de lineaire ruimte gevormd door $V \times \mathbb{R}$ (zie par. 6.1)

$f(A) < \alpha$: voor alle $x \in A$ geldt $f(x) < \alpha$

$\mathrm{dom}(f)$: het effectieve domein van f (zie par. 2.23, par. 6.11, en par. 8.14)

$\mathrm{epi}(f)$: de epigrafiek van f (zie par. 6.1)

$\overline{f}$: het ondercontinue omhulsel van f (zie par. 6.5)

f'_+, f'_- : de rechter- resp. linkerafgeleide van f

$\mathrm{co}(f)$: het convexe omhulsel van f (zie par. 6.16)

$f \,\square\, g$: de inf-convolutie van f en g (zie par. 6.17)

$f'(x_0;x)$: de richtingsafgeleide van f in x_0 in de richting x (zie par. 6.19)

∇f : de afgeleide of de gradiënt van f (zie par. 6.28)

∂f : de subdifferentiaal van f (zie par. 6.30)

$\mathrm{dom}(\partial f)$: het domein van ∂f (zie par. 6.30)

f^* : de geconjugeerde van f (zie par. 7.2)

f^{**} : de bipolaire van f (zie par. 7.2)

$c\ell(f)$: de afsluiting van f (zie par. 7.14)

δ_A : de indicatorfunctie van A (zie par. 6.15)

δ_A^* : de stutfunctie van A (zie par. 7.6)

$\Gamma(E)$: zie de definitie in par 7.18

$\Gamma_0(E)$: zie de definitie in par. 7.20

prox_f : zie de definitie in par. 8.17.

REGISTER

UITGAVEN IN DE SERIE MC SYLLABUS

Onderstaande uitgaven zijn verkrijgbaar bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam-1005, tel. 020-947272.

MCS 1.1	F. GÖBEL & J. VAN DE LUNE, *Leergang Besliskunde, deel 1: Wiskundige basiskennis*, 1965. ISBN 90 6196 014 2.
MCS 1.2	J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 2: Kansberekening*, 1965. ISBN 90 6196 015 0.
MCS 1.3	J. HEMELRIJK & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 3: Statistiek*, 1966. ISBN 90 6196 016 9.
MCS 1.4	G. DE LEVE & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*, 1966. ISBN 90 6196 017 7.
MCS 1.5	J. KRIENS & G. DE LEVE, *Leergang Besliskunde, deel 5: Inleiding tot de mathematische besliskunde*, 1966. ISBN 90 6196 018 5.
MCS 1.6a	B. DORHOUT & J. KRIENS, *Leergang Besliskunde, deel 6a: Wiskundige programmering 1*, 1968. ISBN 90 6196 032 0.
MCS 1.6b	B. DORHOUT, J. KRIENS & J.TH. VAN LIESHOUT, *Leergang Besliskunde, deel 6b: Wiskundige programmering 2*, 1977. ISBN 90 6196 150 5.
MCS 1.7a	G. DE LEVE, *Leergang Besliskunde, deel 7a: Dynamische programmering 1*, 1968. ISBN 90 6196 033 9.
MCS 1.7b	G. DE LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7b: Dynamische programmering 2*, 1970. ISBN 90 6196 055 X.
MCS 1.7c	G. DE LEVE & H.C. TIJMS, *Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3*, 1971. ISBN 90 6196 066 5.
MCS 1.8	J. KRIENS, F. GÖBEL & W. MOLENAAR, *Leergang Besliskunde, deel 8: Minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*, 1968. ISBN 90 6196 034 7.
MCS 2.1	G.J.R. FÖRCH, P.J. VAN DER HOUWEN & R.P. VAN DE RIET, *Colloquium Stabiliteit van differentieschema's, deel 1*, 1967. ISBN 90 6196 023 1.
MCS 2.2	L. DEKKER, T.J. DEKKER, P.J. VAN DER HOUWEN & M.N. SPIJKER, *Colloquium Stabiliteit van differentieschema's, deel 2*, 1968. ISBN 90 6196 035 5.
MCS 3.1	H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 1*, 1967. ISBN 90 6196 024 X.
MCS 3.2	H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 2*, 1968. ISBN 90 6196 036 3.
MCS 3.3	H.A. LAUWERIER, *Randwaardeproblemen, deel 3*, 1968. ISBN 90 6196 043 6.
MCS 4	H.A. LAUWERIER, *Representaties van groepen*, 1968. ISBN 90 6196 037 1.

MCS 5 J.H. VAN LINT, J.J. SEIDEL & P.C. BAAYEN, *Colloquium Discrete wiskunde*, 1968.
ISBN 90 6196 044 4.

MCS 6 K.K. KOKSMA, *Cursus ALGOL 60*, 1969. ISBN 90 6196 045 2.

MCS 7.1 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 1*, 1969. ISBN 90 6196 046 0.

MCS 7.2 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 2*, 1969. ISBN 90 6196 047 9.

MCS 8 H. BAVINCK & J. GRASMAN, *Relaxatietrillingen*, 1969.
ISBN 90 6196 056 8.

MCS 9.1 T.M.T. COOLEN, G.J.R. FÖRCH, E.M. DE JAGER & H.G.J. PIJLS, *Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1970.
ISBN 90 6196 048 7.

MCS 9.2 W.P. VAN DEN BRINK, T.M.T. COOLEN, B. DIJKHUIS, P.P.N. DE GROEN, P.J. VAN DER HOUWEN, E.M. DE JAGER, N.M. TEMME & R.J. DE VOGELAERE, *Colloquium Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1970.
ISBN 90 6196 049 5.

MCS 10 J. FABIUS & W.R. VAN ZWET, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, 1970. ISBN 90 6196 057 6.

MCS 11 H. BART, M.A. KAASHOEK, H.G.J. PIJLS, W.J. DE SCHIPPER & J. DE VRIES, *Colloquium Halfalgebra's en positieve operatoren*, 1971.
ISBN 90 6196 067 3.

MCS 12 T.J. DEKKER, *Numerieke algebra*, 1971. ISBN 90 6196 068 1.

MCS 13 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, *Programmeren voor rekenautomaten; De MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*, 1971. ISBN 90 6196 069 X.

MCS 14 H. BAVINCK, W. GAUTSCHI & G.M. WILLEMS, *Colloquium Approximatietheorie*, 1971. ISBN 90 6196 070 3.

MCS 15.1 T.J. DEKKER, P.W. HEMKER & P.J. VAN DER HOUWEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1972. ISBN 90 6196 078 9.

MCS 15.2 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, H.C. HEMKER, S.P.N. VAN KAMPEN & G.M. WILLEMS, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1973. ISBN 90 6196 079 7.

MCS 15.3 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, P.W. HEMKER & M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*, 1975.
ISBN 90 6196 118 1.

MCS 16.1 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 1: De elementen van het programmeren*, 1973. ISBN 90 6196 080 0.

MCS 16.2 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 2: De programmeertaal ALGOL 60*, 1973. ISBN 90 6196 087 8.

MCS 17.1 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 1*, 1974. ISBN 90 6196 090 8.

MCS 17.2 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 2*, 1974. ISBN 90 6196 091 6.

MCS 17.3 N.M. TEMME, *Lineaire algebra, deel 3*, 1976. ISBN 90 6196 123 8.

MCS 18 F. VAN DER BLIJ, H. FREUDENTHAL, J.J. DE IONGH, J.J. SEIDEL & A. VAN WIJNGAARDEN, *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, Syllabus van de Vakantiecursus 1971*, 1974. ISBN 90 6196 092 4.

MCS 19 A. HORDIJK, R. POTHARST & J.Th. RUNNENBURG, *Optimaal stoppen van Markovketens*, 1974. ISBN 90 6196 093 2.

MCS 20 T.M.T. COOLEN, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN & E. SLAGT, *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*, 1976. ISBN 90 6196 094 0.

MCS 21 J.W. DE BAKKER (red.), *Colloquium Programmacorrectheid*, 1975. ISBN 90 6196 103 3.

MCS 22 R. HELMERS, F.H. RUYMGAART, M.C.A. VAN ZUYLEN & J. OOSTERHOFF, *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; Toepassingen van naburigheid*, 1976. ISBN 90 6196 104 1.

MCS 23.1 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*, 1976. ISBN 90 6196 105 X.

MCS 23.2 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*, 1976. ISBN 90 6196 115 7.

MCS 24.1 P.J. VAN DER HOUWEN, *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: Eenstapsmethoden*, 1974. ISBN 90 6196 106 8.

MCS 25 *Colloquium Structuur van programmeertalen*, 1976. ISBN 90 6196 116 5.

MCS 26.1 N.M. TEMME (ed.), *Nonlinear analysis, volume 1*, 1976. ISBN 90 6196 117 3.

MCS 26.2 N.M. TEMME (ed.), *Nonlinear analysis, volume 2*, 1976. ISBN 90 6196 121 1.

MCS 27 M. BAKKER, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN, S.J. POLAK & M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Discretiseringsmethoden*, 1976. ISBN 90 6196 124 6.

MCS 28 O. DIEKMANN, N.M. TEMME (EDS), *Nonlinear Diffusion Problems*, 1976. ISBN 90 6196 126 2.

MCS 29.1 J.C.P. BUS (red.), *Colloquium Numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*, 1976. ISBN 90 6196 128 9.

MCS 29.2 H.J.J. TE RIELE (red.), *Colloquium Numerieke programmatuur, deel 2*, 1976. ISBN 144 0.

* MCS 30 P. GROENEBOOM, R. HELMERS, J. OOSTERHOFF & R. POTHARST, *Efficiency begrippen in de statistiek*, . ISBN 90 6196 149 1.

MCS 31 J.H. VAN LINT (red.), *Inleiding in de coderingstheorie*, 1976. ISBN 90 6196 136 X.

MCS 32 L. GEURTS (red.), *Colloquium Bedrijfssystemen*, 1976. ISBN 90 6196 137 8.

MCS 33 P.J. VAN DER HOUWEN, *Differentieschema's voor de berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*, 1977. ISBN 90 6196 138 6.

MCS 34 J. HEMELRIJK, *Oriënterende cursus mathematische statistiek*, ISBN 90 6196 139 4.

MCS 35 P.J.W. TEN HAGEN (red.), *Colloquium Computer Graphics*, 1977. ISBN 90 6196 142 4.

MCS 36 J.M. AARTS, J. DE VRIES, *Colloquium Topologische Dynamische Systemen*, 1977. ISBN 90 6196 143 2.

MCS 37 J.C. van Vliet (red.), *Colloquium Capita Datastructuren*, 1978. ISBN 90 6196 159 9.

MCS 38.1 T.H. Koornwinder (ed.), *Representations of locally compact groups with applications*, 1979. ISBN 90 6196 161 0.

MCS 38.2 T.H. Koornwinder (ed.), *Representations of locally compact groups with applications*, 1979. ISBN 90 6196 181 5.

MCS 39 O.J. Vrieze & G.L. Waanrooij, *Colloquium Stochastic spelen*, 1978. ISBN 90 6196 167 X.

De met een * gemerkte uitgaven moeten nog verschijnen.