Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

MC SYLLABUS 17.1

P.S. STOBBE

LINEAIRE ALGEBRA

DEEL 1

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1973

AMS (MOS) onderwerpen classificatie schema (1970): 15-01

ISBN 90 6196 090 8

Inhoud

Voorwoord

Het uitgangspunt bij het samenstellen van deze syllabus is geweest een behandeling van de lineaire algebra te geven voor diegenen, die een goede wiskundige achtergrond zoeken bij het toepassen van de lineaire algebra. Er is naar gestreefd de behandeling van de stof streng te ontwikkelen en alle uitspraken te bewijzen.

Als voorkennis wordt verondersteld de wiskundekennis vergelijkbaar met die voor het eindexamen van de middelbare school (bijvoorbeeld Wiskunde I). Vanwege de uitgebreide behandeling van de stof moet het mogelijk zijn deze syllabus zonder directe begeleiding door te werken. Er is veel zorg besteed aan de presentatie van de stof.

De keuze van onderwerpen is, mede door deze uitgebreidheid in de presentatie, beperkt moeten blijven. Zo is het begrip dualiteit niet aan de orde gekomen.

Afgezien van een enkel uitstapje naar de meetkunde worden er verder geen toepassingen gegeven. Veel aandacht wordt besteed aan de combinatorische aspecten van de determinant, terwijl eveneens de benadering via multilineaire functies uitvoerig aan de orde komt.

Deze syllabus bestaat uit twee delen. Het ligt in de bedoeling een derde deel samen te stellen dat vraagstukken en uitwerkingen daarvan bevat. Achterin het tweede deel is een literatuurlijst opgenomen, waarin ook boeken voorkomen die voornamelijk vraagstukken bevatten: [2], [5] en [10]. Sommige boeken zijn eenvoudig ([3], [5], [8], [9], [10]) en andere kunnen beter bestudeerd worden als al enige voorkennis aanwezig is ([2], [4], [6], [7]). De lezer dient er rekening mee te houden dat de notatie en presentatie in elk van de boeken verschillend zal zijn met die van deze syllabus.

Amsterdam, 1973 N.M. Temme

I. Opmerkinger vooraf

§I.1. Verzamelingen

De begrippen: "Verzameling", "Element van een verzameling", "Afbeelding van een verzameling V naar een verzameling W", "Lege verzameling", "Natuurlijk getal", "Reëel getal", "Complex getal", zullen we bekend veronderstellen. In deze paragraaf geven we vervolgens nog enkele aanvullende opmerkingen en notatieafspraken.

Als V een verzameling is en a is een element van V, dan geven we dit aan met:

I.1.1 $$a \in V.$$

Is a niet een element van V, dan noteren we:

I.1.2 $$a \notin V.$$

Is A een of andere eigenschap die de elementen van een verzameling V karakteriseert, dan noteren we V vaak in de vorm:

I.1.3 $$V = \{a \mid a \text{ voldoet aan } A\}$$

en we zeggen: "V is de verzameling van alle elementen a die voldoen aan de eigenschap A". Bijvoorbeeld: De verzameling van alle natuurlijke getallen die deelbaar zijn door 3 kunnen we aangeven met:

I.1.4 $$\{a \mid a \text{ is een natuurlijk getal en er is een natuurlijk getal } b \text{ zodat } a = 3b\}.$$

Sommige veel voorkomende verzamelingen geven we aan met een vastgekozen symbool:

I.1.5 Definitie: $\mathbb{N}$ is de verzameling der natuurlijke getallen *);
$\mathbb{Z}$ is de verzameling der gehele getallen;
$\mathbb{R}$ is de verzameling der reële getallen;
$\mathbb{C}$ is de verzameling der complexe getallen;
$\emptyset$ is de lege verzameling.

*) We zullen het getal 0 ook een natuurlijk getal noemen: $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$.

We kunnen de in I.1.4 omschreven verzameling nu ook noteren met:

$$\{a \mid a \in \mathbb{N} \text{ en er is een } b \in \mathbb{N} \text{ zodat } a = 3b\}.$$

Als V een verzameling is die eindig veel elementen bevat, zeg: De elementen van V zijn $a_1, \ldots, a_n$, dan noteren we ook wel:

I.1.6 $$V = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Zijn V en W twee verzamelingen, waarbij elk element van V tevens een element van W is, dan heet V een <u>deelverzameling van W</u>. We geven dit aan met:

I.1.7 $$V \subset W.$$

Zo is bijvoorbeeld $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{C}$, etc., etc.

I.1.8 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> U, V, W <u>drie verzamelingen en is</u> U <u>een deelverzameling van</u> V <u>en</u> V <u>een deelverzameling van</u> W, <u>dan is</u> U <u>een deelverzameling van</u> W.

I.1.9 <u>Opmerking</u>: <u>De lege verzameling is deelverzameling van elke andere verzameling</u>.

Twee verzamelingen V en W heten <u>gelijk</u> als elk element van V tevens een element van W is, en, omgekeerd, elk element van W tevens een element van V is. We noteren in dit geval:

I.1.10 $$V = W.$$

Gebruikmakend van de hiervóór ingevoerde notatie kunnen we dus zeggen:

I.1.11 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> V <u>en</u> W <u>twee verzamelingen zijn, dan is</u> V = W <u>dan en slechts dan als</u> $V \subset W$ <u>èn</u> $W \subset V$.

Beschouw opnieuw twee verzamelingen V en W. De <u>doorsnede van</u> V <u>en</u> W is per definitie de verzameling die bestaat uit alle elementen die zowel tot V als tot W behoren. We geven deze verzameling aan met de notatie:

I.1.12 $$V \cap W.$$

Anders gezegd:

$$V \cap W = \{a \mid a \in V \text{ en } a \in W\}.$$

(merk op dat $V \cap W$ best de lege verzameling kan zijn). Voorts is direkt duidelijk:

I.1.13 Opmerking: Voor elk tweetal verzamelingen V en W is $V \cap W$ een deelverzameling van zowel V als W.

De vereniging van twee verzamelingen V en W is de verzameling van alle elementen die tenminste tot één der beide verzamelingen behoren (niet noodzakelijk in beide), en wordt aangegeven met:

I.1.14 $$V \cup W,$$

$$V \cup W = \{a \mid a \in V \text{ of } A \in W\}.$$

Een direkt gevolg van deze definitie is:

I.1.15 Opmerking: Als V en W twee verzamelingen zijn, dan is V zowel als W een deelverzameling van $V \cup W$.

Laat nu f een afbeelding zijn van een verzameling V naar een verzameling W. We geven dit aan met:

I.1.16 $$f : V \to W$$

of met

I.1.17 $$V \xrightarrow{f} W.$$

f is een voorschrift dat aan ieder element $a \in V$ een éénduidig bepaald element $f(a) \in W$ toevoegt. $f(a)$ noemen we: "het beeld van a onder f". Als

$$f : V \to W, \; g : V \to W$$

twee afbeeldingen zijn van een verzameling V naar een verzameling W, dan heten f en g gelijk als voor ieder element $a \in V$ geldt: $f(a) = g(a)$.

Beschouw nogmaals een afbeelding

$$f : V \to W.$$

Niet elk element van W behoeft het beeld te zijn van een element uit V. We kunnen spreken van de deelverzameling van W die bestaat uit die elementen van W die het beeld zijn van een element uit V onder de afbeelding f. Deze deelverzameling van W geven we aan met:

I.1.18 $$\mathrm{Im}(f).$$

Anders genoteerd:

$$\mathrm{Im}(f) = \{b \mid b \in W \text{ en er is een } a \in V \text{ met } b = f(a)\}.$$

Im(f) noemen we: "het beeld van V onder f". ("Im" is de afkorting van "Image").

I.1.19 Voorbeeld: Beschouw de afbeelding

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

die aan ieder element $z \in \mathbb{Z}$ toevoegt het beeld

$$f(z) = 2|z|.$$

Dan is Im(f) de verzameling van alle even natuurlijke getallen. (Ga dit na!)

We zullen nu onze aandacht richten op een aantal bijzondere eigenschappen waaraan afbeeldingen al dan niet kunnen voldoen:

I.1.20 Definitie: Een afbeelding $f : V \to W$ heet surjectief als elk element van W het beeld is van een element uit V onder f.

Anders geformuleerd: Een afbeelding $f : V \to W$ is surjectief als $\mathrm{Im}(f) = W$. Ga na dat de in I.1.19 gegeven afbeelding niet surjectief is.

Beschouw opnieuw een afbeelding $f : V \to W$. f is een voorschrift dat aan elk element $a \in V$ een ondubbelzinnig bepaald element $f(a)$ in W toevoegt. Het kan voorkomen dat dit voorschrift aan twee verschillende elementen a_1, a_2 in V hetzelfde element van W toevoegt: $f(a_1) = f(a_2)$. (Bijvoorbeeld: Beschouw de afbeelding uit I.1.19. -3 en $+3$ zijn twee verschillende elementen uit $\mathbb{Z}$, terwijl hun beelden onder f, $f(-3) = 6$ en $f(+3) = 6$, gelijk zijn.) We geven aan afbeeldingen $f : V \to W$ die aan de eigenschap voldoen dat ze aan elk tweetal verschillende elementen $a_1, a_2 \in V$ verschillende beelden $f(a_1)$, $f(a_2)$ toevoegen een naam:

I.1.21 Definitie: Een afbeelding $f : V \to W$ heet injectief als voor elk tweetal verschillende elementen $a_1, a_2 \in V$ ook hun beelden $f(a_1)$, $f(a_2) \in W$ verschillend zijn.

Verder definiëren we nog:

I.1.22 Definitie: Een afbeelding $f : V \to W$ heet bijectief als f zowel surjectief als injectief is.

Laat nu een drietal verzamelingen U, V en W gegeven zijn, alsmede een tweetal afbeeldingen

$$f : U \to V, \quad g : V \to W$$

(we noteren zo'n situatie ook wel met: $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$).

We kunnen dan, uitgaande van de afbeeldingen f en g, een nieuwe afbeelding van U naar W definiëren, door: "Eerst f en daarna g toe te passen". Dit gaat als volgt: Kies een element $u \in U$. Dan is $f(u)$ een element van V, dat weer een beeld $g(f(u))$ onder g in W heeft. We hebben zo een voorschrift dat aan elk element $u \in U$ een éénduidig bepaald element $g(f(u)) \in W$ toevoegt, dus een afbeelding

$$h : U \to W$$

met $h(u) = g(f(u))$. In plaats van h noteren we vaak:

I.1.23 $$g \circ f : U \to W$$

(N.B.: Let goed op de volgorde van g en f in $g \circ f$!) We formuleren het voorgaande in de volgende definitie:

I.1.24 Definitie: Als U, V en W drie verzamelingen zijn en

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

zijn twee afbeeldingen, dan heet de afbeelding

$$g \circ f : U \to W$$

die aan elk element $u \in U$ toevoegt het beeld

$$(g \circ f)(u) = g(f(u))$$

de samenstelling van f en g.

Merk hierbij nog op dat het uiteraard noodzakelijk is dat, wil de samenstelling $g \circ f$ bestaan, f een afbeelding naar V en g een afbeelding uitgaande van V is.

We kunnen het in I.1.24 gegeven procédé van het samenstellen van afbeeldingen uitbreiden: Beschouw een viertal verzamelingen T, U, V, W en drie afbeeldingen f, g, h volgens het diagram:

$$T \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{h} W.$$

Er zijn nu in principe twee mogelijkheden om deze afbeeldingen samen te stellen tot een afbeelding van T naar W:

(i) Stel eerst f en g samen tot $g \circ f$. We hebben dan:

$$T \xrightarrow{g \circ f} V \xrightarrow{h} W.$$

Stel nu $g \circ f$ en h samen tot $h \circ (g \circ f): T \to W$.

(ii) Stel eerst g en h samen tot $h \circ g$. We vinden:

$$T \xrightarrow{f} U \xrightarrow{h \circ g} W.$$

Stel nu f en $h \circ g$ samen tot $(h \circ g) \circ f : T \to W$.
We verkrijgen dus in principe de afbeeldingen $h \circ (g \circ f)$ en $(h \circ g) \circ f$, beide van T naar W. Er geldt nu:

I.1.25 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> T, U, V <u>en</u> W <u>vier verzamelingen zijn en</u> f, g <u>en</u> h <u>zijn drie afbeeldingen volgens het diagram</u>

$$T \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{h} W,$$

<u>dan geldt</u>:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

<u>Bewijs</u>: Om te bewijzen dat beide afbeeldingen gelijk zijn, moeten we laten zien dat voor elk element $t \in T$ de beelden $(h \circ (g \circ f))(t)$ en $((h \circ g) \circ f)(t)$ gelijk zijn. Welnu:

$$(h \circ (g \circ f))(t) = h((g \circ f)(t)) = h(g(f(t)))$$

$$((h \circ g) \circ f)(t) = (h \circ g)(f(t)) = h(g(f(t)))$$

(ga dit zorgvuldig na !), zodat de opmerking bewezen is. □

Uit opmerking I.1.25 volgt, dat het geen verschil maakt of we eerst f en g samenstellen tot $g \circ f$ en dan $g \circ f$ en h samenstellen tot $h \circ (g \circ f)$, of dat we eerst g en h samenstellen tot $h \circ g$ en dan $h \circ g$ en f tot $(h \circ g) \circ f$. Maar dan is er ook geen bezwaar tegen het spreken over de samenstelling $h \circ g \circ f$ van f, g en h (let wel weer op de volgorde !).

Ga zelf na, hoe in de situatie

$$V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} V_2 \xrightarrow{f_3} \ldots\ldots \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{f_n} V_n$$

de samenstelling

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1 : V_0 \to V_n$$

gedefinieerd moet worden.

Tot nu toe hebben we steeds gesproken over afbeeldingen van een verzameling V naar een verzameling W, waarbij V en W in het algemeen verschillend zijn. We kunnen natuurlijk ook spreken van een afbeelding f van een verzameling V naar dezelfde verzameling V. Zulke afbeeldingen hebben een speciale naam:

I.1.26 <u>Definitie</u>: Zij V een verzameling. Een afbeelding $f : V \to V$ van V naar V zelf heet een <u>endomorphisme van</u> V.

Als f en g twee endomorphismen van een verzameling V zijn, dan hebben we twee mogelijke samenstellingen: $f \circ g$ en $g \circ f$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & V \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

Ook $g \circ f$ en $f \circ g$ zijn uiteraard endomorphismen van V. Merk op dat beide samenstellingen niet aan elkaar gelijk behoeven te zijn, zoals het volgende voorbeeld illustreert.

I.1.27 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de endomorphismen

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad , \qquad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

van $\mathbb{Z}$ die gegeven zijn door:

$$f(z) = z^2 \quad , \qquad g(z) = -z \; .$$

Dan geldt voor ieder element $z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} (f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(-z) = (-z)^2 = z^2, \\ (g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(z^2) = -z^2. \end{cases}$$

Opdat $f \circ g = g \circ f$ moet voor ieder element $z \in \mathbb{Z}$ gelden:

$$(f \circ g)(z) = (g \circ f)(z).$$

Dus in het bijzonder:

$$(f \circ g)(1) = (g \circ f)(1).$$

Echter: $(f \circ g)(1) = 1$ en $(g \circ f)(1) = -1$, zodat $f \circ g$ en $g \circ f$ niet gelijk zijn.

Een zeer bijzonder endomorphisme van een verzameling V is de afbeelding, die aan ieder element $v \in V$ toevoegt het element v zelf (m.a.w.: "elk element op zichzelf afbeeldt"). Deze afbeelding geven we aan met

I.1.28 $$\mathrm{id}_V : V \to V$$

en we noemen dit endomorphisme van V de <u>identieke afbeelding op</u> V.

I.1.29 <u>Opmerking</u>: <u>Voor iedere verzameling</u> V <u>is de identieke afbeelding op</u> V <u>bijectief</u>.

(Ga dit na !)

Beschouw nu twee verzamelingen V en W, en daarbij twee afbeeldingen

$$f : V \to W \quad , \qquad g : W \to V,$$

één van V naar W en één van W naar V. We hebben ook in dit geval zowel de samenstelling $f \circ g$ als $g \circ f$:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & V \end{tikzcd}.$$

$f \circ g$ is een endomorphisme van W en $g \circ f$ is een endomorphisme van V. We definiëren nu:

I.1.30 <u>Definitie</u>: Een afbeelding $f : V \to W$ heet een <u>isomorphisme</u> als er een afbeelding $g : W \to V$ bestaat, zodat geldt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_V \quad \text{èn} \quad f \circ g = \mathrm{id}_W.$$

I.1.31 Voorbeeld: Beschouw de verzamelingen

$$V = \{3,5,12,100\} \qquad , \qquad W = \{10,26,145,10001\}$$

en laat f een afbeelding van V naar W zijn, gegeven door

$$f(v) = v^2 + 1$$

voor elke $v \in V$. (Merk op dat voor iedere $v \in V$ $f(v)$ inderdaad een element van W is !) Definieer vervolgens de afbeelding

$$g : W \to V$$

met $g(w) = \sqrt{w-1}$ voor elke $w \in W$. (Ook nu is voor iedere $w \in W$ $g(w)$ inderdaad een element van V.) Nu geldt voor iedere $v \in V$ en iedere $w \in W$:

$$(f \circ g)(w) = f(g(w)) = f(\sqrt{w-1}) = (\sqrt{w-1})^2 + 1 = w = id_W(w)$$

$$(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(v^2+1) = \sqrt{v^2+1-1} = v = id_V(v)\,,$$

zodat $f \circ g = id_W$ en $g \circ f = id_V$. Dus is f een isomorphisme.

Zij $f : V \to W$ een afbeelding. We hebben dan de samenstellingen $f \circ id_V$ en $id_W \circ g$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id_V"] \arrow[rr, bend right, "f \circ id_V"'] & V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd} \qquad ; \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_W \circ f"'] & W \arrow[r, "id_W"] & W \end{tikzcd} .$$

Er geldt:

I.1.32 Opmerking: Als $f : V \to W$ een afbeelding is, dan geldt:

$$f \circ id_V = f \;, \quad id_W \circ f = f.$$

Bewijs: Om te bewijzen dat $f \circ id_V = f$, moeten we laten zien dat voor elk element $v \in V$ geldt:

$$(f \circ id_V)(v) = f(v).$$

Welnu:

$$(f \circ id_V)(v) = f(id_V(v)) = f(v).$$

Om te bewijzen dat $id_W \circ f = f$, moeten we laten zien dat voor elk element $v \in V$ geldt:

$$(id_W \circ f)(v) = f(v)\,.$$

Welnu:

$$(id_W \circ f)(v) = id_W(f(v)) = f(v).$$

Dus is de opmerking bewezen. □

De volgende stelling is van belang.

I.1.33 Stelling: Voor elke afbeelding $f : V \to W$ geldt: f is een isomorphisme dan en slechts dan als f bijectief is.

Bewijs: Het bewijs valt uitéén in twee delen. Eerst laten we zien dat als gegeven is dat f een isomorphisme is, daaruit volgt dat f injectief en surjectief (dus bijectief) is. Ten tweede tonen we aan dat, als we weten dat f bijectief is, we kunnen bewijzen dat f een isomorphisme is.
(i) Zij $f : V \to W$ een isomorphisme. Dan is er een afbeelding $g : W \to V$ zodat $g \circ f = id_V$ en $f \circ g = id_W$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_V"'] & W \arrow[r, "g"] & V \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "id_W"'] & V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd} .$$

We weten dus dat voor elke $v \in V$ en elke $w \in W$ geldt:

$$(g \circ f)(v) = id_V(v) = v \quad ; \quad (f \circ g)(w) = id_W(w) = w.$$

We bewijzen eerst dat f surjectief is. We moeten laten zien dat er voor ieder element $w \in W$ een element $v \in V$ bestaat, zodat $f(v) = w$.
Welnu, kies een willekeurig element $w \in W$. Dan is $g(w) \in V$. Noteer:

$$v = g(w).$$

Dan geldt: $f(v) = f(g(w)) = (f \circ g)(w) = w$. Dus is f surjectief. Nu bewijzen we dat f injectief is. We moeten laten zien dat als v_1 en v_2 twee verschillende elementen van V zijn, ook hun beelden $f(v_1)$ en $f(v_2)$ verschillend zijn. Stel dit is niet het geval. Dus $v_1 \neq v_2$ en $f(v_1) = f(v_2)$. We laten zien dat dit tot een tegenspraak leidt, zodat deze situatie niet kan voorkomen, wat inhoudt dat als $v_1 \neq v_2$, ook $f(v_1) \neq f(v_2)$ moet zijn.
Welnu, uit $f(v_1) = f(v_2)$ zou volgen: $g(f(v_1)) = g(f(v_2))$. Echter:

$$g(f(v_1)) = (g \circ f)(v_1) = v_1 \quad ; \quad g(f(v_2)) = (g \circ f)(v_2) = v_2$$

zodat dit zou betekenen: $v_1 = v_2$, in tegenspraak met onze veronderstelling dat v_1 en v_2 twee verschillende elementen van V zijn. Dus volgt uit $v_1 \neq v_2$ dat $f(v_1) \neq f(v_2)$. Dus f is injectief. We hadden al bewezen dat f surjectief was. Dus is f bijectief.
(ii) Zij nu gegeven dat $f : V \to W$ bijectief is. We willen dan bewijzen dat f een isomorphisme is. We moeten dus een afbeelding $g : W \to V$ zien aan te geven met de eigenschappen:

$$f \circ g = id_W \quad ; \quad g \circ f = id_V.$$

Kies hiertoe een willekeurig element $w \in W$. Omdat f surjectief is, bestaat er een element $v \in V$, zodat $f(v) = w$. Dit element v is éénduidig bepaald. Immers, als $v' \in V$ nog een element uit V was met $f(v') = w$, dan zou f aan de twee verschillende elementen v en v' uit V hetzelfde beeld $w = f(v) = f(v')$ toevoegen, en dit kan niet vanwege de injectiviteit van f. Dus is er bij ieder element $w \in W$ precies één element $v \in V$ met de eigenschap dat $f(v) = w$. Definieer nu de afbeelding

$$g : W \to V$$

als volgt: Kies $w \in W$ en daarbij het ondubbelzinnig bepaalde element $v \in V$ met $f(v) = w$. Definieer: $g(w) = v$. Hiermee is de afbeelding g gedefinieerd. Kies nu een element $w \in W$. Dan geldt:

$$(f \circ g)(w) = f(g(w)).$$

Zij $v \in V$ met $f(v) = w$. Dan is $g(w) = v$ zodat

$$f(g(w)) = f(v) = w = id_W(w).$$

Dus is $f \circ g = id_W$.
Kies nu een willekeurig element $v \in V$. Dan is

$$(g \circ f)(v) = g(f(v)).$$

Noteer: $f(v) = w$. Dan is wegens de definitie van g

$$g(f(v)) = g(w) = v = id_V(v).$$

Dus is $g \circ f = id_V$.
Hiermee is bewezen dat f een isomorphisme is.
Dus is de stelling bewezen. □

Vervolgens merken we op:

I.1.34 Stelling: Zij $f : V \to W$ een isomorphisme. Dan is er precies één afbeelding $g : W \to V$ zodat $f \circ g = id_W$ en $g \circ f = id_V$. Deze afbeelding g is ook een isomorphisme.

Bewijs: Omdat f een isomorphisme is, bestaat er volgens I.1.30 tenminste één afbeelding $g : W \to V$ met $f \circ g = id_W$ en $g \circ f = id_V$. Stel nu dat er nog een afbeelding $g' : W \to V$ is met $f \circ g' = id_W$ en $g' \circ f = id_V$. We moeten dan bewijzen dat $g' = g$. Welnu,

$$g' = id_V \circ g' = (g \circ f) \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ id_W = g$$

(cf. I.1.25 en I.1.32). Dus is er precies één afbeelding $g : W \to V$ met $f \circ g = id_W$ en $g \circ f = id_V$. Dat $g : W \to V$ een isomorphisme is volgt, omdat de afbeelding $f : V \to W$ voldoet aan de eigenschappen $f \circ g = id_W$ en $g \circ f = id_V$. □

Omdat er bij elk isomorphisme $f : V \to W$ precies één isomorphisme $g : W \to V$ bestaat zodat $f \circ g = id_W$ en $g \circ f = id_V$, geven we dit isomorphisme een naam:

I.1.35 Definitie: Als f : V → W een isomorphisme is, dan heet de uniek bepaalde afbeelding g : W → V met de eigenschappen:

$$f \circ g = id_W \quad , \quad g \circ f = id_V$$

de inverse afbeelding van f. We noteren in plaats van g : W → V liever (omdat g éénduidig door f bepaald is):

$$f^{-1} : W \to V.$$

(Merk op dat alleen een isomorphisme een inverse afbeelding heeft).

I.1.36 Opmerking: Als f : U → V en g : V → W twee isomorphismen zijn, dan is ook hun samenstelling g ∘ f : U → W een isomorphisme en er geldt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Bewijs:

$$f^{-1} \circ g^{-1} = h$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[rr, bend right=60, "g \circ f"'] & V \arrow[l, bend right, "f^{-1}"'] \arrow[r, bend right, "g"'] & W \arrow[l, bend right, "g^{-1}"'] \arrow[ll, bend right=60]
\end{tikzcd}$$

Noteer kortheidshalve: $h = f^{-1} \circ g^{-1}$. Om te laten zien dat g ∘ f een isomorphisme is, is het voldoende om te bewijzen dat

$$(g \circ f) \circ h = id_W \quad , \quad h \circ (g \circ f) = id_U.$$

Bovendien is dan automatisch $h = (g \circ f)^{-1}$. Welnu, er geldt:

$$f \circ f^{-1} = id_V;\ f^{-1} \circ f = id_U;\ g \circ g^{-1} = id_W;\ g^{-1} \circ g = id_V.$$

Volgens I.1.32 geldt ook:

$$g \circ id_V = g \quad ; \quad id_V \circ f = f .$$

Dit combinerend, rekening houdend met I.1.25, volgt enerzijds:

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = \\ &= g \circ id_V \circ g^{-1} = (g \circ id_V) \circ g^{-1} = \\ &= g \circ g^{-1} = id_W\end{aligned}$$

en anderzijds:

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f)) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \\ &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_V \circ f = \\ &= f^{-1} \circ (id_V \circ f) = f^{-1} \circ f = id_U ,\end{aligned}$$

waarmee de opmerking bewezen is. □

De lezer ga na dat algemener geldt:

I.1.37 Opmerking: Als de n afbeeldingen

$$V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} V_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{f_n} V_n$$

alle isomorphismen zijn, dan is hun samenstelling $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$, ook een isomorphisme en er geldt:

$$\begin{aligned}&(f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = \\ &= f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \dots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}.\end{aligned}$$

I.1.38 Opmerking: Als $f : V \to W$ een isomorphisme is, dan is f^{-1} een isomorphisme en er geldt:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Bewijs: Volgt direkt uit I.1.34. □

I.1.39 <u>Terminologie</u>: Een endomorphisme $f : V \to V$ van een verzameling V, dat tevens een isomorphisme is, heet een <u>automorphisme van V</u>.

I.1.40 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> f <u>een automorphisme van een verzameling</u> V <u>en</u> g <u>een endomorphisme van</u> V, <u>zodat</u> $g \circ f = id_V$, <u>dan is</u> $g = f^{-1}$ (<u>en derhalve ook een automorphisme van</u> V).

<u>Bewijs</u>: Opdat $g = f^{-1}$ is het voldoende (cf. I.1.38) om te laten zien dat naast $g \circ f = id_V$ ook geldt: $f \circ g = id_V$. Welnu,

$$\begin{aligned} f \circ g &= (f \circ g) \circ id_V = (f \circ g) \circ (f \circ f^{-1}) = \\ &= f \circ (g \circ f) \circ f^{-1} = f \circ id_V \circ f^{-1} = \\ &= (f \circ id_V) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = id_V, \end{aligned}$$

zodat de opmerking bewezen is. □

I.1.41 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> f <u>een automorphisme van een verzameling</u> V <u>en</u> g <u>een endomorphisme van</u> V, <u>zodat</u> $f \circ g = id_V$, <u>dan is</u> $g = f^{-1}$ (<u>en derhalve ook een automorphisme van</u> V).

<u>Bewijs</u>: Volgens I.1.38 moeten we laten zien dat naast $f \circ g = id_V$ ook geldt: $g \circ f = id_V$. Welnu,

$$\begin{aligned} g \circ f &= id_V \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ (g \circ f) = \\ &= f^{-1} \circ (f \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_V \circ f = \\ &= f^{-1} \circ (id_V \circ f) = f^{-1} \circ f = id_V, \end{aligned}$$

zodat de opmerking geldt.

I.1.42 Tot slot van deze paragraaf voeren we nog het begrip: "Produkt van (eindig veel) verzamelingen" in. Laat een tweetal verzamelingen V en W gegeven zijn. Beschouw de verzameling waarvan de elementen de geordende paren (v,w) zijn met $v \in V$ en $w \in W$. (Twee van deze paren (v_1,w_1) en (v_2,w_2) zijn gelijk dan en slechts dan als $v_1 = v_2$ èn $w_1 = w_2$.) Deze verzameling noemen we: "het produkt van V en W"; we geven deze verzameling aan met

I.1.43 $$V \, \Pi \, W \, .$$

(Merk hierbij op dat als $V \neq W$ ook $V \, \Pi \, W \neq W \, \Pi \, V$.) Algemener definiëren we:

I.1.44 Definitie: Als $V_1, V_2, \ldots, V_n$ een n-tal verzamelingen is, dan heet de verzameling

$$V_1 \, \Pi \, V_2 \, \Pi \, \ldots \, \Pi \, V_n =$$

$$= \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n\}$$

het produkt van $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Als in definitie I.1.42 geldt: $V_1 = V_2 = \ldots = V_n = V$, dan noteren we ook:

I.1.45 $$V^n = \underbrace{V \, \Pi \, V \, \Pi \, \ldots \, \Pi \, V}_{\text{n keer}} = V_1 \, \Pi \, V_2 \, \Pi \, \ldots \, \Pi \, V_n .$$

* * *

§I.2. Permutaties

I.2.1 Met $\{1, \ldots, n\}$ geven we de verzameling aan van de natuurlijke getallen 1 tot en met n.

I.2.2 Definitie: Als V een verzameling is en n een natuurlijk getal ≥ 1, dan heet een afbeelding

$$\rho : \{1, \ldots, n\} \to V$$

een n-tupel uit V.

Als V een verzameling is en ρ is een n-tupel uit V, dan kunnen we ρ beschrijven met het schema

I.2.3 $$[\rho(1), \rho(2), \ldots, \rho(n)].$$

Zo'n schema is dus een stelsel van n "genummerde plaatsen" waarbij aan elke plaats een element uit V is toegevoegd: op de i^e plaats ($i \in \{1, \ldots, n\}$) staat het beeld $\rho(i)$ van i onder ρ. Omgekeerd, als we zo'n schema beschouwen, zeg:

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] \qquad (v_i \in V)$$

(waarbij best op verschillende plaatsen hetzelfde element van V mag voorkomen), dan behoort daar het n-tupel

$$\rho : \{1, \ldots, n\} \to V$$

bij dat gegeven wordt door:

$$\rho(1) = v_1, \rho(2) = v_2, \ldots, \rho(n) = v_n.$$

We zien dus dat bij iedere n-tupel uit V precies één zo'n schema behoort, en bij ieder schema precies één n-tupel. (Twee schema's zijn uiteraard dan en slechts dan aan elkaar gelijk als de elementen op de overeenkomstige plaatsen twee aan twee aan elkaar gelijk zijn.) We zullen dan ook wel spreken over: "het n-tupel $[v_1, \ldots, v_n]$ uit V" in plaats van: "het n-tupel $\rho : \{1, \ldots, n\} \to V$, gegeven door $\rho(1) = v_1, \ldots, \rho(n) = v_n$". Ook zullen we zeggen dat $[v_1, \ldots, v_n]$ "het schema is bij ρ".

I.2.4 <u>Voorbeeld</u>: Het 3-tupel $[1, \sqrt{3}, 1]$ uit $\mathbb{R}$ is de afbeelding

$$\rho : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$$

die gegeven wordt door: $\rho(1) = 1$, $\rho(2) = \sqrt{3}$, $\rho(3) = 1$.

I.2.5 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een verzameling en</u> $\rho : \{1, \ldots, n\} \to V$ <u>een n-tupel uit</u> V <u>met schema</u> $[v_1, \ldots, v_n]$, <u>dan is</u> ρ <u>injectief dan en slechts dan als de elementen</u> $v_1, \ldots, v_n$ <u>paarsgewijs verschillend zijn</u>.

Bewijs: (i) Als ρ een injectieve afbeelding is, dan is als $i \neq j$ ook $\rho(i) \neq \rho(j)$. Dus, omdat $v_i = \rho(i)$ en $v_j = \rho(j)$, is dan $v_i \neq v_j$. Derhalve zijn dan de elementen in het schema paarsgewijs verschillend.
(ii) Neem nu aan dat de elementen in het schema paarsgewijs verschillend zijn. Als $i \neq j$ is, dan $v_i \neq v_j$ oftewel: $\rho(i) \neq \rho(j)$. Dus voegt ρ aan twee verschillende elementen i, j uit $\{1,\dots, n\}$ verschillende beelden v_i, v_j toe. Dus is ρ injectief. □

We definiëren nu:

I.2.6 Definitie: Een n-permutatie σ is een bijectieve afbeelding

$$\sigma : \{1,\dots, n\} \to \{1,\dots, n\}.$$

We kunnen allereerst opmerken dat een n-permutatie een n-tupel is uit $\{1,\dots, n\}$. We kunnen de n-permutatie σ dus ook beschrijven met het schema $[\sigma(1),\dots, \sigma(n)]$. De in dit schema voorkomende elementen zijn afkomstig uit $\{1,\dots, n\}$. Omdat σ bijectief en derhalve zeker injectief is, zijn de in het schema $[\sigma(1),\dots, \sigma(n)]$ voorkomende natuurlijke getallen volgens I.2.5 paarsgewijs verschillend.

I.2.7 Opmerking: Zij $\sigma : \{1,\dots, n\} \to \{1,\dots, n\}$ een n-tupel uit $\{1,\dots, n\}$ met schema $[k_1,\dots, k_n]$. σ is een n-permutatie dan en slechts dan als elk der natuurlijke getallen $1,\dots, n$ precies één keer voorkomt in dit schema.

Bewijs: (i) Neem eerst aan dat σ een n-permutatie is. Dan is σ een bijectieve afbeelding. Omdat σ injectief is, komt volgens I.2.5 elk der getallen $1,\dots, n$ hooguit één keer voor. Ook is σ surjectief, dus is elk element $m \in \{1,\dots, n\}$ het beeld van een element $l \in \{1,\dots, n\}$ onder σ. Zeg: $m = \sigma(l)$. Nu is $\sigma(l) = k_l$, dus $m = k_l$ en komt derhalve voor in het schema van σ. Samenvattend kunnen we zeggen dat elk element van $\{1,\dots, n\}$ precies één keer voorkomt in het schema van σ.
(ii) Neem nu aan dat elk element van $\{1,\dots, n\}$ precies één keer voorkomt in het schema $[k_1,\dots, k_n]$ van σ. Dan zijn de elementen in dit schema paarsgewijs verschillend, zodat volgens I.2.5 σ injectief is. Ook is σ surjectief: Kies $m \in \{1,\dots, n\}$ willekeurig; m komt voor onder de getallen $k_1,\dots, k_n$. Zeg: $m = k_l$. Dan is, wegens $k_l = \sigma(l)$, m het beeld van l onder σ.

Dus elk element van $\{1,\ldots, n\}$ is het beeld van een element uit $\{1,\ldots, n\}$ onder σ. Dus σ is ook surjectief, en derhalve bijectief. Dan is σ per definitie een n-permutatie. □

I.2.8 Voorbeeld: Het 7-tupel [1,3,5,6,2,1,7] uit $\{1,\ldots, 7\}$ is geen 7-permutatie, want 4 komt niet in het schema voor en 1 komt twee keer voor. Daarentegen is [1,3,5,6,2,4,7] wel het schema van een 7-permutatie.

De enige 1-permutatie is [1].

De 2-permutaties zijn [1,2] en [2,1].

De 3-permutaties zijn [1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,1,2] en [3,2,1].

Er zijn: één 1-permutatie, twee 2-permutaties, zes 3-permutaties, etc. etc. In het algemeen zijn er n! n-permutaties.

I.2.9 De identieke afbeelding op $\{1,\ldots, n\}$ is uiteraard bijectief en dus een n-permutatie. Het bijbehorend schema is [1,2,..., n]. Voorts, als $\sigma : \{1,\ldots, n\} \to \{1,\ldots, n\}$ een n-permutatie is, is volgens I.2.6 σ een bijectieve afbeelding en - volgens I.1.33 - derhalve een isomorphisme. Dan is volgens I.1.34 de inverse afbeelding σ^{-1} van σ ook een isomorphisme en dus hebben we - weer volgens I.1.33 - de bijectieve afbeelding $\sigma^{-1} : \{1,\ldots, n\} \to \{1,\ldots, n\}$. Ook σ^{-1} is dus een n-permutatie.

I.2.10 Voorbeeld: Beschouw de 5-permutatie [3,1,2,5,4]. Dit is de afbeelding:

$$\sigma : \{1,\ldots, 5\} \to \{1,\ldots, 5\}$$

die gegeven is door:

$$\sigma(1) = 3,\ \sigma(2) = 1,\ \sigma(3) = 2,\ \sigma(4) = 5,\ \sigma(5) = 4.$$

Ga na dat σ^{-1} dan gegeven wordt door:

$$\sigma^{-1}(1) = 2,\ \sigma^{-1}(2) = 3,\ \sigma^{-1}(3) = 1,\ \sigma^{-1}(4) = 5,\ \sigma^{-1}(5) = 4$$

oftewel door het schema [2,3,1,5,4].

Volgens het voorgaande kunnen we definiëren:

I.2.11 <u>Definitie</u>: Als σ een n-permutatie is, dan heet de inverse afbeelding σ^{-1} van σ de <u>inverse n-permutatie van</u> σ.

Kies nu een verzameling V en daarbij een n-tupel $\rho : \{1,\dots, n\} \to V$. Kies vervolgens een n-permutatie $\sigma : \{1,\dots, n\} \to \{1,\dots, n\}$. We kunnen dan de samenstelling $\rho \circ \sigma : \{1,\dots, n\} \to V$ beschouwen:

$$\begin{tikzcd} \{1,\dots, n\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend right, "\rho \circ \sigma"'] & \{1,\dots, n\} \arrow[r, "\rho"] & V \end{tikzcd}$$

Deze samenstelling $\rho \circ \sigma$ is dan weer een n-tupel uit V. We zullen zeggen:

I.2.12 <u>Definitie</u>: Als ρ een n-tupel is uit een verzameling V en σ is een n-permutatie, dan zeggen we dat het n-tupel $\rho \circ \sigma$ uit V <u>uit</u> ρ <u>verkregen is door toepassing van</u> σ.

I.2.13 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> ρ <u>een n-tupel is uit een verzameling</u> V <u>met bijbehorend schema</u> $[v_1,\dots, v_n]$ <u>en</u> σ <u>is een n-permutatie, dan is het schema, behorend bij het n-tupel</u> $\rho \circ \sigma$ <u>uit</u> V:

$$[v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)},\dots, v_{\sigma(n)}] \; .$$

<u>Bewijs</u>: Er geldt: $\rho(1) = v_1$, $\rho(2) = v_2,\dots$, $\rho(n) = v_n$, of, anders gezegd: voor elk element $i \in \{1,\dots, n\}$ geldt:

$$\rho(i) = v_i \; .$$

Nu is $\sigma : \{1,\dots, n\} \to \{1,\dots, n\}$ een (bijectieve) afbeelding. Elk element $\sigma(i)$ is een element van $\{1,\dots, n\}$. Dus geldt:

$$\rho(\sigma(i)) = v_{\sigma(i)}$$

voor iedere $i \in \{1,\dots, n\}$. Het schema dat correspondeert met $\rho \circ \sigma$ is dus:

$$[(\rho \circ \sigma)(1),\ (\rho \circ \sigma)(2), \ldots,\ (\rho \circ \sigma)(n)] =$$

$$= [\rho(\sigma(1)),\ \rho(\sigma(2)), \ldots,\ \rho(\sigma(n))] =$$

$$= [v_{\sigma(1)},\ v_{\sigma(2)}, \ldots,\ v_{\sigma(n)}]\ ,$$

zodat de opmerking bewezen is. □

I.2.14 Voorbeeld: Beschouw een 5-tupel $[v_1,v_2,v_3,v_4,v_5]$ uit een verzameling V. Zij σ de 5-permutatie [1,5,3,2,4]. Dan is $[v_1,v_5,v_3,v_2,v_4]$ het 5-tupel uit V dat verkregen wordt uit $[v_1,v_2,v_3,v_4,v_5]$ door toepassing van σ.

Zij $[v_1,\ldots,v_n]$ het schema van een n-tupel $\rho : \{1,\ldots, n\} \to V$ uit een verzameling V. Merk op dat, als σ en τ twee verschillende n-permutaties zijn, het best kan voorkomen dat de n-tupels $\rho \circ \sigma$ en $\rho \circ \tau$ toch gelijk zijn. Bijvoorbeeld:

I.2.15 Voorbeeld: Zij ρ het 3-tupel uit $\mathbb{R}$ bij het schema $[3,3,-\sqrt{2}]$. Als σ en τ twee 3-permutaties zijn, gegeven door de schema's [1,2,3] en [2,1,3], dan is $[3,3,-\sqrt{2}]$ het schema bij zowel $\rho \circ \sigma$ als $\rho \circ \tau$. (Ga na!)

I.2.16 In I.2.9 hebben we al gezien dat de identieke afbeelding op $\{1,\ldots,n\}$ een n-permutatie is. We noemen deze de eenheids-n-permutatie. Er geldt:

I.2.17 Opmerking: Als σ_0 de eenheids-n-permutatie is, en ρ is een willekeurig n-tupel uit een verzameling V, dan is $\rho \circ \sigma_0 = \rho$.

Bewijs: We hebben de situatie:

$$\begin{tikzcd} \{1,\ldots, n\} \arrow[r, "\sigma_0"'] \arrow[rr, bend right, "\rho \circ \sigma_0"'] & \{1,\ldots, n\} \arrow[r, "\rho"'] & V \end{tikzcd}$$

Omdat σ_0 de identieke afbeelding is op $\{1,\ldots, n\}$ is volgens I.1.32 $\rho \circ \sigma_0 = \rho$. □

I.2.18 Beschouw nu twee n-permutaties σ, τ. Dit zijn beide bijectieve afbeeldingen van $\{1,\ldots, n\}$ naar $\{1,\ldots, n\}$, en - volgens I.1.33 - dus isomorphismen. Dan zijn ook de samenstellingen $\sigma \circ \tau$ en $\tau \circ \sigma$ weer isomorphismen (cf. I.1.36):

$$\begin{tikzcd} \{1,\ldots, n\} \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "\sigma \circ \tau"'] & \{1,\ldots, n\} \arrow[r, "\sigma"] & \{1,\ldots, n\} \end{tikzcd} \; ; \; \begin{tikzcd} \{1,\ldots, n\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend right, "\tau \circ \sigma"'] & \{1,\ldots, n\} \arrow[r, "\tau"] & \{1,\ldots,n\} \end{tikzcd}.$$

Dus zijn, weer volgens I.1.33, $\sigma \circ \tau$ en $\tau \circ \sigma$ bijectieve afbeeldingen van $\{1,\ldots, n\}$ naar $\{1,\ldots, n\}$ en derhalve n-permutaties.

Iets algemener kunnen we formuleren (ga na; vgl. I.1.37):

I.2.19 Opmerking: Als $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_m$ n-permutaties zijn, dan is ook $\sigma_m \circ \sigma_{m-1} \circ \ldots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ een n-permutatie.

Omdat elke n-permutatie ook een n-tupel is, volgt direkt uit I.2.17:

I.2.20 Opmerking: Als σ_0 de eenheids-n-permutatie is en σ is een willekeurige n-permutatie, dan is $\sigma \circ \sigma_0 = \sigma$.

Ook geldt:

I.2.21 Opmerking: Als σ_0 de eenheids-n-permutatie is en σ is een willekeurige n-permutatie, dan is $\sigma_0 \circ \sigma = \sigma$.

Bewijs: We hebben de situatie:

$$\begin{tikzcd} \{1,\ldots, n\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend right, "\sigma_0 \circ \sigma"'] & \{1,\ldots, n\} \arrow[r, "\sigma_0"] & \{1,\ldots, n\} \end{tikzcd} .$$

Omdat σ_0 de identieke afbeelding is op $\{1,\ldots, n\}$ is volgens I.1.32 $\sigma_0 \circ \sigma = \sigma$. $\square$

Verder kunnen we nog opmerken:

I.2.22 Opmerking: Is σ een n-permutatie en σ' de inverse n-permutatie van σ, dan is zowel $\sigma \circ \sigma'$ als $\sigma' \circ \sigma$ de eenheids-n-permutatie.

<u>Bewijs</u>: Ga na! □

I.2.23 <u>Voorbeeld</u>: Zijn σ en τ twee 7-permutaties, gegeven door de schema's [1,3,2,7,6,5,4], respectievelijk [2,4,1,3,7,5,6], dan is $\sigma \circ \tau$ gegeven door het schema:

$$[(\sigma \circ \tau)(1), \ldots, (\sigma \circ \tau)(7)] = [\sigma(\tau(1)), \ldots, \sigma(\tau(7))] =$$

$$= [\sigma(2), \sigma(4), \sigma(1), \sigma(3), \sigma(7), \sigma(5), \sigma(6)]$$

$$= [3,7,1,2,4,6,5],$$

en $\tau \circ \sigma$ is gegeven door het schema:

$$[(\tau \circ \sigma)(1), \ldots, (\tau \circ \sigma)(7)] = [\tau(\sigma(1)), \ldots, \tau(\sigma(7))] =$$

$$= [\tau(1), \tau(3), \tau(2), \tau(7), \tau(6), \tau(5), \tau(4)] =$$

$$= [2,1,4,6,5,7,3].$$

(Merk op dat $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.) De afbeelding $\tau: \{1, \ldots, 7\} \to \{1, \ldots, 7\}$ is gegeven door:

$$\tau(1) = 2,\ \tau(2) = 4,\ \tau(3) = 1,\ \tau(4) = 3,\ \tau(5) = 7,\ \tau(6) = 5,$$

$$\tau(7) = 6.$$

De inverse afbeelding $\tau^{-1}: \{1, \ldots, 7\} \to \{1, \ldots, 7\}$ wordt dus:

$$\tau^{-1}(1) = 3,\ \tau^{-1}(2) = 1,\ \tau^{-1}(3) = 4,\ \tau^{-1}(4) = 2,\ \tau^{-1}(5) = 6,$$

$$\tau^{-1}(6) = 7,\ \tau^{-1}(7) = 5,$$

zodat de inverse 7-permutatie τ^{-1} van τ wordt bepaald door het schema [3,1,4,2,6,7,5].

Beschouw nu de n-permutatie [1,2,3,...,n] (dus: de eenheids-n-permutatie). Kies twee verschillende getallen $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Vervang nu in het schema $[1,2,3,\dots,n]$ het getal i door het getal j en het getal j door het getal i. We verkrijgen dan een nieuw schema $[k_1,k_2,\dots,k_n]$ dat gegeven is door de definitie:

$$\begin{cases} k_s = s & \text{voor elke } s \in \{1,\dots,n\} \text{ met } s \neq i \text{ en } s \neq j, \\ k_i = j, \\ k_j = i. \end{cases}$$

Omdat in dit nieuwe schema $[k_1,k_2,\dots,k_n]$ de getallen $1,\dots,n$ nog steeds elk precies één keer voorkomen, is dit schema het schema van een n-permutatie die we aangeven met:

$$\tau_{i,j}^{(n)} : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} .$$

(De index n geeft aan dat dit een n-permutatie is; de verschillende getallen i en j uit $\{1,\dots,n\}$ geven aan welke getallen in $[1,2,3,\dots,n]$ dienen te worden verwisseld om het bij $\tau_{i,j}^{(n)}$ behorende schema $[k_1,\dots,k_n]$ te verkrijgen.)

Om redenen van gemak definiëren we vervolgens voor elke $i \in \{1,\dots,n\}$ dat $\tau_{i,i}^{(n)}$ de eenheids-n-permutatie is. Samenvattend:

I.2.24 Definitie: Als i en j elementen van $\{1,\dots,n\}$ zijn, dan is

$$\tau_{i,j}^{(n)} : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$$

de n-permutatie met als schema $[k_1,k_2,\dots,k_n]$ dat gegeven is door:

$$\begin{cases} k_s = s & \text{voor elke } s \in \{1,\dots,n\} \text{ met } s \neq i \text{ en } s \neq j, \\ k_i = j, \\ k_j = i. \end{cases}$$

Er geldt:

I.2.25 Opmerking: Voor elke $i,j \in \{1,\dots,n\}$ geldt:

(i) $\tau_{i,i}^{(n)}$ is de eenheids-n-permutatie;

(ii) $$\tau^{(n)}_{i,j} = \tau^{(n)}_{j,i}.$$

Bewijs: Ga na! □

I.2.26 Definitie: We zullen een n-permutatie van het type $\tau^{(n)}_{i,j}$ een verwisseling noemen als $i \neq j$.

I.2.27 Voorbeeld:

$$\tau^{(5)}_{2,3} = [1,3,2,4,5] \quad ; \quad \tau^{(5)}_{1,4} = [4,2,3,1,5] \quad ;$$

$$\tau^{(5)}_{2,2} = [1,2,3,4,5] \quad ; \quad \tau^{(5)}_{4,1} = [4,2,3,1,5] \quad ;$$

$$\tau^{(12)}_{6,11} = [1,2,3,4,5,11,7,8,9,10,6,12].$$

I.2.28 Opmerking: Zij $\rho : \{1,\ldots,n\} \to V$ een n-tupel uit een verzameling V, met schema $[v_1,v_2,\ldots,v_n]$. Zij $\tau^{(n)}_{i,j}$ een verwisseling. Dan ontstaat het schema $[w_1,w_2,\ldots,w_n]$ van het n-tupel $\rho \circ \tau^{(n)}_{i,j}$ uit V uit $[v_1,v_2,\ldots,v_n]$ door v_i en v_j onderling van plaats te verwisselen.

Bewijs: Noteer kortheidshalve: $\tau = \tau^{(n)}_{i,j}$. Volgens I.2.13 wordt het schema van $\rho \circ \tau = \rho \circ \tau^{(n)}_{i,j}$ dan gegeven door:

$$[v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, \ldots, v_{\tau(n)}]$$

Omdat $\tau(s) = s$ als $s \neq i$ en $s \neq j$, $\tau(i) = j$ en $\tau(j) = i$, is dit precies het schema dat uit $[v_1,\ldots, v_n]$ ontstaat door v_i en v_j onderling van plaats te verwisselen. □

I.2.29 Voorbeeld: Als ρ het 5-tupel $[1,1,3,-1,2]$ uit $\mathbb{Z}$ is, dan is het schema van $\rho \circ \tau^{(5)}_{1,4}$: $[-1,1,3,1,2]$, en het schema van $\rho \circ \tau^{(5)}_{1,2}$: $[1,1,3,-1,2]$.

I.2.30 Opmerking: Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ en elk tweetal elementen i,j uit $\{1,\ldots,n\}$ geldt dat $\tau^{(n)}_{i,j} \circ \tau^{(n)}_{i,j}$ de eenheids-n-permutatie is.

Bewijs: Het schema $[k_1,\dots, k_n]$ van $\tau_{i,j}^{(n)}$ ontstaat uit $[1,2,\dots,n]$ door i en j onderling van plaats te verwisselen. Als we nu $\tau_{i,j}^{(n)}$ op $\tau_{i,j}^{(n)}$ toepassen, dan verkrijgen we het schema van $\tau_{i,j}^{(n)} \circ \tau_{i,j}^{(n)}$ door in $[k_1,\dots,k_n]$ k_i en k_j onderling van plaats te verwisselen. Maar dan hebben we het schema $[1,2,\dots,n]$ van de eenheids-n-permutatie weer terug. Dus is $\tau_{i,j}^{(n)} \circ \tau_{i,j}^{(n)}$ de eenheids-n-permutatie. □

I.2.31 Gevolg: Voor elke $n \geq 2$ en elke $i,j \in \{1,\dots,n\}$ geldt:

$$(\tau_{i,j}^{(n)})^{-1} = \tau_{i,j}^{(n)} .$$

Bewijs: Uit I.2.30 volgt: $\tau_{i,j}^{(n)} \circ \tau_{i,j}^{(n)} = id_{\{1,\dots,n\}}$:

$$\begin{tikzcd} \{1,\dots,n\} \arrow[r, "\tau_{i,j}^{(n)}"'] \arrow[rr, bend right, "id_{\{1,\dots,n\}}"'] & \{1,\dots,n\} \arrow[r, "\tau_{i,j}^{(n)}"'] & \{1,\dots,n\}. \end{tikzcd}$$

Omdat $\tau_{i,j}^{(n)}$ een automorphisme is van $\{1,\dots,n\}$ (cf. I.1.39) volgt uit I.1.40 dat $(\tau_{i,j}^{(n)})^{-1} = \tau_{i,j}^{(n)}$. □

I.2.32 Opmerking: Als σ en τ twee n-permutaties zijn, zodat $\sigma \circ \tau$ de eenheids-n-permutatie σ_0 is, dan is $\sigma = \tau^{-1}$ en $\tau = \sigma^{-1}$.

Bewijs: We hebben de situatie:

$$\begin{tikzcd} \{1,\dots,n\} \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "\sigma \circ \tau = \sigma_0 = id_{\{1,\dots,n\}}"'] & \{1,\dots,n\} \arrow[r, "\sigma"] & \{1,\dots,n\}. \end{tikzcd}$$

Omdat zowel τ als σ een automorphisme is van $\{1,\dots,n\}$ volgt uit I.1.40 dat $\sigma = \tau^{-1}$ en uit I.1.41 dat $\tau = \sigma^{-1}$, zodat de opmerking bewezen is. □

I.2.33 Opmerking: Als $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ een m-tal n-permutaties is, dan geldt:

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_m)^{-1} = \sigma_m^{-1} \circ \sigma_{m-1}^{-1} \circ \dots \circ \sigma_1^{-1}.$$

Bewijs: Dit volgt rechtstreeks uit I.1.37. □

I.2.34 <u>Stelling</u>: <u>Als</u> $n \geq 2$, <u>dan bestaan er voor iedere n-permutatie</u> σ <u>verwisselingen</u> $\tau_1, \ldots, \tau_s$ <u>zodat</u> $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_s$.

<u>Bewijs</u>: Zij $[k_1, \ldots, k_n]$ het schema van σ. In dit schema komen de getallen $1, 2, \ldots, n$ elk precies één keer voor. Er is dus een index i_1 zodat

$$k_{i_1} = 1.$$

Pas nu de n-permutatie $\tau^{(n)}_{1,i_1}$ toe op σ. We krijgen de n-permutatie $\sigma \circ \tau^{(n)}_{1,i_1}$. Het schema van deze n-permutatie verkrijgen we uit $[k_1, \ldots, k_n]$ door k_1 te verwisselen van plaats met k_{i_1} (als $1 = i_1$ is $\tau^{(n)}_{1,i_1}$ de eenheids-n-permutatie, en is $\sigma \circ \tau^{(n)}_{1,i_1} = \sigma$). Het schema van $\sigma \circ \tau^{(n)}_{1,i_1}$ heeft dus $k_{i_1} = 1$ op de eerste plaats staan, en heeft dus de vorm

$$[1, k_2^{(1)}, \ldots, k_n^{(1)}].$$

In dit schema komen de getallen $1, 2, \ldots, n$ precies één keer voor, zodat er een index $i_2 \in \{2, \ldots, n\}$ bestaat met

$$k_{i_2}^{(1)} = 2.$$

Pas nu de n-permutatie $\tau^{(n)}_{2,i_2}$ toe op $\sigma \circ \tau^{(n)}_{1,i_1}$. We krijgen dan de n-permutatie $\sigma \circ \tau^{(n)}_{1,i_1} \circ \tau^{(n)}_{2,i_2}$, met bijbehorend schema dat uit

$$[1, k_2^{(1)}, \ldots, k_n^{(1)}]$$

ontstaat door $k_2^{(1)}$ met $k_{i_2}^{(1)} = 2$ onderling van plaats te verwisselen. Dit schema heeft dus de vorm

$$[1, 2, k_3^{(2)}, \ldots, k_n^{(2)}].$$

Ook in dit schema komen de getallen $1, \ldots, n$ precies één keer voor, zodat er een index i_3 bestaat met

$$k_{i_3}^{(2)} = 3.$$

Pas nu $\tau^{(n)}_{3,i_3}$ toe op $\sigma \circ \tau^{(n)}_{1,i_1} \circ \tau^{(n)}_{2,i_2}$. We krijgen de n-permutatie

$$\sigma \circ \tau^{(n)}_{1,i_1} \circ \tau^{(n)}_{2,i_2} \circ \tau^{(n)}_{3,i_3}$$

met bijbehorend schema van de vorm $[1,2,3,k^{(3)}_4,\dots,k^{(3)}_n]$.
Zo doorgaand vinden we uiteindelijk n-permutaties

$$\tau^{(n)}_{1,i_1},\ \tau^{(n)}_{2,i_2},\dots,\ \tau^{(n)}_{n,i_n}$$

zodanig dat de n-permutatie

$$\sigma \circ \tau^{(n)}_{1,i_1} \circ \tau^{(n)}_{2,i_2} \circ \dots \circ \tau^{(n)}_{n,i_n}$$

het schema $[1,2,\dots,n]$ heeft, en dus de eenheids-n-permutatie σ_0 is:

$$\sigma \circ (\tau^{(n)}_{1,i_1} \circ \tau^{(n)}_{2,i_2} \circ \dots \circ \tau^{(n)}_{n,i_n}) = \sigma_0.$$

Volgens I.2.32 is dan:

$$\sigma = (\tau^{(n)}_{1,i_1} \circ \tau^{(n)}_{2,i_2} \circ \dots \circ \tau^{(n)}_{n,i_n})^{-1}.$$

Met I.2.33 volgt hieruit:

$$\sigma = (\tau^{(n)}_{n,i_n})^{-1} \circ \dots \circ (\tau^{(n)}_{2,i_2})^{-1} \circ (\tau^{(n)}_{1,i_1})^{-1}.$$

Met I.2.31 kunnen we hieruit concluderen:

$$\sigma = \tau^{(n)}_{n,i_n} \circ \dots \circ \tau^{(n)}_{2,i_2} \circ \tau^{(n)}_{1,i_1} \qquad (*)$$

Als voor zekere $k \in \{1,\dots,n\}$ $\tau^{(n)}_{k,i_k}$ geen verwisseling is, dan is $k = i_k$ en $\tau^{(n)}_{k,i_k} = \tau^{(n)}_{k,k} = \sigma_0$, de eenheids-n-permutatie. Volgens I.2.30 kunnen we deze schrijven in de vorm:

$$\tau^{(n)}_{k,i_k} = \sigma_0 = \tau^{(n)}_{1,2} \circ \tau^{(n)}_{1,2}.$$

Dus elke $\tau^{(n)}_{k,i_k}$ uit $(*)$ die geen verwisseling is, kunnen we vervangen door een samenstelling van twee verwisselingen. Derhalve is σ te schrijven als samenstelling van verwisselingen, zodat de stelling bewezen is. □

I.2.35 Voorbeeld: Beschouw de 8-permutatie σ, die correspondeert met het schema [3,5,8,1,2,7,4,6]. Het getal 1 staat op de vierde plaats. Om 1 op de eerste plaats te krijgen passen we de verwisseling $\tau^{(8)}_{1,4}$ toe. We krijgen de 8-permutatie $\sigma \circ \tau^{(8)}_{1,4}$ met schema [1,5,8,3,2,7,4,6]. Het getal 2 staat op de vijfde plaats in dit schema. Pas dus $\tau^{(8)}_{2,5}$ toe op $\sigma \circ \tau^{(8)}_{1,4}$. We krijgen de 8-permutatie

$$\sigma \circ \tau^{(8)}_{1,4} \circ \tau^{(8)}_{2,5} \quad \text{met schema} \quad [1,2,8,3,5,7,4,6].$$

Het getal 3 staat in dit nieuwe schema op de vierde plaats. Pas dus $\tau^{(8)}_{3,4}$ toe. We krijgen:

$$\sigma \circ \tau^{(8)}_{1,4} \circ \tau^{(8)}_{2,5} \circ \tau^{(8)}_{3,4} \quad \text{met schema} \quad [1,2,3,8,5,7,4,6].$$

Het getal 4 staat in dit schema op de zevende plaats. Pas dus $\tau^{(8)}_{4,7}$ toe. We vinden dan:

$$\sigma \circ \tau^{(8)}_{1,4} \circ \tau^{(8)}_{2,5} \circ \tau^{(8)}_{3,4} \circ \tau^{(8)}_{4,7} \text{ met schema } [1,2,3,4,5,7,8,6].$$

Het getal 5 staat al op de vijfde plaats; die kunnen we dus laten staan. Het getal 6 staat op de achtste plaats zodat we, om 6 op de zesde plaats te brengen, de verwisseling $\tau^{(8)}_{6,8}$ toepassen. We krijgen:

$$\sigma \circ \tau^{(8)}_{1,4} \circ \tau^{(8)}_{2,5} \circ \tau^{(8)}_{3,4} \circ \tau^{(8)}_{4,7} \circ \tau^{(8)}_{6,8} \text{ met schema } [1,2,3,4,5,6,8,7].$$

Tot slot passen we $\tau^{(8)}_{7,8}$ toe en we vinden:

$$\sigma \circ \tau^{(8)}_{1,4} \circ \tau^{(8)}_{2,5} \circ \tau^{(8)}_{3,4} \circ \tau^{(8)}_{4,7} \circ \tau^{(8)}_{6,8} \circ \tau^{(8)}_{7,8} \text{ met schema } [1,2,3,4,5,6,7,8].$$

Deze 8-permutatie is dus de eenheids-8-permutatie, zodat

$$\begin{aligned}\sigma &= (\tau^{(8)}_{1,4} \circ \tau^{(8)}_{2,5} \circ \tau^{(8)}_{3,4} \circ \tau^{(8)}_{4,7} \circ \tau^{(8)}_{6,8} \circ \tau^{(8)}_{7,8})^{-1} = \\ &= (\tau^{(8)}_{7,8})^{-1} \circ (\tau^{(8)}_{6,8})^{-1} \circ (\tau^{(8)}_{4,7})^{-1} \circ (\tau^{(8)}_{3,4})^{-1} \circ (\tau^{(8)}_{2,5})^{-1} \circ (\tau^{(8)}_{1,4})^{-1} = \\ &= \tau^{(8)}_{7,8} \circ \tau^{(8)}_{6,8} \circ \tau^{(8)}_{4,7} \circ \tau^{(8)}_{3,4} \circ \tau^{(8)}_{2,5} \circ \tau^{(8)}_{1,4} \,.\end{aligned}$$

Hiermee is σ als samenstelling van verwisselingen verkregen.

I.2.36 Definitie: Zij σ een n-permutatie ($n \geq 2$). Als $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ met $i \neq j$, dan heet de verzameling $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ een inversie van σ als geldt:

$$(i - j)(\sigma(i) - \sigma(j)) < 0.$$

Merk op, dat als σ een n-permutatie is ($n \geq 2$) met schema $[k_1,\ldots,k_n]$, de inversies van σ die uit twee elementen bestaan de verzamelingen $\{k_i, k_j\}$ zijn met $i < j$ (resp. $i > j$) en $k_i > k_j$ (resp. $i < j$). Let wel: een inversie is een verzameling, dus $\{k_i, k_j\} = \{k_j, k_i\}$. De inversies van σ zijn dus die verzamelingen $\{k_i, k_j\}$ waarbij k_i in het schema van σ voorafgaat aan k_j, terwijl $k_i > k_j$.

I.2.37 Voorbeeld: Beschouw de 7-permutatie $[7,2,4,1,3,6,5]$. Deze heeft de volgende inversies: $\{7,2\}$, $\{7,4\}$, $\{7,1\}$, $\{7,3\}$, $\{7,6\}$, $\{7,5\}$, $\{2,1\}$, $\{4,1\}$, $\{4,3\}$ en $\{6,5\}$. In totaal zijn dit er 10.

I.2.38 Opmerking: De eenheids-n-permutatie ($n \geq 2$) heeft geen inversies.

Bewijs: Ga na! □

I.2.39 Definitie: Als σ een n-permutatie is ($n \geq 2$) met schema $[k_1,\ldots,k_n]$ dan noteren we het aantal inversies van σ met $N(\sigma)$ of $N[k_1,\ldots,k_n]$.

I.2.40 Voorbeeld: $N[1,2,3,4] = 0$; $N[7,2,4,1,3,6,5] = 10$ (cf. I.2.37).

I.2.41 Definitie: Als σ een n-permutatie is ($n \geq 2$) met schema $[k_1,\ldots,k_n]$, dan noteren we:

$$\text{sign}(\sigma) = \text{sign}[k_1,\ldots,k_n] = (-1)^{N(\sigma)}.$$

We noemen $(-1)^{N(\sigma)}$ het teken van σ. Is $\text{sign}(\sigma) = +1$ dan heet σ een even permutatie; is $\text{sign}(\sigma) = -1$ dan heet σ een oneven permutatie.

I.2.42 Voorbeeld: Volgens I.2.40 is $[7,2,4,1,3,6,5]$ een even permutatie, want:

$$\mathrm{sign}[7,2,4,1,3,6,5] = (-1)^{N[7,2,4,1,3,6,5]} = (-1)^{10} = +1.$$

I.2.43 Propositie: Zij σ een n-permutatie ($n \geq 2$) en τ een verwisseling, dan is:

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = - \mathrm{sign}(\sigma).$$

Bewijs: Zij $\tau = \tau_{i,j}^{(n)}$. Wegens $\tau_{i,j}^{(n)} = \tau_{j,i}^{(n)}$ mogen we veronderstellen dat $i < j$ is. Het schema van σ is $[\sigma(1),\dots, \sigma(n)]$. We gaan eerst de verzamelingen $\{\sigma(\alpha), \sigma(\beta)\}$ die uit twee in het schema van σ voorkomende elementen bestaan in drie typen verdelen:

(1) De verzamelingen $\{\sigma(\alpha), \sigma(\beta)\}$ met $\alpha \neq i$, $\alpha \neq j$, $\beta \neq i$, $\beta \neq j$.

(2) De verzamelingen van één der vormen $\{\sigma(i), \sigma(\beta)\}$, $\{\sigma(j), \sigma(\beta)\}$ ($\beta \neq i,j$).

(3) De verzameling $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$.

We hebben zo al deze verzamelingen ingedeeld. We verdelen vervolgens de verzamelingen van type (2) in paren van de gedaante:

$$(\{\sigma(i), \sigma(\beta)\}, \{\sigma(j), \sigma(\beta)\}) \qquad (\beta \neq i,j) \qquad (*)$$

(Er zijn dus $n - 2$ van deze paren). Er geldt:

Bewering I: Als $\beta \neq i,j$ dan komt in het paar verzamelingen (*) één inversie voor dan en slechts dan als geldt:

$$(i - \beta)(j - \beta)(\sigma(i) - \sigma(\beta))(\sigma(j) - \sigma(\beta)) < 0 \qquad (\beta \neq i,j) \qquad (**)$$

(Immers, als in het paar (*) één inversie voorkomt, dan is één der produkten $(i - \beta)(\sigma(i) - \sigma(\beta))$ en $(j - \beta)(\sigma(j) - \sigma(\beta))$ negatief en het andere positief. Hieruit volgt (**). Omgekeerd, als (**) geldt, dan is precies één der hiervoor genoemde produkten negatief en het andere positief, zodat in (*) één inversie voorkomt.)

Noteer nu:

$M(1)$ is het aantal inversies onder de verzamelingen van type (1).
$M_0(2)$ is het aantal paren (*) waarin geen inversies voorkomen.
$M_1(2)$ is het aantal paren (*) waarin één inversie voorkomt.
$M_2(2)$ is het aantal paren (*) waarin twee inversies voorkomen.

Dan is $N(\sigma) = M(1) + M_1(2) + 2M_2(2) + 1$ als $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ een inversie is van σ; als $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ geen inversie is van σ, dan is $N(\sigma) = M(1) + M_1(2) + 2M_2(2)$.

We gaan nu de verzamelingen $\{\sigma(\tau(\alpha)), \sigma(\tau(\beta))\}$ die uit twee in het schema $[\sigma(\tau(1)),\ldots, \sigma(\tau(n))]$ van $\sigma \circ \tau$ voorkomende elementen bestaan op analoge manier in drie typen indelen:

(a) De verzamelingen $\{\sigma(\tau(\alpha)), \sigma(\tau(\beta))\}$ met $\alpha \neq i$, $\alpha \neq j$, $\beta \neq i$, $\beta \neq j$.
(b) De verzamelingen van één der vormen $\{\sigma(\tau(i)), \sigma(\tau(\beta))\}$, $\{\sigma(\tau(j)), \sigma(\tau(\beta))\}$ $(\beta \neq i,j)$.
(c) De verzameling $\{\sigma(\tau(i)), \sigma(\tau(j))\}$.

We verdelen de verzamelingen van type (b) weer in paren van de vorm:

(***)

en er geldt - geheel analoog aan bewering I -:

Bewering II: Als $\beta \neq i,j$, dan komt in het paar verzamelingen (***) één inversie voor dan en slechts dan als geldt:

$$(i - \beta)(j - \beta)\big(\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(\beta))\big)\big(\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(\beta))\big) < 0.$$

Noteer weer:

$N(a)$ is het aantal inversies onder de verzamelingen van type (a).
$N_0(b)$ is het aantal paren (***) waarin geen inversies voorkomen.

$N_1(b)$ is het aantal paren (***) waarin één inversie voorkomt.
$N_2(b)$ is het aantal paren (***) waarin twee inversies voorkomen.

Dus is $N(\sigma \circ \tau) = N(a) + N_1(b) + 2N_2(b) + 1$ als $\{\sigma(\tau(i)), \sigma(\tau(j))\}$ een inversie is van $\sigma \circ \tau$, terwijl $N(\sigma \circ \tau) = N(a) + N_1(b) + 2N_2(b)$ als verzameling (c) geen inversie is van $\sigma \circ \tau$.

Er geldt nu:

<u>Bewering III</u>:
(i) $M(1) = N(a)$
(ii) $M_1(2) = N_1(b)$
(iii) $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ <u>is een inversie van</u> σ <u>dan en slechts dan als</u> $\{\sigma(\tau(i)), \sigma(\tau(j))\}$ <u>geen inversie is van</u> $\sigma \circ \tau$.

<u>Bewijs (i)</u>: Het is voldoende om te laten zien dat als $\alpha \neq i$, $\alpha \neq j$, $\beta \neq i$, $\beta \neq j$ geldt dat $\{\sigma(\alpha), \sigma(\beta)\}$ een inversie is van σ dan en slechts dan als $\{\sigma(\tau(\alpha)), \sigma(\tau(\beta))\}$ een inversie is van $\sigma \circ \tau$. Met andere woorden: we moeten laten zien dat $(\alpha - \beta)(\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)) < 0$ is dan en slechts dan als $(\alpha - \beta)\big(\sigma(\tau(\alpha)) - \sigma(\tau(\beta))\big) < 0$.
Nu is, omdat $\alpha \neq i,j$ en $\beta \neq i,j$, $\tau(\alpha) = \tau^{(n)}_{i,j}(\alpha) = \alpha$ en $\tau(\beta) = \tau^{(n)}_{i,j}(\beta) = \beta$ zodat $(\alpha - \beta)\big(\sigma(\tau(\alpha)) - \sigma(\tau(\beta))\big) = (\alpha - \beta)(\sigma(\alpha) - \sigma(\beta))$. Dus is (i) bewezen.

<u>Bewijs (ii)</u>: We moeten laten zien dat het aantal paren (*) waarin precies één inversie voorkomt gelijk is aan het aantal paren (***) waarin precies één inversie voorkomt. Het is dus voldoende om te laten zien dat in een paar

$$(\{\sigma(i),\sigma(\beta)\} \ , \ \{\sigma(j),\sigma(\beta)\}) \qquad (\beta \neq i,j)$$

precies één inversie voorkomt dan en slechts dan als in het paar

$$(\{\sigma(\tau(i)),\sigma(\tau(\beta))\} \ , \ \{\sigma(\tau(j)),\sigma(\tau(\beta))\}) \qquad (\beta \neq i,j)$$

precies één inversie voorkomt. Volgens de beweringen I en II betekent dit dat we moeten bewijzen dat $(i - \beta)(j - \beta)(\sigma(i) - \sigma(\beta))(\sigma(j) - \sigma(\beta)) < 0$ is dan en slechts dan als $(i - \beta)(j - \beta)\big(\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(\beta))\big)\big(\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(\beta))\big) < 0$. Nu is $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ en $\tau(\beta) = \beta$ als $\beta \neq i,j$. We hebben dus

$$(i - \beta)(j - \beta)\{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(\beta))\}\{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(\beta))\} =$$

$$= (i - \beta)(j - \beta)(\sigma(i) - \sigma(\beta))(\sigma(j) - \sigma(\beta))$$

zodat ook (ii) bewezen is.

Bewijs (iii): We moeten laten zien dat $(i - j)(\sigma(i) - \sigma(j)) < 0$ is, dan en slechts dan als $(i - j)\{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))\} > 0$. Dit volgt rechtstreeks uit:

$$(i - j)\{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))\} = (i - j)(\sigma(j) - \sigma(i)) =$$

$$= - (i - j)(\sigma(i) - \sigma(j)). \square$$

We zijn nu in staat de propositie (blz. 32) te bewijzen:

Neem eerst aan dat $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ een inversie is van σ. Dan geldt, zoals we al hebben opgemerkt: $N(\sigma) = M(1) + M_1(2) + 2M_2(2) + 1$. Ook is, volgens III(iii), $\{\sigma(\tau(i)), \sigma(\tau(j))\}$ geen inversie van $\sigma \circ \tau$, zodat ook geldt: $N(\sigma \circ \tau) = N(a) + N_1(b) + 2N_2(b)$. Bijgevolg is (gebruik makend van III(i) en III(ii)):

$$N(\sigma) - N(\sigma \circ \tau) =$$

$$= (M(1) - N(a)) + (M_1(2) - N_1(b)) + 2(M_2(2) - N_2(b)) + 1 =$$

$$= 2(M_2(2) - N_2(b)) + 1.$$

Hieruit volgt dat $N(\sigma) - N(\sigma \circ \tau)$, als $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ een inversie is van σ, een oneven geheel getal is.

Analoog vinden we, als we aannemen dat $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ geen inversie van σ is en, volgens III(iii), $\{\sigma(\tau(i)), \sigma(\tau(j))\}$ wel een inversie is van $\sigma \circ \tau$:

$$N(\sigma) - N(\sigma \circ \tau) =$$

$$= (M(1) - N(a)) + (M_1(2) - N_1(b)) + 2(M_2(2) - N_2(b)) - 1 =$$

$$= 2(M_2(2) - N_2(b)) - 1$$

en ook dit is een oneven geheel getal.

We zien dus dat in alle gevallen $N(\sigma) - N(\sigma \circ \tau)$ een oneven geheel getal is, zodat

$$(-1)^{N(\sigma) - N(\sigma \circ \tau)} = -1.$$

Bijgevolg:

$$\frac{\mathrm{sign}(\sigma)}{\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau)} = \frac{(-1)^{N(\sigma)}}{(-1)^{N(\sigma \circ \tau)}} = (-1)^{N(\sigma) - N(\sigma \circ \tau)} = -1$$

oftewel:

$$\mathrm{sign}(\sigma) = -\ \mathrm{sign}(\sigma \circ \tau)$$

waarmee de propositie bewezen is. □

I.2.44 <u>Gevolg</u>: <u>Elke verwisseling is een oneven permutatie</u>.

<u>Bewijs</u>: Zij $\tau = \tau_{i,j}^{(n)}$ een verwisseling en σ_0 de eenheids-n-permutatie. Uit I.2.38 volgt: $N(\sigma_0) = 0$ zodat $\mathrm{sign}(\sigma_0) = +1$. Nu is ook $\sigma_0 \circ \tau = \tau$ zodat volgt, gebruik makend van I.2.43:

$$\mathrm{sign}(\tau) = \mathrm{sign}(\sigma_0 \circ \tau) = -\ \mathrm{sign}(\sigma_0) = -1$$

waaruit de bewering volgt. □

I.2.45 <u>Gevolg</u>: <u>Als de n-permutaties</u> $\tau_1, \ldots, \tau_m$ <u>alle verwisselingen zijn, dan is</u>:

$$\mathrm{sign}(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_m) = (-1)^m.$$

<u>Bewijs</u>: (Volledige inductie naar m.) We bewijzen de bewering eerst in het geval $m = 1$. Dat wil zeggen: we moeten bewijzen dat als τ_1 een verwisseling is, $\mathrm{sign}(\tau_1) = (-1)^1 = -1$. Dit is precies I.2.44.

Stel nu dat de bewering geldt voor $m = k$. Dus, neem aan dat voor ieder k-tal verwisselingen $\tau_1, \ldots, \tau_k$ geldt: $\mathrm{sign}(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k) = (-1)^k$. We moeten dan bewijzen dat de bewering geldt voor $m = k + 1$. Kies dus $k + 1$

n-permutaties $\tau_1, \ldots, \tau_k, \tau_{k+1}$ die alle verwisselingen zijn. We moeten dan bewijzen dat $\mathrm{sign}(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_{k+1}) = (-1)^{k+1}$. We weten dat $\mathrm{sign}(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k) = (-1)^k$. Volgens I.2.43 geldt nu:

$$\mathrm{sign}(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k \circ \tau_{k+1}) = \mathrm{sign}((\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k) \circ \tau_{k+1}) =$$

$$= - \mathrm{sign}(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k) = - (-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Hiermee is I.2.45 bewezen. □

I.2.46 Stelling: Zij $n \geq 2$. Voor elk tweetal n-permutaties σ en σ' geldt:

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \sigma') = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\sigma') \ .$$

Bewijs: Volgens stelling I.2.34 kunnen we verwisselingen $\tau_1, \ldots, \tau_s$ en verwisselingen $\tau_1', \ldots, \tau_t'$ vinden zodat

$$\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_s \qquad ; \qquad \sigma' = \tau_1' \circ \ldots \circ \tau_t' \ .$$

Dan is $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^s$ en $\mathrm{sign}(\sigma') = (-1)^t$ (cf. I.2.45). Dus:

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \sigma') = \mathrm{sign}(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_s \circ \tau_1' \circ \ldots \circ \tau_t') = (-1)^{s+t} =$$

$$= (-1)^s \cdot (-1)^t = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\sigma'),$$

zodat de stelling bewezen is. □

I.2.47 Merk op dat, als σ en σ' twee n-permutaties zijn, $\sigma \circ \sigma'$ en $\sigma' \circ \sigma$ verschillend kunnen zijn, maar $\mathrm{sign}(\sigma \circ \sigma')$ en $\mathrm{sign}(\sigma' \circ \sigma)$ altijd gelijk zijn. Immers, $\mathrm{sign}(\sigma \circ \sigma') = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\sigma') = \mathrm{sign}(\sigma') \cdot \mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma' \circ \sigma)$.

* * *

§I.3. Matrices: combinatorische aspecten

I.3.1. Beschouw de verzameling $\mathbb{R} \mathbin{\Pi} \mathbb{R}$ (cf. I.1.5 en I.1.43). Deze verzameling heeft als elementen de geordende paren (x, y) waarin x en y reële getallen zijn.

I.3.2 Definitie: Het $(m \times n)$-rooster is de deelverzameling

$$\{(x, y) \mid x \in \{1,\ldots,m\},\ y \in \{1,\ldots,n\}\}$$

van $\mathbb{R} \mathbin{\Pi} \mathbb{R}$. Deze deelverzameling noteren we met $\mathcal{R}_{m,n}$.

I.3.3 Vaak geven we $\mathcal{R}_{m,n}$ als volgt schematisch aan:

$$\left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,n) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots & (3,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m,1) & (m,2) & (m,3) & \ldots & (m,n) \end{matrix}\right\}$$

waarbij de plaatsen van de elementen van $\mathcal{R}_{m,n}$ in deze notatiewijze voor eens en voor altijd zoals hierboven aangegeven is, zijn afgesproken!

I.3.4 Voorbeeld:

$$\mathcal{R}_{3,5} = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) \end{matrix}\right\} \quad ;$$

$$\mathcal{R}_{5,3} = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) \end{matrix}\right\} \quad ; \qquad \mathcal{R}_{3,1} = \left\{\begin{matrix} (1,1) \\ (2,1) \\ (3,1) \end{matrix}\right\} \quad ;$$

$$\mathcal{R}_{1,1} = \{(1,1)\} \quad ; \qquad \mathcal{R}_{1,3} = \{(1,1) \quad (1,2) \quad (1,3)\} \quad .$$

Merk op dat $R_{m,n}$ m·n elementen heeft. Denkend aan de in I.3.3 ingevoerde notatiewijze voor $R_{m,n}$ zal de volgende terminologie voor zichzelf spreken.

I.3.5 <u>Definitie</u>: Als $i \in \{1,\ldots,m\}$, dan heet het n-tupel $[(i,1), (i,2),\ldots, (i,n)]$ uit $R_{m,n}$ de <u>i-de rij van</u> $R_{m,n}$. De elementen $(i,1), (i,2),\ldots, (i,n)$ heten <u>de elementen op de i-de rij van</u> $R_{m,n}$.

I.3.6 <u>Definitie</u>: Als $j \in \{1,\ldots,n\}$, dan heet het m-tupel $[(1,j), (2,j),\ldots, (m,j)]$ uit $R_{m,n}$ de <u>j-de kolom van</u> $R_{m,n}$. De elementen $(1,j), (2,j),\ldots, (m,j)$ heten <u>de elementen op de j-de kolom van</u> $R_{m,n}$.

$R_{m,n}$ heeft dus m rijen en n kolommen; (i,j) is het element van $R_{m,n}$ op de i-de rij en de j-de kolom.

I.3.7 <u>Definitie</u>: Een $(m \times n)$-rooster $R_{m,n}$ heet <u>vierkant</u> als $m = n$.

I.3.8 <u>Definitie</u>: Het n-tupel $[(1,1), (2,2),\ldots, (n,n)]$ van het vierkante $(n \times n)$-rooster $R_{n,n}$ heet <u>de hoofddiagonaal van</u> $R_{n,n}$. De elementen $(1,1), (2,2),\ldots, (n,n)$ heten <u>de elementen op de hoofddiagonaal van</u> $R_{n,n}$.

Beschouw nu een $(m \times n)$-rooster $R_{m,n}$, en een afbeelding

$$f : R_{m,n} \to V$$

van $R_{m,n}$ naar een verzameling V. We kunnen f dan beschrijven met het schema

$$\begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & f(1,3) & \ldots & f(1,n) \\ f(2,1) & f(2,2) & f(2,3) & \ldots & f(2,n) \\ f(3,1) & f(3,2) & f(3,3) & \ldots & f(3,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(m,1) & f(m,2) & f(m,3) & \ldots & f(m,n) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

I.3.9 <u>Definitie</u>: Zij V een verzameling en m,n een tweetal natuurlijke getallen (≥ 1). Een <u>$(m \times n)$-matrix uit</u> V is een afbeelding $f : R_{m,n} \to V$ van het $(m \times n)$-rooster $R_{m,n}$ naar de verzameling V.

Als $f : R_{m,n} \to V$ een $(m \times n)$-matrix uit V is, dan zullen we het bijbehorend schema (*) van f ook vaak een $(m \times n)$-matrix uit V noemen. Het is duidelijk dat -als we een rechthoekig schema van de vorm

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & v_{m3} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

kiezen, waarin alle optredende elementen bevat zijn in V- zo'n schema een wel-bepaalde afbeelding $f : R_{m,n} \to V$ definieert, n.l. door:

$$f(i,j) = v_{ij} \qquad (i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,n\}).$$

We spreken dus zowel over: "de $(m \times n)$-matrix $f : R_{m,n} \to V$" als over: "de $(m \times n)$-matrix

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & v_{m3} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \text{"}.$$

Merk nog op dat we in (**) "ronde" haken gebruiken. Dit om duidelijk te maken in de notatie dat het schema (**) <u>geen</u> verzameling is: er kunnen best op verschillende plaatsen in het schema dezelfde elementen van V voorkomen!

Denkend aan de notatiewijze (*) voor een $(m \times n)$-matrix voeren we voor matrices een terminologie in, analoog aan die voor de $(m \times n)$-roosters:

I.3.10 <u>Definitie</u>: Zij $f : R_{m,n} \to V$ een $(m \times n)$-matrix uit een verzameling V. Voor $i \in \{1,\dots,m\}$ heet het n-tupel $[f(i,1), f(i,2),\dots, f(i,n)]$ uit V de <u>i-de rij van de matrix</u> f. De elementen $f(i,1), f(i,2),\dots, f(i,n)$ heten <u>de elementen op de i-de rij van</u> f.

I.3.11 <u>Definitie</u>: Zij $f : R_{m,n} \to V$ een $(m \times n)$-matrix uit een verzameling V. Voor $j \in \{1,\dots,n\}$ heet het n-tupel $[f(1,j), f(2,j),\dots, f(m,j)]$ uit V de <u>j-de kolom van de matrix</u> f. De elementen $f(1,j), f(2,j),\dots, f(n,j)$ heten <u>de elementen op de j-de kolom van</u> f.

Een $(m \times n)$-matrix f heeft dus m rijen en n kolommen; $f(i,j)$ is het element op de i-de rij en de j-de kolom.

I.3.12 <u>Definitie</u>: Als $R_{n,n}$ een vierkant rooster is, en V is een verzameling, dan heet een $(n \times n)$-matrix $f : R_{n,n} \to V$ een <u>vierkante matrix uit</u> V.

I.3.13 <u>Definitie</u>: Als $f : R_{n,n} \to V$ een vierkante matrix is uit een verzameling V, dan heet het n-tupel $[f(1,1), f(2,2),\dots, f(n,n)]$ uit V de <u>hoofddiagonaal van de matrix</u> V. De elementen $f(1,1), f(2,2),\dots, f(n,n)$ heten <u>de elementen op de hoofddiagonaal van</u> f.

I.3.14 <u>Voorbeeld:</u> Beschouw de (5×3)-matrix over $\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

De derde rij van deze matrix is het 3-tupel $[2,2,1]$ uit $\mathbb{Z}$; de tweede kolom is het 5-tupel $[2,3,2,3,3]$ uit $\mathbb{Z}$. Merk verder op dat de tweede en vierde rij gelijk zijn.

We gaan nu nader in op vierkante matrices.

I.3.15 <u>Definitie</u>: Zij $\mathcal{R}_{n,n}$ het (vierkante) $(n \times n)$-rooster. Een deelverzameling

$$W = \{(i_1,j_1), (i_2,j_2),\dots, (i_n,j_n)\}$$

van $\mathcal{R}_{n,n}$ die bestaat uit n elementen van $\mathcal{R}_{n,n}$, zodat uit iedere rij en uit iedere kolom van $\mathcal{R}_{n,n}$ precies één element in W voorkomt, heet een <u>n-greep uit</u> $\mathcal{R}_{n,n}$.

I.3.16 <u>Voorbeeld</u>: De 2-grepen uit $\mathcal{R}_{2,2}$ zijn:

$$\left\{\begin{matrix} \times & \cdot \\ \cdot & \times \end{matrix}\right\} \qquad\qquad \left\{\begin{matrix} \cdot & \times \\ \times & \cdot \end{matrix}\right\}$$

$$\{(1,1), (2,2)\} \qquad \text{en} \qquad \{(1,2), (2,1)\}.$$

I.3.17 <u>Voorbeeld</u>: De 3-grepen uit $\mathcal{R}_{3,3}$ zijn:

$$\left\{\begin{matrix} \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \times & \cdot \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} \cdot & \times & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \\ \times & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \times & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \times \\ \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot \end{matrix}\right\}$$

$\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$; $\{(1,1), (2,3), (3,2)\}$; $\{(1,2), (2,1), (3,3)\}$;
$\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$; $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ en $\{(1,3), (2,1), (3,2)\}$.

I.3.18 <u>Voorbeeld</u>: Een voorbeeld van een 5-greep uit $\mathcal{R}_{5,5}$ is:

$$\{(1,3), (2,5), (3,1), (4,4), (5,2)\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \times \\ \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\}.$$

I.3.19 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> $W = \{(i_1,j_1),\dots, (i_n,j_n)\}$ <u>een n-greep is uit</u> $\mathcal{R}_{n,n}$, <u>dan zijn</u> $[i_1,\dots, i_n]$ <u>en</u> $[j_1,\dots, j_n]$ <u>n-permutaties</u>.

<u>Bewijs</u>: Zij $k \in \{1,\dots,n\}$. Dan komt er in W precies één element (i_s,j_s) voor uit de k^e rij. Dat wil zeggen: er is precies één i_s met $i_s = k$. Dus komen de getallen $1,\dots,n$ precies één keer voor onder de elementen in het n-tupel $[i_1,\dots, i_n]$ dat derhalve een n-permutatie is.

Analoog bewijst men dat $[j_1,\dots, j_n]$ een n-permutatie is. □

I.3.20 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> $W = \{(i_1,j_1),\dots, (i_n,j_n)\}$ <u>een n-greep is uit</u> $\mathcal{R}_{n,n}$ <u>dan hangt de waarde van</u> $\mathrm{sign}[i_1,\dots, i_n]\cdot\mathrm{sign}[j_1,\dots, j_n]$ <u>niet af van de volgorde waarin de elementen van</u> W <u>geschreven zijn</u>.

<u>Bewijs</u>: Omdat $\{i_1,\dots, i_n\} = \{1,\dots, n\} = \{j_1,\dots, j_n\}$ kunnen we een afbeelding $\phi : \{1,\dots, n\} \to \{1,\dots, n\}$ definiëren met: $\phi(i_1) = j_1, \phi(i_2) = j_2,\dots, \phi(i_n) = j_n$. Zij nu σ de n-permutatie $[i_1,\dots,i_n]$ en τ de n-permutatie $[j_1,\dots, j_n]$. Dan is:

$$\sigma(1) = i_1,\ \sigma(2) = i_2,\ \dots,\ \sigma(n) = i_n,$$

zodat

$$\sigma^{-1}(i_1) = 1,\ \sigma^{-1}(i_2) = 2,\ \dots,\ \sigma^{-1}(i_n) = n,$$

waaruit volgt

$$(\tau\circ\sigma^{-1})(i_1) = j_1,\ (\tau\circ\sigma^{-1})(i_2) = j_2,\ \dots,\ (\tau\circ\sigma^{-1})(i_n) = j_n.$$

Dit betekent dat $\tau\circ\sigma^{-1} = \phi$. Nu hangt ϕ alleen af van de combinaties $(i_1,j_1), \dots, (i_n,j_n)$ en niet van de volgorde der elementen van W. Dus ook $\tau\circ\sigma^{-1}$, en daarmee $\mathrm{sign}(\tau\circ\sigma^{-1})$, is onafhankelijk van de volgorde der elementen van W. Nu is $\mathrm{sign}(\sigma\circ\sigma^{-1}) = +1$ want $\sigma\circ\sigma^{-1}$ is de eenheids-n-permutatie. Dus, $\mathrm{sign}(\sigma)\cdot\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) = 1$. Als $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$, dan is dus $\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) = 1$, en als $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$, dan is $\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) = -1$. Dus $\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma^{-1})$. Hieruit volgt:

$$\mathrm{sign}[i_1,\dots, i_n]\cdot\mathrm{sign}[j_1,\dots, j_n] = \mathrm{sign}(\sigma)\cdot\mathrm{sign}(\tau) =$$

$$= \mathrm{sign}(\sigma^{-1})\cdot\mathrm{sign}(\tau) = \mathrm{sign}(\tau\circ\sigma^{-1}).$$

Omdat $\mathrm{sign}(\tau \circ \sigma^{-1})$ onafhankelijk is van de volgorde der elementen van W geldt dit dus ook voor $\mathrm{sign}[i_1,\ldots, i_n]\cdot\mathrm{sign}[j_1,\ldots, j_n]$, zodat de opmerking bewezen is. □

In de voorgaande opmerking hebben we gezien dat aan elke n-greep $W = \{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_n)\}$ een eenduidig bepaalde waarde $\mathrm{sign}[i_1,\ldots, i_n]\cdot\mathrm{sign}[j_1,\ldots, j_n]$ kan worden toegevoegd. We definiëren:

I.3.21 <u>Definitie</u>: Als $W = \{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_n)\}$ een n-greep is uit $\mathcal{R}_{n,n}$, dan heet

$$\mathrm{sign}(W) := \mathrm{sign}[i_1,\ldots, i_n]\cdot\mathrm{sign}[j_1,\ldots, j_n]$$

<u>het teken van</u> W.

I.3.22 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de 5-greep $\{(1,3),(2,2),(3,4),(4,1),(5,5)\}$ uit $\mathcal{R}_{5,5}$

$$\left\{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \times & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \times \end{matrix}\right\} .$$

Het teken van deze 5-greep wordt dan gegeven door:

$$\mathrm{sign}[1,2,3,4,5]\cdot\mathrm{sign}[3,2,4,1,5] = (+1)(+1) = +1.$$

Hadden we een andere volgorde voor de elementen van deze 5-greep gekozen, bijvoorbeeld: $\{(2,2),(1,3),(4,1),(5,5),(3,4)\}$, dan hadden we verkregen:

$$\mathrm{sign}[2,1,4,5,3]\cdot\mathrm{sign}[2,3,1,5,4] = (-1)(-1) = +1.$$

I.3.23 Zij nu

$$\Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$$

een automorphisme (cf. I.1.39) van een vierkant rooster $\mathcal{R}_{n,n}$. Zij $\{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_n)\}$ een n-greep van $\mathcal{R}_{n,n}$. Dan is in het algemeen $\{\Omega(i_1,j_1),\ldots, \Omega(i_n,j_n)\}$ wel een deelverzameling van $\mathcal{R}_{n,n}$, maar geen n-greep. Het volgende voorbeeld illustreert dit.

I.3.24 Voorbeeld: Kies de afbeelding

$$\Omega : \mathcal{R}_{2,2} \to \mathcal{R}_{2,2}$$

die gegeven wordt door: $\Omega(1,1) = (2,1), \Omega(2,1) = (1,1), \Omega(1,2) = (1,2), \Omega(2,2) =$ $= (2,2)$. De lezer ga na dat Ω bijectief, en derhalve een automorphisme van $\mathcal{R}_{2,2}$ is. Nu is $\{(1,1),(2,2)\}$ een 2-greep van $\mathcal{R}_{2,2}$, maar $\{\Omega(1,1),\Omega(2,2)\} =$ $= \{(2,1),(2,2)\}$ is geen 2-greep van $\mathcal{R}_{2,2}$.

$$\begin{Bmatrix} \times & \cdot \\ \cdot & \times \end{Bmatrix} \xrightarrow{\Omega} \begin{Bmatrix} \cdot & \cdot \\ \times & \times \end{Bmatrix}$$

$$\{(1,1),(2,2)\} \qquad \{\Omega(1,1),\Omega(2,2)\} = \{(2,1),(2,2)\}.$$

I.3.25 Definitie: Een automorphisme $\Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$ van een vierkant rooster $\mathcal{R}_{n,n}$ heet een roostertransformatie als voor iedere n-greep $\{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_n)\}$ van $\mathcal{R}_{n,n}$ geldt dat ook $\{\Omega(i_1,j_1),\ldots, \Omega(i_n,j_n)\}$ een n-greep is van $\mathcal{R}_{n,n}$.

I.3.26 Notatie: Voor elk vierkant rooster $\mathcal{R}_{n,n}$ geven we de verzameling van alle n-grepen van $\mathcal{R}_{n,n}$ aan met $\mathcal{W}_n$.

I.3.27 Notatie: Als $\Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$ een roostertransformatie is en $W = \{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_n)\}$ is een n-greep van $\mathcal{R}_{n,n}$ (dat is: $W \in \mathcal{W}_n$), dan noteren we:

$$\Omega(W) = \{\Omega(i_1,j_1),\ldots, \Omega(i_n,j_n)\}.$$

I.3.28 Notatie: Zij nu $\Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$ een roostertransformatie van een vierkant rooster $\mathcal{R}_{n,n}$. Zij $W \in \mathcal{W}_n$. Dan is ook $\Omega(W)$ een n-greep van $\mathcal{R}_{n,n}$, dus een element van $\mathcal{W}_n$. We zien dat de roostertransformatie Ω een afbeelding van $\mathcal{W}_n$ naar $\mathcal{W}_n$ induceert, die aan elk element W van $\mathcal{W}_n$ toevoegt het element $\Omega(W)$ van $\mathcal{W}_n$. Deze afbeelding geven we ook aan met Ω:

$$\Omega : \mathcal{W}_n \to \mathcal{W}_n.$$

(Het is uiteraard slordig om deze afbeelding ook met Ω aan te duiden, maar niet verwarrend.) We zullen bewijzen dat ook deze afbeelding bijectief is. Eerst:

I.3.29 Lemma: Zij V een verzameling die eindig veel elementen bevat. Dan is elk injectief endomorphisme $f : V \to V$ van V bijectief.

Bewijs: (Met volledige inductie naar het aantal elementen van V.)
(i): Voor verzamelingen V die één element bevatten is het lemma triviaal.
(ii): Stel nu dat het lemma geldt voor verzamelingen met k elementen. We moeten dan bewijzen dat het lemma geldt voor verzamelingen met k + 1 elementen. Zij V een verzameling met k + 1 elementen en $f : V \to V$ een injectief endomorphisme van V. Stel: f is niet surjectief. Dan is er een element $v_0 \in V$ zodat $v_0 \notin Im(f)$. Beschouw nu de verzameling V_1 waarvan de elementen zijn: alle elementen van V behalve v_0. Kies een element $v \in V_1$. Omdat $f(v) \neq v_0$ is $f(v)$ ook een element van V_1. We hebben dus een endomorphisme f_1 van V_1 dat aan ieder element $v \in V_1$ het element $f(v) \in V_1$ toevoegt. Ook is f_1 injectief: Kies twee verschillende elementen $v_1, v_2 \in V_1$. Dan is $f_1(v_1) = f(v_1)$ en $f_1(v_2) = f(v_2)$. Omdat f injectief is zijn $f(v_1)$ en $f(v_2)$ en dus ook $f_1(v_1)$ en $f_1(v_2)$ verschillend.

Omdat V_1 k elementen heeft en f_1 een injectief endomorphisme van V_1 is, is f_1 surjectief. Dat wil zeggen: voor ieder element $v \in V_1$ is er een element $w \in V_1$ zodat $f_1(w) = v$. Of, met andere woorden, voor ieder element $v \in V$ met $v \neq v_0$ is er een element $w \in V$ met $w \neq v_0$ en $f(w) = v$.

Beschouw nu $f(v_0) \in V$. Omdat $v_0 \notin Im(f)$ is er geen element x in V met $f(x) = v_0$. In het bijzonder is dus $f(v_0) \neq v_0$. Dus is er een element $w \in V$ met $w \neq v_0$ en $f(w) = f(v_0)$. Echter $w \neq v_0$ en omdat f injectief is is derhalve $f(w) \neq f(v_0)$; tegenspraak.

Dus leidt de veronderstelling dat f niet surjectief is tot een tegenspraak, zodat f surjectief moet zijn, en derhalve bijectief. □

I.3.30 Propositie: Als $\Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$ een roostertransformatie is van een vierkant rooster $\mathcal{R}_{n,n}$, dan is de door Ω geïnduceerde afbeelding $\Omega : \mathcal{W}_n \to \mathcal{W}_n$ (cf. I.3.28) bijectief.

Bewijs: In iedere n-greep $W = \{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_n)\}$ kunnen we de volgorde van de voorkomende elementen zo kiezen dat het eerste element uit de eerste rij komt, het tweede element uit de tweede rij, etc., etc. We kunnen elke n-greep dus schrijven in de vorm $W = \{(1,j_1),\ldots, (n,j_n)\}$. $\mathcal{W}_n$ bestaat dus uit die deelverzamelingen $\{(1,j_1),\ldots, (n,j_n)\}$ van $\mathcal{R}_{n,n}$ waarvoor $[j_1,\ldots, j_n]$ een n-permutatie is. Omdat er n! n-permutaties zijn heeft $\mathcal{W}_n$ dus n! elementen. $\mathcal{W}_n$ bevat dus eindig veel elementen. Volgens I.3.29 is het dus voldoende – om de bijectiviteit van $\Omega : \mathcal{W}_n \to \mathcal{W}_n$ te bewijzen – om te laten zien dat $\Omega : \mathcal{W}_n \to \mathcal{W}_n$ injectief is.

Kies hiertoe twee elementen W_1, W_2 uit $\mathcal{W}_n$, zeg:

$$W_1 = \{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_m)\} \quad ; \quad W_2 = \{(k_1,l_1),\ldots, (k_n,l_n)\}.$$

We moeten dan laten zien dat uit $\Omega(W_1) = \Omega(W_2)$ volgt dat $W_1 = W_2$.
$\Omega(W_1) = \Omega(W_2)$ wil zeggen:

$$\{\Omega(i_1,j_1),\ldots, \Omega(i_n,j_n)\} = \Omega(W_1) = \Omega(W_2) =$$

$$= \{\Omega(k_1,l_1),\ldots, \Omega(k_n,l_n)\}.$$

Stel dat $W_1 \neq W_2$, terwijl $\Omega(W_1) = \Omega(W_2)$. Dan is W_1 geen deelverzameling van W_2, of W_2 is geen deelverzameling van W_1 (cf. I.1.11). Zeg: W_1 is geen deelverzameling van W_2. Dat wil zeggen: er is een element $(i_s,j_s) \in W_1$ dat niet een element is van W_2. Nu is $\Omega(i_s,j_s) \in \Omega(W_1)$. Omdat $\Omega(W_1) = \Omega(W_2)$ volgt hieruit dat er een element $(k_t,l_t) \in W_2$ bestaat met $\Omega(i_s,j_s) = \Omega(k_t,l_t)$, terwijl uiteraard $(i_s,j_s) \neq (k_t,l_t)$, omdat $(i_s,j_s) \notin W_2 = \{(k_1,l_1),\ldots,(k_n,l_n)\}$. Ω voegt dus aan de twee verschillende elementen (i_s,j_s) en (k_t,l_t) uit $\mathcal{R}_{n,n}$ hetzelfde beeld toe. Echter, $\Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$ is een roostertransformatie, dus een automorphisme en derhalve injectief; tegenspraak.

We zien dus dat, als $\Omega(W_1) = \Omega(W_2)$, de veronderstelling dat $W_1 \neq W_2$ leidt tot een tegenspraak. Dus is $W_1 = W_2$. Hiermee is de injectivitiet - en bijgevolg de bijectiviteit - van

$$\Omega : \mathcal{W}_n \to \mathcal{W}_n$$

bewezen en daarmee de propositie. □

Beschouw nog eens het rooster $\mathcal{R}_{n,n}$, en daarbij een vierkante $(n \times n)$-matrix $f : \mathcal{R}_{n,n} \to V$ uit een of andere verzameling V. Zij voorts $\Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$ een roostertransformatie. We kunnen dan de samenstelling $f \circ \Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to V$ beschouwen:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_{n,n} \arrow[r, "\Omega"] \arrow[rr, bend right, "f \circ \Omega"'] & \mathcal{R}_{n,n} \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd} .$$

Dit is uiteraard weer een vierkante ($n \times n$)-matrix.

I.3.31 <u>Definitie</u>: Als $f : R_{n,n} \to V$ een ($n \times n$)-matrix is en $\Omega : R_{n,n} \to R_{n,n}$ is een roostertransformatie op $R_{n,n}$, dan heet de ($n \times n$)-matrix $f \circ \Omega : R_{n,n} \to V$ <u>de matrix die uit</u> f <u>verkregen is door toepassing van</u> Ω.

We zullen nu een drietal roostertransformaties op een vierkant rooster $R_{n,n}$, die voor het vervolg van belang zijn, nader in ogenschouw nemen.

I.3.32 <u>Definitie</u>: Zij $R_{n,n}$ een vierkant rooster. Het endomorphisme

$$T : R_{n,n} \to R_{n,n}$$

van $R_{n,n}$ dat gegeven is door:

$$T(i,j) = (j,i)$$

heet de <u>transpositie van</u> $R_{n,n}$.

I.3.33 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> $R_{n,n}$ <u>een vierkant rooster is, dan is de transpositie</u> T <u>van</u> $R_{n,n}$ <u>een roostertransformatie op</u> $R_{n,n}$.

<u>Bewijs</u>: Allereerst moeten we aantonen dat T bijectief is. Omdat $R_{n,n}$ een eindige verzameling is (n^2 elementen) is het voldoende om te bewijzen dat T injectief is (cf. I.3.29). Welnu, als (i,j) en (k,l) twee verschillende elementen van $R_{n,n}$ zijn, dan zijn ook $T(i,j) = (j,i)$ en $T(k,l) = (l,k)$ verschillend. Dus T is injectief, en derhalve een automorphisme op $R_{n,n}$.

Nu moeten we nog laten zien dat voor elke n-greep $W = \{(i_1,j_1),\dots, (i_n,j_n)\}$ van $R_{n,n}$ ook $T(W) = \{T(i_1,j_1),\dots, T(i_n,j_n)\} = \{(j_1,i_1),\dots, (j_n,i_n)\}$ een n-greep van $R_{n,n}$ is. Omdat W een n-greep is, is $[i_1,\dots, i_n]$ een n-permutatie (cf. I.3.19). Dus komt in $\{i_1,\dots, i_n\}$ elk der getallen $1,\dots, n$ precies één keer voor. Dus komt in $\{(j_1,i_1),\dots, (j_n,i_n)\}$ uit elk der kolommen van $R_{n,n}$ precies één element in $T(W)$ voor. Analoog bewijst men dat uit elk der rijen van $R_{n,n}$ precies één element in $T(W)$ voorkomt. Dus T is een roostertransformatie. □

I.3.34 <u>Definitie</u>: Zij $R_{n,n}$ een vierkant rooster. Zij σ een n-permutatie. Het endomorphisme

$$R_\sigma : R_{n,n} \to R_{n,n}$$

van $R_{n,n}$ dat gegeven is door:

$$R_\sigma(i,j) = (\sigma(i), j)$$

heet <u>de n-permutatie</u> σ <u>op de rijen van</u> $R_{n,n}$.

I.3.35 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> $R_{n,n}$ <u>een vierkant rooster is en</u> σ <u>is een n-permutatie, dan is de n-permutatie</u> σ <u>op de rijen van</u> $R_{n,n}$ R_σ <u>een roostertransformatie op</u> $R_{n,n}$.

<u>Bewijs</u>: Evenals in het bewijs van I.3.33 moeten we twee eigenschappen van R_σ aantonen: ten eerste dat R_σ injectief is en ten tweede dat R_σ elke n-greep van $R_{n,n}$ overvoert in een n-greep van $R_{n,n}$.

Kies twee elementen (i,j) en (k,l) uit $R_{n,n}$ zodat $R_\sigma(i,j) = R_\sigma(k,l)$. Om de injectiviteit van R_σ aan te tonen moeten we laten zien dat hieruit volgt: $(i,j) = (k,l)$. Welnu, $(\sigma(i), j) = R_\sigma(i,j) = R_\sigma(k,l) = (\sigma(k), l)$. Dus $\sigma(i) = \sigma(k)$ en $j = l$. Omdat $\sigma : \{1,\dots, n\} \to \{1,\dots, n\}$ als n-permutatie bijectief, dus zeker injectief is, volgt uit $\sigma(i) = \sigma(k)$ dat $i = k$. Omdat we ook hadden: $j = l$ volgt $(i,j) = (k,l)$. Dus R_σ is injectief, en dus bijectief en derhalve een automorphisme van $R_{n,n}$.

Kies nu een willekeurige n-greep $W = \{(i_1,j_1),\dots, (i_n,j_n)\}$ van $R_{n,n}$. Door eventueel de volgorde van de elementen van W te wijzigen kunnen we veronderstellen dat het eerste element in de eerste rij staat, het tweede in de tweede rij van $R_{n,n}$, etc., etc. Dus $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, ..., $i_n = n$ oftewel:

$$W = \{(1,j_1), (2,j_2),\dots, (n,j_n)\}.$$

Dan is $R_\sigma(W)$ gegeven door:

$$R_\sigma(W) = \{(\sigma(1), j_1), (\sigma(2), j_2),\dots, (\sigma(n), j_n)\}.$$

We moeten laten zien dat deze deelverzameling van $R_{n,n}$ een n-greep is.

Omdat W een n-greep is, komen de getallen $1,\dots, n$ precies één keer voor in $[j_1,\dots, j_n]$. Dus bevat $R_\sigma(W)$ uit iedere kolom van $R_{n,n}$ precies één element.

Omdat σ een n-permutatie is, komen de getallen $1,\dots, n$ ook precies één keer voor in $[\sigma(1),\dots, \sigma(n)]$ zodat $R_\sigma(W)$ ook uit iedere rij van $R_{n,n}$ precies één element bevat.

Dus is met W ook $R_\sigma(W)$ een n-greep van $R_{n,n}$. Hiermee is de opmerking bewezen. □

Voordat we de derde roostertransformatie op $R_{n,n}$ definiëren eerst nog enkele algemene opmerkingen over het samenstellen van roostertransformaties op $R_{n,n}$.

I.3.36 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn Ω_1 en Ω_2 twee roostertransformaties op een vierkant rooster $R_{n,n}$, dan is ook $\Omega_1 \circ \Omega_2$ een roostertransformatie op $R_{n,n}$.</u>

<u>Bewijs</u>:

$$R_{n,n} \xrightarrow{\Omega_2} R_{n,n} \xrightarrow{\Omega_1} R_{n,n} .$$

Omdat Ω_1 en Ω_2 isomorphismen zijn, is ook hun samenstelling $\Omega_1 \circ \Omega_2$ een isomorphisme, dus een automorphisme van $R_{n,n}$. Zij nu $W = \{(i_1,j_1),\dots, (i_n,j_n)\}$ een n-greep van $R_{n,n}$. Dan is $\Omega_2(W)$ een n-greep van $R_{n,n}$. Omdat ook Ω_1 elke n-greep van $R_{n,n}$ overvoert in een n-greep van $R_{n,n}$, is tevens $(\Omega_1 \circ \Omega_2)(W) = \Omega_1(\Omega_2(W))$ een n-greep van $R_{n,n}$.

Hiermee is de opmerking bewezen. □

Iets algemener geldt op analoge wijze:

I.3.37 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn $\Omega_1,\dots, \Omega_m$ een m-tal roostertransformaties op een vierkant rooster $R_{n,n}$, dan is ook $\Omega_1 \circ \dots \circ \Omega_m$ een roostertransformatie op $R_{n,n}$.</u>

Vervolgens geldt:

I.3.38 <u>Opmerking</u>: <u>Als Ω een roostertransformatie is op een vierkant rooster $R_{n,n}$, dan is ook Ω^{-1} een roostertransformatie op $R_{n,n}$.</u>

Bewijs: Uiteraard is met Ω ook Ω^{-1} een automorphisme van $R_{n,n}$. Zij nu W een n-greep van $R_{n,n}$. We moeten dan bewijzen dat ook $\Omega^{-1}(W)$ een n-greep is van $R_{n,n}$. Welnu, $\Omega : R_{n,n} \to R_{n,n}$ induceert volgens I.3.28 een endomorphisme $\Omega : W_n \to W_n$ van W_n (cf. I.3.26). Volgens I.3.30 is $\Omega : W_n \to W_n$ bijectief, dus zeker surjectief. Kies nu een n-greep $W' \in W_n$, zodat $\Omega(W') = W$. Dan is $\Omega^{-1}(W) = \Omega^{-1}(\Omega(W')) = (\Omega^{-1} \circ \Omega)(W') = W'$ waarmee bewezen is dat met W ook $\Omega^{-1}(W)$ een n-greep van $R_{n,n}$ is. De opmerking is hiermee aangetoond. □

I.3.39 Opmerking: Zij $R_{n,n}$ een vierkant rooster en T de transpositie op $R_{n,n}$ (cf. I.3.32), dan is $T = T^{-1}$.

Bewijs: Omdat $T : R_{n,n} \to R_{n,n}$ een automorphisme is, is het volgens I.1.41 voldoende - opdat $T = T^{-1}$ - om te laten zien dat $T \circ T$ de identieke afbeelding is op $R_{n,n}$. Dit volgt onmiddellijk uit:

$$(T \circ T)(i,j) = T(T(i,j)) = T(j,i) = (i,j) = id_{R_{n,n}}(i,j)$$

(voor elke $(i,j) \in R_{n,n}$). □

I.3.40 Opmerking: Zij $R_{n,n}$ een vierkant rooster, en zijn σ en τ twee n-permutaties, dan geldt (cf. I.3.34):

$$R_{\sigma \circ \tau} = R_\sigma \circ R_\tau.$$

Bewijs: Voor elke $(i,j) \in R_{n,n}$ geldt:

$$R_{\sigma \circ \tau}(i,j) = ((\sigma \circ \tau)(i), j) = (\sigma(\tau(i)), j) =$$

$$= R_\sigma(\tau(i), j) = R_\sigma(R_\tau(i,j)) = (R_\sigma \circ R_\tau)(i,j),$$

waaruit de opmerking volgt.

I.3.41 Gevolg: Is $R_{n,n}$ een vierkant rooster en σ een n-permutatie, dan geldt (cf. I.3.34):

$$(R_\sigma)^{-1} = R_{\sigma^{-1}}.$$

Bewijs: Ga na! □

I.3.42 <u>Definitie</u>: Is $\mathcal{R}_{n,n}$ een vierkant rooster en τ een n-permutatie die een verwisseling is, dan heet de roostertransformatie R_τ (cf. I.3.34) een <u>verwisseling op de rijen van $\mathcal{R}_{n,n}$</u>.

I.3.43 <u>Opmerking</u>: <u>Is $\mathcal{R}_{n,n}$ een vierkant rooster, dan is elke n-permutatie op de rijen van $\mathcal{R}_{n,n}$ een samenstelling van verwisselingen op de rijen van $\mathcal{R}_{n,n}$</u> (cf. I.3.34 en I.3.42).

<u>Bewijs</u>: Zij σ een n-permutatie en $\tau_1, \ldots, \tau_m$ een aantal verwisselingen zodat $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_m$. Dan geldt (analoog te bewijzen als I.3.40)

$$R_\sigma = R_{\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_m} = R_{\tau_1} \circ R_{\tau_2} \circ \ldots \circ R_{\tau_m},$$

hetgeen de opmerking bewijst. □

We voeren nu een derde type roostertransformaties in:

I.3.44 <u>Definitie</u>: Zij $\mathcal{R}_{n,n}$ een vierkant rooster. Zij σ een n-permutatie. Het endomorphisme

$$K_\sigma : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$$

van $\mathcal{R}_{n,n}$ dat gegeven is door:

$$K_\sigma(i,j) = (i, \sigma(j))$$

heet <u>de n-permutatie</u> σ <u>op de kolommen van</u> $\mathcal{R}_{n,n}$.

I.3.45 <u>Opmerking</u>: <u>Als $\mathcal{R}_{n,n}$ een vierkant rooster is en σ is een n-permutatie, dan is de n-permutatie σ op de kolommen van $\mathcal{R}_{n,n}$, K_σ, een roostertransformatie op $\mathcal{R}_{n,n}$</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies een willekeurig element $(i,j) \in \mathcal{R}_{n,n}$. Dan geldt:

$$K_\sigma(i,j) = (i, \sigma(j)) = T(\sigma(j), i) = T(R_\sigma(j,i)) =$$

$$= T\big(R_\sigma(T(i,j))\big) = (T \circ R_\sigma \circ T)(i,j).$$

We zien dus dat $K_\sigma = T \circ R_\sigma \circ T$ (cf. I.3.32 en I.3.34). Omdat volgens I.3.33 en I.3.35 T en R_σ roostertransformaties zijn, is volgens I.3.37 ook de samenstelling $T \circ R_\sigma \circ T = K_\sigma$ een roostertransformatie, zodat de opmerking bewezen is. □

I.3.46 <u>Opgave</u>: Bewijs dat, als $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ n-permutaties zijn, geldt: $K_{\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_m} = K_{\sigma_1} \circ \ldots \circ K_{\sigma_m}$, terwijl voor iedere n-permutatie σ ook geldt: $(K_\sigma)^{-1} = K_{\sigma^{-1}}$.

I.3.47 <u>Definitie</u>: Als $\mathcal{R}_{n,n}$ een vierkant rooster is en τ is een n-permutatie die tevens een verwisseling is, dan heet K_τ (cf. I.3.44) <u>een verwisseling op de kolommen van</u> $\mathcal{R}_{n,n}$.

I.3.48 <u>Opmerking</u>: <u>Als $\mathcal{R}_{n,n}$ een vierkant rooster is, dan is iedere n-permutatie op de kolommen van $\mathcal{R}_{n,n}$ een samenstelling van verwisselingen op de kolommen van $\mathcal{R}_{n,n}$.</u>

<u>Bewijs</u>: Ga na! □

I.3.49 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de (4×4)-matrix $f : \mathcal{R}_{4,4} \to V$ uit een verzameling V, gegeven door het bijbehorend schema

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix}.$$

(Dus voor elke $(i,j) \in \mathcal{R}_{4,4}$ is $f(i,j) = v_{ij}$.) Zij nu T de transpositie van $\mathcal{R}_{4,4}$. Als we T nu toepassen op de matrix f, dan krijgen we de nieuwe matrix $f \circ T : \mathcal{R}_{4,4} \to V$ (cf. I.3.31)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_{4,4} \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "f \circ T"'] & \mathcal{R}_{4,4} \arrow[r, "f"] & V. \end{tikzcd}$$

Nu is voor elke $(i,j) \in \mathcal{R}_{4,4}$:

$$(f \circ T)(i,j) = f(T(i,j)) = f(j,i) = v_{ji}$$

zodat het schema van deze nieuwe matrix wordt:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} \end{pmatrix} .$$

I.3.50 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw weer de matrix $f : \mathcal{R}_{4,4} \to V$ uit een verzameling V die gegeven wordt door het schema

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix} .$$

(Weer: $f(i,j) = v_{ij}$.) Zij σ de 4-permutatie [1,3,2,4], en R_σ de 4-permutatie σ op de rijen van $\mathcal{R}_{4,4}$. Passen we R_σ toe op f, dan krijgen we de nieuwe matrix $f \circ R_\sigma : \mathcal{R}_{4,4} \to V$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_{4,4} \arrow[r, "R_\sigma"] \arrow[rr, bend right, "f \circ R_\sigma"'] & \mathcal{R}_{4,4} \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd} .$$

Nu geldt voor ieder element $(i,j) \in \mathcal{R}_{4,4}$:

$$(f \circ R_\sigma)(i,j) = f(R_\sigma(i,j)) = f(\sigma(i), j) = v_{\sigma(i)j}$$

zodat, omdat $[\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)] = [1,3,2,4]$, het schema van deze nieuwe matrix wordt:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix} .$$

Is K_σ de permutatie σ op de kolommen van $R_{4,4}$, dan is de matrix die we uit f verkrijgen door toepassing van K_σ de matrix $f \circ K_\sigma : R_{4,4} \to V$. Deze heeft als schema:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{13} & v_{12} & v_{14} \\ v_{21} & v_{23} & v_{22} & v_{24} \\ v_{31} & v_{33} & v_{32} & v_{34} \\ v_{41} & v_{43} & v_{42} & v_{44} \end{pmatrix} .$$

(Ga na!)

I.3.51 <u>Terminologie</u>: Is T de transpositie op het vierkante rooster $R_{n,n}$ en is

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

een $(n \times n)$-matrix uit een of andere verzameling V, dan heet de uit A te verkrijgen matrix door T op A toe te passen de <u>getransponeerde matrix van</u> A. We noteren deze matrix met

$$A^T.$$

Ga na dat

$$A^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

waarbij $b_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1,\ldots, n;\ j = 1,\ldots, n)$, (vgl. I.3.49).

I.3.52 <u>Opmerking</u>: <u>Voor elke vierkante matrix</u> A <u>geldt</u>:

$$(A^T)^T = A.$$

<u>Bewijs</u>: Ga na! (cf. I.3.39) □

We gaan nog eens terug naar de roostertransformaties.

I.3.53 <u>Definitie</u>: Zij $R_{n,n}$ een vierkant rooster en $\Omega : R_{n,n} \to R_{n,n}$ een roostertransformatie. Dan noemen we Ω een <u>even roostertransformatie</u> als voor elke n-greep W van $R_{n,n}$ geldt:

$$\text{sign}(W) = \text{sign}(\Omega(W)).$$

We noemen Ω een <u>oneven roostertransformatie</u> als voor iedere n-greep W van $R_{n,n}$ geldt:

$$\text{sign}(W) = -\ \text{sign}(\Omega(W)).$$

I.3.54 <u>Opmerking</u>: <u>De transpositie</u> T <u>op een vierkant rooster</u> $R_{n,n}$ <u>is een even roostertransformatie</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies een willekeurige n-greep $W = \{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_n)\}$ van $R_{n,n}$. Dan is $T(W) = \{(j_1,i_1),\ldots, (j_n,i_n)\}$ zodat

$$\text{sign}(W) = \text{sign}[i_1,\ldots, i_n]\cdot\text{sign}[j_1,\ldots, j_n] =$$

$$= \text{sign}[j_1,\ldots, j_n]\cdot\text{sign}[i_1,\ldots, i_n] = \text{sign}(T(W)).\ \square$$

I.3.55 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> σ <u>een n-permutatie en is</u> R_σ <u>de n-permutatie op de rijen van het rooster</u> $R_{n,n}$, <u>dan geldt</u>:
<u>Als</u> σ <u>een even permutatie is, dan is</u> R_σ <u>een even roostertransformatie</u>. <u>Is</u> σ <u>een oneven permutatie, dan is</u> R_σ <u>een oneven roostertransformatie</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies een willekeurige n-greep $W = \{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_n)\}$ van $R_{n,n}$. Door eventueel de elementen van W in een andere volgorde te schrijven mogen

we aannemen: $i_1 = 1$, $i_2 = 2, \ldots, i_n = n$, dus:

$$W = \{(1,j_1), (2,j_2), \ldots, (n, j_n)\}.$$

Dan is

$$R_\sigma(W) = \{(\sigma(1), j_1), (\sigma(2), j_2), \ldots, (\sigma(n), j_n)\}$$

zodat we vinden

$$\mathrm{sign}(W) = \mathrm{sign}[1,\ldots, n]\cdot \mathrm{sign}[j_1,\ldots, j_n] = \mathrm{sign}[j_1,\ldots, j_n]$$

(omdat $\mathrm{sign}[1,\ldots, n] = +1$). Ook geldt:

$$\mathrm{sign}(R_\sigma(W)) = \mathrm{sign}[\sigma(1),\ldots, \sigma(n)]\cdot \mathrm{sign}[j_1,\ldots, j_n] =$$

$$= \mathrm{sign}(\sigma)\cdot \mathrm{sign}[j_1,\ldots, j_n].$$

Bijgevolg is:

$$\mathrm{sign}(R_\sigma(W)) = \mathrm{sign}(\sigma)\cdot \mathrm{sign}(W).$$

Is σ een even permutatie, dan is $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ en $\mathrm{sign}(R_\sigma(W)) = \mathrm{sign}(W)$ voor iedere $W \in \mathcal{W}_n$, zodat R_σ een even roostertransformatie is.
Is σ een oneven permutatie, dan is $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$ en $\mathrm{sign}(R_\sigma(W)) = -\ \mathrm{sign}(W)$ voor iedere $W \in \mathcal{W}_n$, zodat R_σ dan een oneven roostertransformatie is.
Hiermee is de opmerking bewezen. □

Volkomen analoog hiermee bewijze de lezer zelf:

I.3.56 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> σ <u>een n-permutatie en is</u> K_σ <u>de n-permutatie op de kolommen van het rooster</u> $\mathcal{R}_{n,n}$, <u>dan geldt</u>:
<u>Als</u> σ <u>een even permutatie is</u>, <u>dan is</u> K_σ <u>een even roostertransformatie</u>. <u>Is</u> σ <u>een oneven permutatie</u>, <u>dan is</u> K_σ <u>een oneven roostertransformatie</u>.

* * *

§I.4. Determinanten: combinatorische aspecten

In deze paragraaf zullen we - zonder dat we dit telkens uitdrukkelijk vermelden - uitsluitend spreken over vierkante matrices uit de verzameling $\mathbb{C}$ van de complexe getallen.

Beschouw een $(n \times n)$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dit is een afbeelding $f : R_{n,n} \to \mathbb{C}$, die gegeven is door:

$$f(i,j) = z_{ij} \qquad (i = 1,\ldots, n;\ j = 1,\ldots, n).$$

Kies nu een n-greep

$$W = \{(i_1,j_1),\ldots, (i_n,j_n)\}$$

van $R_{n,n}$. Dan hebben we bij ieder element (i_s,j_s) van W een complex getal $f(i_s,j_s)$. Bovendien hebben we bij W het getal sign(W).
We kunnen dus het produkt

$$A(W) = \mathrm{sign}(W) \cdot f(i_1,j_1) \cdot f(i_2,j_2) \ldots f(i_n,j_n) =$$

$$= \mathrm{sign}(W)\ z_{i_1j_1}\ z_{i_2j_2} \cdots z_{i_nj_n}$$

van deze getallen beschouwen.

Omdat het produkt

$$z_{i_1j_1} \cdots z_{i_nj_n}$$

niet afhangt van de volgorde der factoren

$$z_{i_1j_1},\ z_{i_2j_2},\ldots,\ z_{i_nj_n}$$

(en dus niet van de volgorde waarin we de elementen van W hebben geschreven), hangt A(W) uitsluitend af van de matrix A en de gekozen n-greep $W \in \mathcal{W}_n$ (cf. I.3.26; vgl. ook I.3.20 en I.3.21). Samenvattend:

I.4.1. <u>Definitie</u>: Als

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

een $(n \times n)$-matrix is en $W = \{(i_1,j_1),\dots,(i_n,j_n)\}$ is een n-greep uit $\mathcal{R}_{n,n}$ dan noteren we:

$$A(W) = \text{sign}(W) \cdot z_{i_1j_1} z_{i_2j_2} \cdots z_{i_nj_n}.$$

I.4.2. <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de (5×5)-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 9 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Beschouw vervolgens de 5-greep

$$W = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,2), (5,4)\}$$

uit $\mathcal{R}_{5,5}$:

$$\begin{pmatrix} \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \times & \cdot \end{pmatrix}.$$

Dan is:

$$\text{sign}(W) = \text{sign}[1,2,3,4,5] \cdot \text{sign}[1,3,5,2,4] = (+1)(-1) = -1$$

zodat we vinden:

$$A(W) = (-1)\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 3 = -18.$$

Zij nu A een ($n \times n$)-matrix. We hebben dan bij iedere n-greep $W \in \mathcal{W}_n$ een complex getal $A(W)$. De som van deze getallen noteren we met:

$$\sum_{W\in\mathcal{W}_n} A(W)$$

We definiëren nu:

I.4.3 <u>Definitie</u>: Als A een ($n \times n$)-matrix is, dan heet

$$\det(A) = \sum_{W\in\mathcal{W}_n} A(W)$$

<u>de determinant van de matrix</u> A.

I.4.4 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw een (3×3)-matrix

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}.$$

De 3-grepen zijn (cf. I.3.17)

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3)\} \ ; & W_4 &= \{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\} \ ; \\ W_2 &= \{(1,2),\ (2,3),\ (3,1)\} \ ; & W_5 &= \{(1,2),\ (2,1),\ (3,3)\} \ ; \\ W_3 &= \{(1,3),\ (2,1),\ (3,2)\} \ ; & W_6 &= \{(1,1),\ (2,3),\ (3,2)\} \ . \end{aligned}$$

Men gaat direkt na dat $\text{sign}(W_1) = \text{sign}(W_2) = \text{sign}(W_3) = +1$ en $\text{sign}(W_4) = \text{sign}(W_5) = \text{sign}(W_6) = -1$, zodat

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{W\in\mathcal{W}_n} A(W) = A(W_1)+A(W_2)+A(W_3)+A(W_4)+A(W_5)+A(W_6) = \\ &= z_{11}z_{22}z_{33} + z_{12}z_{23}z_{31} + z_{13}z_{21}z_{32} + \\ &\quad - z_{13}z_{22}z_{31} - z_{12}z_{21}z_{33} - z_{11}z_{23}z_{32}. \end{aligned}$$

I.4.5 <u>Voorbeeld</u>: Voor elke (2 × 2)-matrix

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

is $\det(A) = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ (ga na).

Voor elke (1 × 1)-matrix

$$A = (z_{11})$$

is $\det(A) = z_{11}$.

We zullen nu een aantal rekenregels voor determinanten bewijzen. Hiertoe voeren we eerst een enigszins schematische voorstellingswijze voor matrices in om de notatie overzichtelijk te houden.

I.4.6 <u>Definitie</u>: De (n × n)-matrix

$$\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

die gegeven wordt door

$$\begin{cases} z_{ij} = 0 & \text{als } i \neq j \\ z_{ij} = 1 & \text{als } i = j \end{cases}$$

heet de <u>(n × n)-eenheidsmatrix</u> en we geven deze matrix aan met

$$I_n.$$

Ook geven we deze matrix wel aan met

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I.4.7 <u>Voorbeeld</u>:

$$I_1 = (1) \quad ; \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \text{ etc.}$$

I.4.8 <u>Definitie</u>: Als A een $(n \times n)$-matrix is, zeg:

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

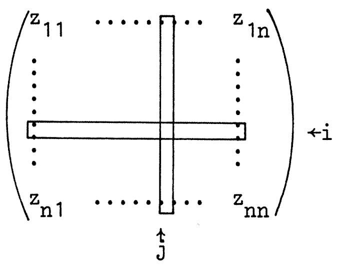
en A' is de $(n - 1) \times (n - 1)$-matrix, die we uit A verkrijgen door de i^e rij en de j^e kolom uit A weg te laten:

$$A' = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1,j-1} & z_{1,j+1} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{i-1,1} & \cdots & z_{i-1,j-1} & z_{i-1,j+1} & \cdots & z_{i-1,n} \\ z_{i+1,1} & \cdots & z_{i+1,j-1} & z_{i+1,j+1} & \cdots & z_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{n,j-1} & z_{n,j+1} & \cdots & z_{n,n} \end{pmatrix}$$

dan zullen we A' vaak noteren met

$$A_{i,j}$$

en ook wel schematisch aangeven met:



als geen verwarring mogelijk is.

I.4.9 Voorbeeld: Als

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

dan is

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \;;\; A_{4,4} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \;;\; A_{3,2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

I.4.10 Notatie: Met schematische aanduidingen, zoals

$$A = \left(\boxed{\quad B \quad} \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \boxed{\quad C \quad} \right),$$

bedoelen we (in dit geval) het volgende: als

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nl} \end{pmatrix},$$

dan is A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & a_1 & c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & a_n & c_{n1} & \cdots & c_{nl} \end{pmatrix}.$$

I.4.11 <u>Notatie</u>: In plaats van: "de $(m \times n)$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mn} \end{pmatrix}"$$

zullen we ook noteren: "de $(m \times n)$-matrix $A = (z_{ij})$".

I.4.12 <u>Rekenregel</u>: <u>Als</u>

$$A = \left(\begin{array}{c} \boxed{\;B\;} \end{array}\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}\begin{array}{c} \boxed{\;C\;} \end{array}\right); \quad A' = \left(\begin{array}{c} \boxed{\;B\;} \end{array}\begin{matrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{matrix}\begin{array}{c} \boxed{\;C\;} \end{array}\right); \quad A'' = \left(\begin{array}{c} \boxed{\;B\;} \end{array}\begin{matrix} a''_1 \\ a''_2 \\ \vdots \\ a''_n \end{matrix}\begin{array}{c} \boxed{\;C\;} \end{array}\right)$$

<u>drie $(n \times n)$-matrices zijn, waarbij geldt</u>:

$$a_i = a'_i + a''_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

<u>dan is</u>:

$$\det(A') + \det(A'') = \det(A).$$

<u>Bewijs</u>: Neem aan dat de elementen a_i van A, a'_i van A' en a''_i van A'' voorkomen in de k^e kolom van A, resp. A', resp. A''. Schrijf vervolgens:

$$A = (z_{ij}) \quad ; \quad A' = (z'_{ij}) \quad ; \quad A'' = (z''_{ij}).$$

Dan is gegeven:

$$(*) \qquad \begin{cases} z_{ij} = z'_{ij} = z''_{ij} \quad \text{als } j \neq k & (i = 1, \ldots, n) \\ z_{ik} = z'_{ik} + z''_{ik} & (i = 1, \ldots, n) \;. \end{cases}$$

Kies nu een willekeurige n-greep W van $\mathcal{R}_{n,n}$. Kies de volgorde waarin we de elementen van W schrijven zò, dat het eerste element uit de eerste kolom

van $R_{n,n}$ komt, het tweede element uit de tweede kolom van $R_{n,n}$, etc.
We kunnen dan schrijven:

$$W = \{(i_1,1),\ldots, (i_k,k),\ldots, (i_n,n)\}$$

en we vinden (wegens (*)):

$$\begin{aligned} A(W) &= \mathrm{sign}(W)\; z_{i_1,1} \cdots z_{i_k,k} \cdots z_{i_n,n} = \\ &= \mathrm{sign}(W)\; z_{i_1,1} \cdots (z'_{i_k,k} + z''_{i_k,k}) \cdots z_{i_n,n} = \\ &= \mathrm{sign}(W)\; z'_{i_1,1} \cdots z'_{i_k,k} \cdots z'_{i_n,n} + \\ &\quad + \mathrm{sign}(W)\; z''_{i_1,1} \cdots z''_{i_k,k} \cdots z''_{i_n,n} = \\ &= A'(W) + A''(W). \end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{W\in\mathcal{W}_n} A(W) = \sum_{W\in\mathcal{W}_n} (A'(W) + A''(W)) = \\ &= \sum_{W\in\mathcal{W}_n} A'(W) + \sum_{W\in\mathcal{W}_n} A''(W) = \det(A') + \det(A'') \end{aligned}$$

waarmee de rekenregel bewezen is. □

I.4.13 <u>Rekenregel</u>: <u>Als</u>

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{\;B\;} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} & \boxed{\;C\;} \end{array}\right) \quad \underline{\text{en}} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{\;B\;} & \begin{matrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{matrix} & \boxed{\;C\;} \end{array}\right)$$

<u>twee (n × n)-matrices zijn, waarbij geldt</u>:

$$a_i = \alpha a'_i \qquad (i = 1,\ldots, n\ ;\ \alpha \in \mathbb{C}),$$

<u>dan is</u>

$$\det(A) = \alpha \det(A').$$

Bewijs: Dit gaat analoog aan het bewijs van de voorgaande rekenregel. Neem aan dat de elementen a_i van A en a_i' van A' voorkomen in de k^{de} kolom van A, resp. A'. Schrijf:

$$A = (z_{ij}) \quad ; \quad A' = (z_{ij}').$$

Dan is gegeven:

$$(*) \qquad \begin{cases} z_{ij} = z_{ij}' & \text{als } j \neq k \quad (i = 1,\ldots, n) \\ z_{ik} = \alpha z_{ik}' & \qquad\qquad (i = 1,\ldots, n). \end{cases}$$

Kies een willekeurige n-greep W van $\mathcal{R}_{n,n}$. Door de elementen van W in een geschikte volgorde te schrijven verkrijgen we:

$$W = \{(i_1,1),\ldots, (i_k,k),\ldots, (i_n,n)\}$$

zodat

$$\begin{aligned} A(W) &= \mathrm{sign}(W)\, z_{i_1,1} \cdots z_{i_k,k} \cdots z_{i_n,n} = \\ &= \mathrm{sign}(W)\, z_{i_1,1}' \cdots (\alpha z_{i_k,k}') \cdots z_{i_n,n}' = \\ &= \alpha\, \mathrm{sign}(W)\, z_{i_1,1}' \cdots z_{i_k,k}' \cdots z_{i_n,n}' = \alpha\, A'(W). \end{aligned}$$

Derhalve is:

$$\det(A) = \sum_{W \in \mathcal{W}_n} A(W) = \sum_{W \in \mathcal{W}_n} \alpha A'(W) = \alpha \sum_{W \in \mathcal{W}_n} A'(W) = \alpha \det(A'). \ \square$$

I.4.14 Gevolg: Als

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \ \underline{\text{en}} \ A' = \begin{pmatrix} z_{11}' & \cdots & z_{1n}' \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1}' & \cdots & z_{nn}' \end{pmatrix}$$

twee ($n \times n$)-matrices zijn en er geldt:

$$z_{ij} = \alpha\, z'_{ij} \qquad (i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n;\ \alpha \in \mathbb{C}),$$

dan is

$$\det(A) = \alpha^n \det(A').$$

Bewijs: Ga na dat dit volgt uit I.4.13! □

I.4.15 Gevolg: Als A een $(n \times n)$-matrix is waarin een kolom voorkomt waarvan alle elementen 0 zijn, dan is $\det(A) = 0$.

Bewijs: We hebben (volgens I.4.13):

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} \boxed{\;B\;} & \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\end{matrix} & \boxed{\;C\;} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boxed{\;B\;} & \begin{matrix}0\cdot 1\\0\cdot 1\\\vdots\\0\cdot 1\end{matrix} & \boxed{\;C\;} \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \det\begin{pmatrix} \boxed{\;B\;} & \begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\end{matrix} & \boxed{\;C\;} \end{pmatrix} = 0$$

waarmee de bewering bewezen is. □

I.4.16 Propositie: Zij A een $(n \times n)$-matrix en $\Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$ een roostertransformatie van $\mathcal{R}_{n,n}$. Zij A' de $(n \times n)$-matrix die uit A ontstaat door Ω op A toe te passen. Is Ω een even roostertransformatie, dan is $\det(A) = \det(A')$; is Ω een oneven roostertransformatie, dan is $\det(A) = -\det(A')$.

Bewijs: De roostertransformatie $\Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathcal{R}_{n,n}$ induceert volgens propositie I.3.30 een bijectieve afbeelding

$$\Omega : \mathcal{W}_n \to \mathcal{W}_n.$$

Nu is $\mathcal{W}_n$ een eindige verzameling, bestaande uit $N = n!$ termen (cf. het bewijs van I.3.30). Zeg: $\mathcal{W}_n = \{W_1, W_2, \ldots, W_N\}$. Nu behoort er - omdat Ω bijectief is - bij elke $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ precies één $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ met

$W_i = \Omega(W_j)$. We kunnen dus, door eventueel de volgorde van de elementen $W_1, W_2, \dots, W_N$ van $\mathcal{W}_n$ anders te kiezen, ook schrijven: $\mathcal{W}_n = \{\Omega(W_1), \Omega(W_2), \dots, \Omega(W_n)\}$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{W\in\mathcal{W}_n} A(W) = A(W_1) + A(W_2) + \dots + A(W_N) = \\ &= A(\Omega(W_1)) + A(\Omega(W_2)) + \dots + A(\Omega(W_N)) = \\ &= \sum_{W\in\mathcal{W}} A(\Omega(W)).\end{aligned} \tag{$*$}$$

Zij nu A de matrix gegeven door de afbeelding $f : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathbb{C}$. Dus

$$A = \begin{pmatrix} f(1,1) & \dots & f(1,n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(n,1) & \dots & f(n,n) \end{pmatrix}.$$

A' is de $(n \times n)$-matrix die uit A ontstaat door Ω op A toe te passen:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_{n,n} \arrow[r, "\Omega"] \arrow[r, bend right, "f \circ \Omega"'] & \mathcal{R}_{n,n} \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$

A' wordt dus gegeven door de afbeelding

$$f \circ \Omega : \mathcal{R}_{n,n} \to \mathbb{C},$$

zodat

$$A' = \begin{pmatrix} f(\Omega(1,1)) & \dots & f(\Omega(1,n)) \\ \vdots & & \vdots \\ f(\Omega(n,1)) & \dots & f(\Omega(n,n)) \end{pmatrix}.$$

Kies nu een willekeurige n-greep W van $\mathcal{R}_{n,n}$, zeg

$$W = \{(i_1,j_1), \dots, (i_n,j_n)\}.$$

Dan is

$$\Omega(W) = \{\Omega(i_1,j_1),\dots,\ \Omega(i_n,j_n)\}$$

zodat

$$\begin{aligned} A'(W) &= \text{sign}(W) \cdot f(\Omega(i_1,j_1)) \cdot \ldots \cdot f(\Omega(i_n,j_n)) = \\ &= \frac{\text{sign}(W)}{\text{sign}(\Omega(W))} \cdot \text{sign}(\Omega(W)) \cdot f(\Omega(i_1,j_1)) \cdot \ldots \cdot f(\Omega(i_n,j_n)) = \\ &= \frac{\text{sign}(W)}{\text{sign}(\Omega(W))} \cdot A(\Omega(W)). \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\det(A') = \sum_{W\in \mathcal{W}_n} A'(W) = \sum_{W\in \mathcal{W}_n} \frac{\text{sign}(W)}{\text{sign}(\Omega(W))} \cdot A(\Omega(W)) \qquad (**)$$

Stel eerst dat Ω een even roostertransformatie is. Dat wil zeggen dat voor iedere $W \in \mathcal{W}_n$ geldt: $\text{sign}(W) = \text{sign}(\Omega(W))$. In dit geval volgt uit (**) en (*):

$$\det(A') = \sum_{W\in \mathcal{W}_n} A(\Omega(W)) = \det(A).$$

Is Ω een oneven roostertransformatie, dan is voor iedere $W \in \mathcal{W}_n$: $\text{sign}(W) = -\ \text{sign}(\Omega(W))$, oftewel, voor iedere $W \in \mathcal{W}_n$ geldt:

$$\frac{\text{sign}(W)}{\text{sign}(\Omega(W))} = -1.$$

In dat geval volgt uit (**) en (*):

$$\det(A') = \sum_{W\in \mathcal{W}_n} (-1)A(\Omega(W)) = -\sum_{W\in \mathcal{W}_n} A(\Omega(W)) = -\ \det(A)$$

zodat de propositie bewezen is. □

I.4.17 Gevolg: Voor iedere ($n \times n$)-matrix A geldt (cf. I.3.51):

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Bewijs: Zij $T : \mathcal{R}_{n,n} \xrightarrow[T]{} \mathcal{R}_{n,n}$ de transpositie van het rooster $\mathcal{R}_{n,n}$ (cf. I.3.32). Dan is A^T de matrix, die uit A ontstaat door T op A toe te passen (cf. I.3.51). Volgens I.3.54 is T een even roostertransformatie, zodat uit I.4.16 direkt volgt dat $\det(A) = \det(A^T)$. □

I.4.18 Gevolg: Zij A een ($n \times n$)-matrix. Zij A' de ($n \times n$)-matrix die uit A ontstaat door in A twee verschillende kolommen onderling van plaats te verwisselen. Dan is

$$\det(A) = -\det(A').$$

Bewijs: Laat A' uit A ontstaan zijn door de k^e en l^e kolom ($k \neq l$) van A onderling van plaats te verwisselen. (Dus: als

$$A = \left(\boxed{B} \;\; \underset{\substack{\uparrow\\ k^e \text{ kolom}}}{\begin{matrix} z_{1k} \\ \vdots \\ z_{nk} \end{matrix}} \;\; \boxed{C} \;\; \underset{\substack{\uparrow\\ l^e \text{ kolom}}}{\begin{matrix} z_{1l} \\ \vdots \\ z_{nl} \end{matrix}} \;\; \boxed{D} \right)$$

dan is

$$A' = \left(\boxed{B} \;\; \begin{matrix} z_{1l} \\ \vdots \\ z_{nl} \end{matrix} \;\; \boxed{C} \;\; \begin{matrix} z_{1k} \\ \vdots \\ z_{nk} \end{matrix} \;\; \boxed{D} \right) \quad).$$

De lezer ga na dat A' uit A ontstaat door de roostertransformatie K_τ (cf. I.3.47) met $\tau = \tau_{k,l}^{(n)}$ (cf. I.2.24) toe te passen op A. Nu is volgens I.3.56 K_τ - omdat τ als verwisseling een oneven permutatie is - een oneven roostertransformatie. Dus geldt volgens I.4.16:

$$\det(A) = -\det(A'). \ \square$$

We kunnen nu - door de rekenregels I.4.12, I.4.13, I.4.15 en I.4.18 te combineren met rekenregel I.4.17 - analoge rekenregels voor de determinant afleiden die betrekking hebben op rijen in plaats van kolommen van matrices.

Allereerst nog een notatie-afspraak.

I.4.19 Notatie: Zij A een (niet noodzakelijk vierkante!) $(m \times n)$-matrix, zeg:

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dan heet de $(n \times m)$-matrix

$$\begin{pmatrix} z'_{11} & \cdots & z'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z'_{n1} & \cdots & z'_{nm} \end{pmatrix}$$

die gegeven is door:

$$z'_{ij} = z_{ji} \qquad (i = 1,\ldots, n;\ j = 1,\ldots, m)$$

de getransponeerde matrix van A. Deze matrix wordt aangeduid met:

$$A^T.$$

Merk op dat de hierboven gegeven definitie in het geval van vierkante matrices overeenstemt met I.3.51.

I.4.20 <u>Voorbeeld</u>: Als

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

dan is

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 8 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

I.4.21 <u>Rekenregel: Als</u>

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad B \qquad} \\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_n \\ \boxed{\qquad C \qquad} \end{pmatrix};\ A' = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad B \qquad} \\ a_1'\ a_2'\ \cdots\ a_n' \\ \boxed{\qquad C \qquad} \end{pmatrix};\ A'' = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad B \qquad} \\ a_1''\ a_2''\ \cdots\ a_n'' \\ \boxed{\qquad C \qquad} \end{pmatrix}$$

<u>drie $(n \times n)$-matrices zijn waarbij geldt</u>:

$$a_i = a_i' + a_i'' \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

<u>dan is</u>

$$\det(A') + \det(A'') = \det(A).$$

<u>Bewijs</u>: Het is direkt duidelijk dat:

$$A^T = \begin{pmatrix} \boxed{B^T} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} & \boxed{C^T} \end{pmatrix};\ (A')^T = \begin{pmatrix} \boxed{B^T} & \begin{matrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{matrix} & \boxed{C^T} \end{pmatrix};\ (A'')^T = \begin{pmatrix} \boxed{B^T} & \begin{matrix} a_1'' \\ a_2'' \\ \vdots \\ a_n'' \end{matrix} & \boxed{C^T} \end{pmatrix}.$$

Volgens I.4.12 en I.4.17 volgt dan:

$$\det(A') + \det(A'') = \det((A')^T) + \det((A'')^T) = \det(A^T) = \det(A),$$

zodat de rekenregel geldt. □

I.4.22 *Rekenregel*: *Als*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad B \qquad} \\ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \\ \boxed{\qquad C \qquad} \end{pmatrix} \ \underline{\text{en}} \ A' = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad B \qquad} \\ a_1' \ a_2' \ \dots \ a_n' \\ \boxed{\qquad C \qquad} \end{pmatrix}$$

twee (n × n)-matrices zijn waarbij geldt:

$$a_i = \alpha \ a_i' \qquad (i = 1, \dots, n; \ \alpha \in \mathbb{C}),$$

dan is

$$\det(A) = \alpha \ \det(A').$$

Bewijs: Wegens

$$A^T = \left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{\ B^T \ } & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} & \boxed{\ C^T \ } \end{array} \right); \ (A')^T = \left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{\ B^T \ } & \begin{matrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{matrix} & \boxed{\ C^T \ } \end{array} \right)$$

volgt uit I.4.13 en I.4.17:

$$\det(A) = \det(A^T) = \alpha \ \det((A')^T) = \alpha \ \det(A'),$$

zodat de rekenregel bewezen is. □

I.4.23 <u>Rekenregel</u>: <u>Als</u> A <u>een</u> $(n \times n)$<u>-matrix is waarin een rij voorkomt waarvan alle elementen</u> 0 <u>zijn, dan is</u> $\det(A) = 0$.

<u>Bewijs</u>: In A^T komt een kolom voor waarvan alle elementen 0 zijn. Dus volgt uit I.4.15 en I.4.17: $\det(A) = \det(A^T) = 0$. □

I.4.24 <u>Rekenregel</u>: <u>Zij</u> A <u>een</u> $(n \times n)$<u>-matrix</u>. <u>Zij</u> A' <u>de</u> $(n \times n)$<u>-matrix die uit</u> A <u>ontstaat door in</u> A <u>twee verschillende rijen onderling van plaats te verwisselen. Dan is</u>

$$\det(A) = -\det(A').$$

<u>Bewijs</u>: $(A')^T$ ontstaat uit A^T door twee verschillende kolommen van A^T onderling van plaats te verwisselen. Uit I.4.18 en I.4.17 volgt nu:

$$\det(A) = \det(A^T) = -\det(A')^T = -\det(A'),$$

zodat de rekenregel bewezen is. □

We beschouwen tot slot van deze paragraaf nog een bijzonder type vierkante matrices en hun determinanten.

I.4.25 <u>Definitie</u>: Een $(n \times n)$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

heet een <u>boven-driehoeksmatrix</u> als $z_{ij} = 0$ voor elke i,j met $i > j$.
A heet een <u>onder-driehoeksmatrix</u> als $z_{ij} = 0$ voor elke i,j met $i < j$.
A heet een <u>diagonaal-matrix</u> als $z_{ij} = 0$ voor elke i,j met $i \neq j$.

I.4.26 Voorbeeld: Zij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan zijn B en E diagonaal-matrices; B, C en E boven-driehoeksmatrices en A, B, D en E onder-driehoeksmatrices.

I.4.27 Rekenregel: Als de $(n \times n)$-matrix A een boven-driehoeksmatrix is, dan is det(A) gelijk aan het produkt van de elementen op de hoofddiagonaal van A.

Bewijs: Zij W een willekeurige n-greep van $\mathcal{R}_{n,n}$. Door de elementen van W zodanig te ordenen dat het eerste element van W uit de eerste kolom van $\mathcal{R}_{n,n}$ komt, het tweede element uit de tweede kolom, etc., kunnen we schrijven:

$$W = \{(i_1,1), (i_2,2), \dots, (i_n,n)\}.$$

Zij

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dan is elke z_{ij} met $i > j$ gelijk 0. Nu is

$$A(W) = \text{sign}(W) \cdot z_{i_1 1} \cdot z_{i_2 2} \cdots z_{i_n n}.$$

Komt er nu een element (i_k,k) in W voor met $i_k > k$, dan is bijgevolg

$$z_{i_k,k} = 0$$

zodat $A(W) = 0$. Omdat

$$\det(A) = \sum_{W \in \mathcal{W}_n} A(W)$$

behoeven we - om det(A) te bepalen - uiteraard alleen die termen A(W) te kennen met $A(W) \neq 0$. We behoeven dus alleen die n-grepen $W = \{(i_1,1),\ldots, (i_n,n)\}$ te beschouwen die voldoen aan de voorwaarden:

$$i_1 \le 1,\ i_2 \le 2,\ldots,\ i_n \le n. \qquad (*)$$

We zullen bewijzen dat alleen de n-greep $W_0 = \{(1,1), (2,2),\ldots, (n,n)\}$ aan deze voorwaarden voldoet.

Zij $W = \{(i_1,1),\ldots, (i_n,n)\}$ een n-greep, zodat $W \neq W_0$. Dan is niet voor iedere $k \in \{1,\ldots, n\}$ i_k gelijk aan k. Kies het grootste getal $k \in \{1,\ldots, n\}$ waarvoor geldt: $i_k \neq k$.

Als $i_k > k$, dan voldoet W niet aan (*). Stel nu: $i_k < k$. Omdat W een n-greep is, is $[i_1,\ldots, i_k, i_{k+1},\ldots, i_n]$ een n-permutatie. Omdat k het grootste getal uit $\{1,\ldots, n\}$ is, waarvoor $i_k \neq k$ volgt: $i_{k+1} = k+1,\ldots, i_n = n$. Dus we hebben de n-permutatie

$$[i_1,\ldots, i_k, k+1,\ldots, n] \quad (i_k \neq k). \qquad (**)$$

In het n-tupel (**) komen alle getallen $1,\ldots, n$ precies één keer voor. Dus komt k in het n-tupel (**) voor. Omdat $i_k \neq k$, komt k voor onder de getallen $i_1,\ldots, i_{k-1}$. Zeg, $k = i_s$ $(s \le k-1)$. Maar dan geldt:

$$i_s = k > k-1 \ge s,$$

zodat $i_s > s$. Dus voldoet W niet aan (*).

We hebben nu bewezen dat alleen de n-greep W_0 voldoet aan de voorwaarden (*). Dus is, voor elke n-greep $W \neq W_0$, $A(W) = 0$. Bijgevolg:

$$\det(A) = A(W_0).$$

Nu is $\operatorname{sign}(W_0) = \operatorname{sign}[1,2,\dots,n] \cdot \operatorname{sign}[1,2,\dots,n] = +1$, zodat

$$A(W_0) = z_{11}\, z_{22} \cdots z_{nn},$$

hetgeen de rekenregel bewijst. □

I.4.28 <u>Gevolg</u>: <u>Als</u> A <u>een diagonaal-matrix is</u>, <u>dan is</u> det(A) <u>gelijk aan het produkt van de elementen op de hoofddiagonaal van</u> A.

<u>Bewijs</u>: Omdat een diagonaal-matrix tevens een boven-driehoeksmatrix is, volgt dit uit I.4.27. □

I.4.29 <u>Gevolg</u>: <u>Als de $(n \times n)$-matrix</u> A <u>een onder-driehoeksmatrix is, dan is</u> det(A) <u>gelijk aan het produkt van de elementen op de hoofddiagonaal van</u> A.

<u>Bewijs</u>: A^T is een boven-driehoeksmatrix. Ook zijn de hoofddiagonalen van A en van A^T dezelfde. I.4.29 volgt - wegens $\det(A) = \det(A^T)$ - dus direkt uit I.4.27. □

I.4.30 <u>Gevolg</u>: <u>Als</u> I_n <u>de eenheids-$(n \times n)$-matrix is</u>, <u>dan is</u> $\det(I_n) = 1$.

<u>Bewijs</u>: Dit volgt direkt uit I.4.28. □

* * *

II. Vectorruimten en lineaire afbeeldingen

§II.1. Vectorruimten

II.1.1 We gaan in deze paragraaf de begrippen "vectorruimte over $\mathbb{R}$" en "vectorruimte over $\mathbb{C}$" definiëren, waarbij $\mathbb{R}$ de verzameling van reële getallen is en $\mathbb{C}$ de verzameling van complexe getallen. Omdat deze twee begrippen volstrekt analoog gedefinieerd worden, zullen we - om dubbel werk te voorkomen - het begrip "vectorruimte over $\mathbb{F}$" definiëren, waarbij de lezer voor $\mathbb{F}$ zowel $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ kan lezen. De elementen van $\mathbb{F}$ zullen we "getallen" noemen. In $\mathbb{F}$ kunnen we vermenigvuldigen en optellen, en we hebben het element 0 en het element 1 in $\mathbb{F}$. Als $a,b \in \mathbb{F}$ dan is $a + b$ de som van a en b en ab het product van a en b. Bovendien voldoet $\mathbb{F}$ aan de volgende eigenschappen: Voor elke $a \in \mathbb{F}$ is $a + 0 = a$ en $a \cdot 1 = a$. Voor elk tweetal elementen $a,b \in \mathbb{F}$ is $a + b = b + a$ en $ab = ba$. Voor elk drietal elementen $a,b,c \in \mathbb{F}$ is $(a + b) + c = a + (b + c)$ en $(ab)c = a(bc)$, terwijl ook $a(b + c) = ab + ac$. Elk element $a \in \mathbb{F}$ heeft een tegengesteld element $-a \in \mathbb{F}$, en als $a \neq 0$ heeft a ook een invers element: $\frac{1}{a} = a^{-1}$.

II.1.2 Definitie: Als V een verzameling is, dan heet een afbeelding

$$m : V \amalg V \to V$$

een binaire operatie op V.

II.1.3 Voorbeeld: Zij $V = S_n$, de verzameling van alle n-permutaties. Definieer een afbeelding

$$m : S_n \amalg S_n \to S_n$$

door:

$$m(\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1 \circ \sigma_2.$$

(Als σ_1 en σ_2 n-permutaties zijn, dan is ook hun samenstelling $\sigma_1 \circ \sigma_2$ een n-permutatie.)

II.1.4 Voorbeeld: Kies $V = M_{k,l}$, de verzameling van alle $(k \times l)$-matrices uit $\mathbb{F}$. Kies als binaire operatie op $M_{k,l}$:

$$m : M_{k,l} \amalg M_{k,l} \to M_{k,l}$$

gedefinieerd als volgt: als $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ twee $(k \times l)$-matrices zijn (cf. I.4.11), dan is per definitie

$$m(A,B) = (c_{ij}) ,$$

waarbij voor elke $i \in \{1,\ldots, k\}$ en elke $j \in \{1,\ldots, l\}$ geldt: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

In het geval $k = 1$, $l = 4$ krijgen we bijvoorbeeld:

$$m\big((a,b,c,d),\ (a',b',c',d')\big) = (a + a',\ b + b',\ c + c',\ d + d')$$

en in het geval $k = 3$, $l = 1$:

$$m\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}$$

terwijl als $k = l = 2$ we bijvoorbeeld krijgen:

$$m\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

We gaan nu een bijzonder type binaire operaties nader bekijken:

II.1.5 <u>Definitie</u>: Als V een verzameling is en

$$m : V \amalg V \to V$$

is een binaire operatie die voldoet aan de volgende vier voorwaarden:

(i) Er bestaat een element $v_0 \in V$ zodat voor ieder element $v \in V$ geldt: $m(v_0,v) = v$;

(ii) Voor elk tweetal elementen $v,w \in V$ geldt: $m(v,w) = m(w,v)$;

(iii) Er is bij ieder element $v \in V$ een element $v^* \in V$ zodat $m(v,v^*) = v_0$;

(iv) Voor elk drietal elementen $u,v,w \in V$ geldt:
$m(m(u,v), w) = m(u, m(v,w))$;
dan heet het paar (V,m) een <u>abelse groep</u>.

II.1.6 <u>Voorbeeld</u>: Kies, zoals in II.1.4, het paar $(M_{k,l},m)$ waarbij $M_{k,l}$ de verzameling van alle $(k \times l)$-matrices is en m de binaire operatie op $M_{k,l}$, gegeven door:

$$m\big((a_{ij}), (b_{ij})\big) = (c_{ij}) \quad , \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

We verifiëren - door de voorwaarden (i), (ii), (iii), (iv) van II.1.5 stuk voor stuk in ons geval te controleren - dat het paar $(M_{k,l},m)$ een abelse groep is:

<u>ad (i)</u>: Kies de $(k \times l)$-matrix $0 = (\mu_{ij})$ waarbij $\mu_{ij} = 0$ voor iedere $i \in \{1,\ldots, k\}$ en iedere $j \in \{1,\ldots, l\}$. We laten zien dat voor iedere $(k \times l)$-matrix $A = (a_{ij}) \in M_{k,l}$ geldt: $m(A,0) = A$ (dan hebben we voorwaarde (i) geverifieerd). Welnu,

$$m(A,0) = m\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+0 & \cdots & a_{1l}+0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+0 & \cdots & a_{kl}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix} = A$$

zodat (i) geverifieerd is.

<u>ad (ii)</u>: We moeten laten zien dat voor ieder tweetal $(k \times l)$-matrices A en B uit $\mathbb{F}$ geldt: $m(A,B) = m(B,A)$. Welnu, als $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ dan hebben we:

$$m(A,B) = m\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kl} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1l}+b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kl}+b_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \cdots & b_{1l}+a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1}+a_{k1} & \cdots & b_{kl}+a_{kl} \end{pmatrix} =$$

$$m\left(\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kl} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix} \right) = m(B,A).$$

ad (iii): We moeten aantonen dat er bij iedere $(k \times l)$-matrix A uit $\mathbb{F}$ een $(k \times l)$-matrix A^* uit $\mathbb{F}$ bestaat zodat $m(A,A^*) = 0$ (cf. ad (i)).
Zij $A = (a_{ij})$. Kies $A^* = (a^*_{ij})$ met $a^*_{ij} = -a_{ij}$ voor iedere $i \in \{1,\ldots, k\}$ en iedere $j \in \{1,\ldots, l\}$. Dan krijgen we:

$$m(A,A^*) = m\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^*_{11} & \cdots & a^*_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a^*_{k1} & \cdots & a^*_{kl} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+a^*_{11} & \cdots & a_{1l}+a^*_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+a^*_{k1} & \cdots & a_{kl}+a^*_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & \cdots & a_{1l}-a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}-a_{k1} & \cdots & a_{kl}-a_{kl} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

ad (iv): Kies nu een drietal $(k \times l)$-matrices uit $\mathbb{F}$, zeg: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ en $C = (c_{ij})$. Zij

$$m(A,B) = (d_{ij}) = D \qquad ; \qquad m(B,C) = (e_{ij}) = E.$$

Dat wil zeggen: voor iedere $i \in \{1,\ldots, k\}$ en elke $j \in \{1,\ldots, l\}$ geldt:

$$d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad ; \qquad e_{ij} = b_{ij} + c_{ij}.$$

We moeten verifiëren dat geldt: $m(m(A,B),C) = m(A,m(B,C))$, oftewel dat $m(D,C) = m(A,E)$. Als we noteren:

$$m(D,C) = (f_{ij}) \qquad ; \qquad m(A,E) = (g_{ij}),$$

dan hebben we voor iedere $i \in \{1,\dots, k\}$ en iedere $j \in \{1,\dots, l\}$:

$$d_{ij} + c_{ij} = f_{ij} \qquad ; \qquad a_{ij} + e_{ij} = g_{ij}$$

en we moeten laten zien dat voor iedere $i \in \{1,\dots, k\}$ en $j \in \{1,\dots, l\}$ geldt: $f_{ij} = g_{ij}$. Welnu,

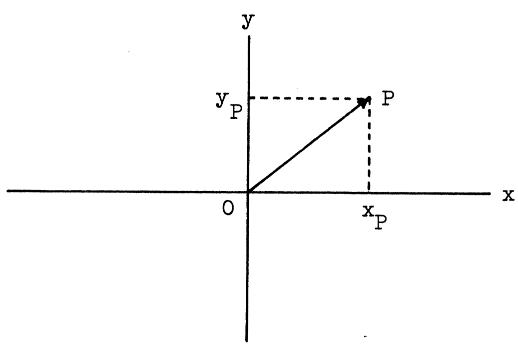
$$f_{ij} = d_{ij} + c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) =$$

$$= a_{ij} + e_{ij} = g_{ij},$$

zodat ook aan voorwaarde (iv) is voldaan.

II.1.7 Voorbeeld: Het paar (S_n,m) uit voorbeeld II.1.3 is geen abelse groep. De lezer ga na dat wel aan de eisen (i), (iii) en (iv) van II.1.5 is voldaan maar niet aan voorwaarde (ii): als σ_1 en σ_2 twee n-permutaties zijn, dan zijn de samenstellingen $\sigma_1 \circ \sigma_2$ en $\sigma_2 \circ \sigma_1$ in het algemeen niet gelijk.

II.1.8 Voorbeeld: Beschouw het euclidische platte vlak, voorzien van een cartesisch assenstelsel.



Elk punt P van dit vlak kunnen we aangeven door zijn coördinaten: als P als x-coördinaat $x_P \in \mathbb{R}$ heeft en als y-coördinaat $y_P \in \mathbb{R}$, dan kunnen we het punt P geven door de volgende (2×1)-matrix uit $\mathbb{R}$:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}.$$

Omgekeerd behoort bij elke (2×1)-matrix $\vec{Q}$ uit $\mathbb{R}$, zeg

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

het punt Q uit het vlak met x-coördinaat $x_Q = a$ en y-coördinaat $y_Q = b$. We zien dat elke (2×1)-matrix uit $\mathbb{R}$ met een punt van het vlak correspondeert en omgekeerd. Met de oorsprong O correspondeert zo de matrix

$$\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Noem dit euclidische platte vlak, voorzien van een cartesisch assenstelsel $\mathbb{E}_2$. We definiëren nu op $\mathbb{E}_2$ een binaire operatie

$$m : \mathbb{E}_2 \amalg \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$$

als volgt: als P en Q twee punten uit $\mathbb{E}_2$ zijn met corresponderende matrices

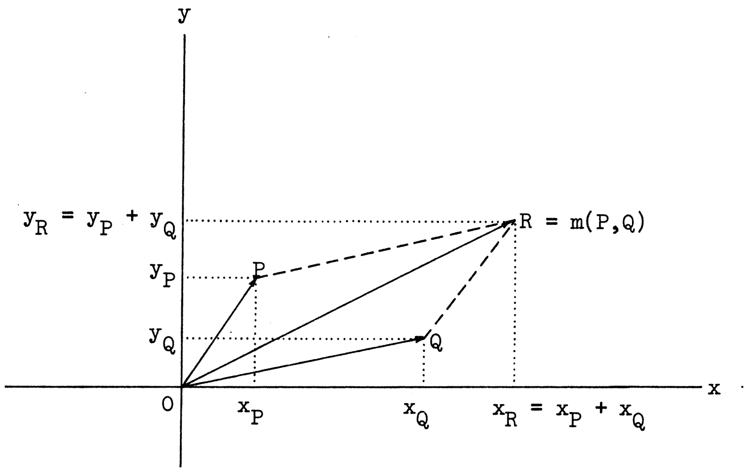
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}, \qquad \text{resp.} \qquad \vec{Q} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix},$$

dan definiëren we

$$m(P,Q) = R ,$$

waarbij het punt R uit $\mathbb{E}_2$ gegeven wordt door de corresponderende matrix

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P+x_Q \\ y_P+y_Q \end{pmatrix}.$$



We laten zien dat het paar ($\mathbf{E}_2$,m) een abelse groep is. Hiertoe controleren we weer de voorwaarden (i) t/m (iv) uit II.1.5:

<u>ad (i)</u>: Kies het punt $0 \in \mathbf{E}_2$ (0 is de oorsprong van het assenstelsel). Dan geldt voor ieder punt $P \in \mathbf{E}_2$: m(0,P) = P. Immers, zijn

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

de met 0, resp. P corresponderende (2 × 1)-matrices uit $\mathbf{R}$, dan correspondeert met m(0,P) de matrix

$$\begin{pmatrix} 0+x_P \\ 0+y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \vec{P},$$

zodat m(0,P) = P is. Hiermee is (i) geverifieerd.

<u>ad (ii)</u>: Als $P,Q \in \mathbf{E}_2$, dan zijn de matrices, corresponderend met P, resp. Q:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}.$$

De met m(P,Q), resp. m(Q,P) corresponderende matrices zijn

$$\begin{pmatrix} x_P+x_Q \\ y_P+y_Q \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} x_Q+x_P \\ y_Q+y_P \end{pmatrix}$$

en deze zijn gelijk. Dus m(P,Q) = m(Q,P).

ad (iii): Als $P \in \mathbf{E}_2$ correspondeert met de matrix

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

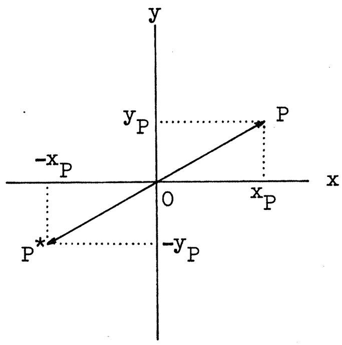
dan kunnen we het punt $P^* \in \mathbf{E}_2$ kiezen dat correspondeert met

$$\begin{pmatrix} -x_P \\ -y_P \end{pmatrix}.$$

Dan correspondeert $m(P,P^*)$ met de matrix

$$\begin{pmatrix} x_P+(-x_P) \\ y_P+(-y_P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

zodat $m(P,P^*) = 0$.



ad (iv): Als de punten P,Q,R uit $\mathbf{E}_2$ corresponderen met de matrices

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}, \quad \text{resp. } \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix},$$

dan corresponderen $m(m(P,Q),R)$ en $m(P,m(Q,R))$ met de matrices

$$\begin{pmatrix} (x_P+x_Q)+x_R \\ (y_P+y_Q)+y_R \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} x_P+(x_Q+x_R) \\ y_P+(y_Q+y_R) \end{pmatrix}$$

en omdat deze matrices gelijk zijn is ook $m(m(P,Q),R) = m(P,m(Q,R))$.

Dus is $(\mathbf{E}_2,m)$ een abelse groep.

II.1.9 Afspraak: Is V een verzameling, en

$$m : V \Pi V \to V$$

een binaire operatie op V, zodat (V,m) een abelse groep is, dan zullen we (louter formeel!) in plaats van $m(v_1,v_2)$ vaak noteren: $v_1 + v_2$. Ook zullen we zeggen dat $v_1 + v_2 = m(v_1,v_2)$ de <u>som</u> is van v_1 en v_2. De voorwaarden (i) t/m (iv) van II.1.5 laten zich nu als volgt schrijven:

(i) Er bestaat een element $v_0 \in V$ zodat voor ieder element $v \in V$ geldt: $v_0 + v = v$;

(ii) Voor elk tweetal elementen $v,w \in V$ is $v + w = w + v$;

(iii) Er is bij ieder element $v \in V$ een element $v^* \in V$ zodat $v + v^* = v_0$;

(iv) Voor ieder drietal elementen $u,v,w \in V$ geldt: $(u + v) + w = u + (v + w)$.

Vervolgens maken we nog enige formele notatie-afspraken.

Het element $v_0 \in V$ heet een <u>nul-element van de abelse groep</u> (V,m). (We zullen hieronder laten zien dat iedere abelse groep precies één nul-element heeft.) In plaats van v_0 noteren we ook vaak (formeel!) voor het nul-element: 0.

Als v een willekeurig element van V is en v^* is een element uit V met de eigenschap dat $v + v^* = 0$, dan is v door deze eigenschap uniek bepaald, zoals we hierna nog zullen bewijzen. v^* heet <u>de inverse van</u> v <u>in de abelse groep</u> (V,m), en wordt formeel vaak aangegeven met $-v$ in plaats van v^*.

We zullen bovenstaande formele notatie-afspraken in het vervolg vrijelijk gebruiken, en m de <u>optelling van de abelse groep</u> (V,m) noemen.

II.1.10 <u>Opmerking</u>: <u>Elke abelse groep heeft precies één nul-element</u>.

<u>Bewijs</u>: Zij (V,m) een abelse groep en laten 0 en 0' twee nul-elementen van deze abelse groep zijn. Dit wil zeggen, voor ieder element $v \in V$ geldt: $0 + v = v$ en $0' + v = v$. In het bijzonder geldt: $0 + 0' = 0'$ en $0' + 0 = 0$. Volgens eigenschap (ii) geldt verder:

$$0 + 0' = 0' + 0,$$

zodat we verkrijgen:

$$0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0,$$

waarmee de opmerking bewezen is.

II.1.11 <u>Opmerking</u>: <u>Elk element van een abelse groep heeft precies één inverse.</u>

<u>Bewijs</u>: Zij (V,m) een abelse groep en v een element van V. Laten v_1^* en v_2^* twee inversen zijn van v in (V,m). Dan geldt:

$$v + v_1^* = 0 \qquad ; \qquad v + v_2^* = 0.$$

Gebruik makend van de eigenschappen (i) t/m (iv) uit II.1.9 volgt dan:

$$v_2^* = 0 + v_2^* = (v + v_1^*) + v_2^* = (v_1^* + v) + v_2^* =$$

$$= v_1^* + (v + v_2^*) = v_1^* + 0 = v_1^*,$$

zodat $v_1^* = v_2^*$, hetgeen de opmerking bewijst. □

II.1.12 <u>Afspraak</u>: Als V een verzameling is en m_1,m_2 zijn twee binaire operaties op V zodat (V,m_1) en (V,m_2) beide abelse groepen zijn, dan moeten we, als we spreken over V als abelse groep, steeds aangeven welke operatie dan bedoeld wordt. Vaak echter is uit de context duidelijk welke binaire operatie dat is. <u>In dat geval</u> zullen we (slordig maar niet verwarrend) in plaats van over een abelse groep (V,m) ook wel kortheidshalve spreken over een abelse groep V.

II.1.13 <u>Definitie</u>: Is V een verzameling, dan heet een afbeelding

$$\sigma : \mathbb{F} \amalg V \to V$$

<u>een operatie van $\mathbb{F}$ op V.</u>

II.1.14 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de verzameling $M_{k,l}$ van alle (k × l)-matrices uit $\mathbb{F}$. Definieer als volgt een operatie

$$\sigma : \mathbb{F} \amalg M_{k,l} \to M_{k,l}$$

van $\mathbb{F}$ op $M_{k,l}$: als w een element van $\mathbb{F}$ is en $A = (a_{ij})$ is een (k × l)-matrix uit $\mathbb{F}$, dan is per definitie

$$\sigma(w,A) = (b_{ij}) \in M_{k,l},$$

waarbij voor iedere $i \in \{1,\dots, k\}$ en elke $j \in \{1,\dots, l\}$ geldt:

$$b_{ij} = w\, a_{ij}.$$

Als bijvoorbeeld $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $k = 3$, $l = 2$ en $w = \frac{1}{3}$, terwijl

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix},$$

dan vinden we met bovenstaande definitie:

$$\sigma(w,A) = \sigma(\tfrac{1}{3}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

II.1.15 <u>Definitie</u>: Zij nu V een abelse groep en

$$\sigma : \mathbb{F} \amalg V \to V$$

een operatie van $\mathbb{F}$ op V die voldoet aan de volgende vier voorwaarden:

(i) Voor elke $v,w \in V$ en elke $\lambda \in \mathbb{F}$ geldt:
$\sigma(\lambda,v+w) = \sigma(\lambda,v) + \sigma(\lambda,w)$.

(ii) Voor elke $v \in V$ en elke $\lambda,\mu \in \mathbb{F}$ geldt:
$\sigma(\lambda+\mu,v) = \sigma(\lambda,v) + \sigma(\mu,v)$.

(iii) Voor elke $v \in V$ en elke $\lambda,\mu \in \mathbb{F}$ geldt:
$\sigma(\lambda\mu,v) = \sigma(\lambda,\sigma(\mu,v))$.

(iv) Voor elke $v \in V$ geldt: $\sigma(1,v) = v$.

Dan heet σ een <u>$\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging op</u> V.

II.1.16 <u>Terminologie</u>: Als in II.1.15 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, dan heet σ een <u>reële scalaire vermenigvuldiging op</u> V; als $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dan heet σ een <u>complexe scalaire vermenigvuldiging op</u> V.

II.1.17 Voorbeeld: Beschouw weer de in II.1.14 ingevoerde operatie

$$\sigma : \mathbb{F} \amalg M_{k,l} \to M_{k,l}$$

van $\mathbb{F}$ op de verzameling van $(k \times l)$-matrices uit $\mathbb{F}$, die gegeven werd door:

$$\sigma(\lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \cdots & \lambda a_{kl} \end{pmatrix}.$$

In II.1.6 hebben we gezien dat $M_{k,l}$ met de optelling (cf. II.1.9)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1l}+b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kl}+b_{kl} \end{pmatrix}$$

een abelse groep is. We controleren vervolgens dat σ een $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging is op $M_{k,l}$. Hiertoe controleren we de voorwaarden (i) t/m (iv) van II.1.15:

ad (i): Kies $\lambda \in \mathbb{F}$ en $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{k,l}$. Dan vinden we:

$$\sigma(\lambda, A+B) = \sigma(\lambda, \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1l}+b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kl}+b_{kl} \end{pmatrix}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(a_{11}+b_{11}) & \cdots & \lambda(a_{1l}+b_{1l}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda(a_{k1}+b_{k1}) & \cdots & \lambda(a_{kl}+b_{kl}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \cdots & \lambda a_{1l}+\lambda b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1}+\lambda b_{k1} & \cdots & \lambda a_{kl}+\lambda b_{kl} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \cdots & \lambda a_{kl} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \cdots & \lambda b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda b_{k1} & \cdots & \lambda b_{kl} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma(\lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}) + \sigma(\lambda, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kl} \end{pmatrix}) =$$

$$= \sigma(\lambda, A) + \sigma(\lambda, B),$$

zodat voorwaarde (i) geverifieerd is in ons geval.

<u>ad (ii)</u>: Kies nu $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ en $A = (a_{ij}) \in M_{k,l}$. We vinden

$$\sigma(\lambda+\mu, A) = \sigma(\lambda+\mu, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)a_{11} & \cdots & (\lambda+\mu)a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ (\lambda+\mu)a_{k1} & \cdots & (\lambda+\mu)a_{kl} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\mu a_{11} & \cdots & \lambda a_{1l}+\mu a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1}+\mu a_{k1} & \cdots & \lambda a_{kl}+\mu a_{kl} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \cdots & \lambda a_{kl} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \cdots & \mu a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu a_{k1} & \cdots & \mu a_{kl} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma(\lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}) + \sigma(\mu, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}) =$$

$$= \sigma(\lambda, A) + \sigma(\mu, A),$$

waarmee (ii) geverifieerd is.

<u>ad (iii)</u>: Kies $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ en $A = (a_{ij}) \in M_{k,l}$. Er geldt:

$$\sigma(\lambda\mu,A) = \sigma(\lambda\mu,\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (\lambda\mu)a_{11} & \cdots & (\lambda\mu)a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ (\lambda\mu)a_{k1} & \cdots & (\lambda\mu)a_{kl} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(\mu a_{11}) & \cdots & \lambda(\mu a_{1l}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda(\mu a_{k1}) & \cdots & \lambda(\mu a_{kl}) \end{pmatrix} = \sigma(\lambda,\begin{pmatrix} \mu a_{11} & \cdots & \mu a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu a_{k1} & \cdots & \mu a_{kl} \end{pmatrix}) =$$

$$= \sigma\left(\lambda,\sigma(\mu,\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix})\right) = \sigma\left(\lambda,\sigma(\mu,A)\right),$$

zodat ook voorwaarde (iii) gecontroleerd is.

<u>ad (iv)</u>: Kies $A = (a_{ij}) \in M_{k,l}$. Dan hebben we

$$\sigma(1,A) = \sigma(1,\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11} & \cdots & 1\cdot a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ 1\cdot a_{k1} & \cdots & 1\cdot a_{kl} \end{pmatrix} =$$

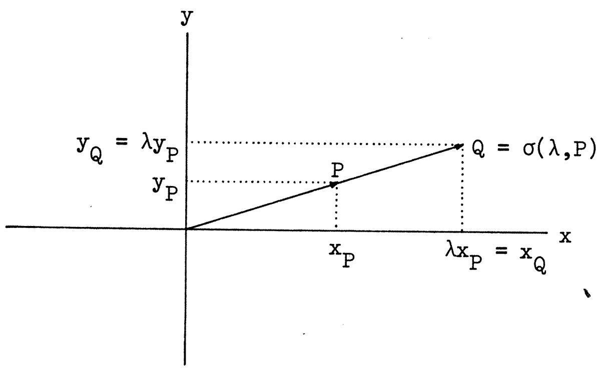
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix} = A.$$

Hiermee zijn de eigenschappen (i) t/m (iv) geverifieerd, zodat σ in dit voorbeeld een $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging is.

II.1.18 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de abelse groep $\mathbb{E}_2$ uit voorbeeld II.1.8 (met de daar gedefinieerde optelling). We definiëren op $\mathbb{E}_2$ een operatie

$$\sigma : \mathbb{R} \Pi \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$$

van $\mathbb{R}$ als volgt:



Zij λ een reëel getal en P een punt uit het platte vlak met x-coördinaat x_P en y-coördinaat y_P. Definieer dan:

$$\sigma(\lambda,P) = Q$$

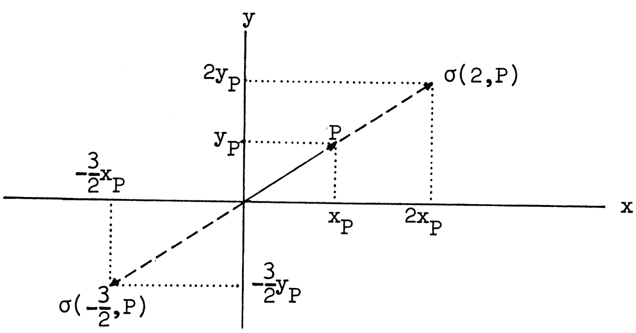
waarbij Q als x-coördinaat $x_Q = \lambda x_P$ heeft en als y-coördinaat $y_Q = \lambda y_P$. Met andere woorden: als P -in de zin van II.1.8- correspondeert met de matrix

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

uit $\mathbb{R}$, dan correspondeert $\sigma(\lambda,P)$ met de matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda x_P \\ \lambda y_P \end{pmatrix}.$$

We hebben zo een afbeelding $\sigma : \mathbb{R} \amalg \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ gedefinieerd en de lezer ga na dat σ een reële scalaire vermenigvuldiging op $\mathbb{E}_2$ is.



II.1.19 <u>Afspraak</u>: Is V een abelse groep (cf. II.1.12) en is

$$\sigma : \mathbb{F} \,\Pi\, V \to V$$

een $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging op V dan zullen we (puur formeel!) noteren: λv voor $\sigma(\lambda,v)$ $(\lambda \in \mathbb{F},\ v \in V)$. De voorwaarden (i) t/m (iv) uit II.1.15 laten zich dan als volgt herschrijven:

(i) Voor elke $v,w \in V$ en elke $\lambda \in \mathbb{F}$ geldt: $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.

(ii) Voor elke $v \in V$ en elke $\lambda,\mu \in \mathbb{F}$ geldt: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.

(iii) Voor elke $v \in V$ en elke $\lambda,\mu \in \mathbb{F}$ geldt: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.

(iv) Voor elke $v \in V$ geldt: $1 \cdot v = v$.

Merk nog op dat het getal 0 van $\mathbb{F}$ en het nul-element van V beide worden genoteerd met het symbool 0. Alhoewel dit in principe verwarrend is zal blijken dat dit in de praktijk geen enkele moeilijkheid oplevert. Als $\lambda \in \mathbb{F}$, dan is $\lambda \cdot 0$ een element van V als 0 het nul-element van V is. Als $v \in V$ dan is ook $0 \cdot v$ een element van V als 0 het element $0 \in \mathbb{F}$ is, etc.

II.1.20 <u>Definitie</u>: Een abelse groep V, tezamen met een $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging $\sigma : \mathbb{F} \,\Pi\, V \to V$ heet een <u>$\mathbb{F}$-lineaire ruimte</u>. (Is $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dan heet (V,σ) een <u>$\mathbb{R}$-lineaire ruimte</u>; is $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ dan heet (V,σ) een <u>$\mathbb{C}$-lineaire ruimte</u>).

II.1.21 <u>Afspraak:</u> Als (V,σ) een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte is, en uit de context is duidelijk welke $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging σ op V we beschouwen, dan zullen we kortheidshalve ook spreken over de $\mathbb{F}$-lineaire ruimte V.

II.1.22 <u>Voorbeeld</u>: Het euclidische platte vlak met een gekozen cartesisch assenstelsel $\mathbb{E}_2$ is - met de in II.1.8 gedefinieerde optelling en de in II.1.18 gedefinieerde reële scalaire vermenigvuldiging - een $\mathbb{R}$-lineaire ruimte.

II.1.23 <u>Voorbeeld</u>: De verzameling $M_{k,l}$ van alle $(k \times l)$-matrices uit $\mathbb{F}$ is met de optelling

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1l}+b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kl}+b_{kl} \end{pmatrix}$$

en de $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \cdots & \lambda a_{kl} \end{pmatrix}$$

($\lambda \in \mathbb{F}$) een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte.

II.1.24 Definitie: Als we de in II.1.23 gegeven verzameling $M_{k,l}$ van $(k \times l)$-matrices uit $\mathbb{F}$ met de daar gegeven optelling en $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging opvatten als $\mathbb{F}$-lineaire ruimte, dan noteren we deze met:

$$M_{k,l}(\mathbb{F}).$$

Kiezen we $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, dan krijgen we de $\mathbb{R}$-lineaire ruimte $M_{k,l}(\mathbb{R})$. Nemen we $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dan vinden we de $\mathbb{C}$-lineaire ruimte $M_{k,l}(\mathbb{C})$.

Enkele zeer veel voorkomende lineaire ruimten geven we aan met een apart symbool:

II.1.25 Definitie: $\mathbb{R}_n = M_{n,1}(\mathbb{R})$.

II.1.26 Definitie: $\mathbb{R}_n^* = M_{1,n}(\mathbb{R})$.

II.1.27 Definitie: $\mathbb{C}_n = M_{n,1}(\mathbb{C})$.

II.1.28 Definitie: $\mathbb{C}_n^* = M_{1,n}(\mathbb{C})$.

$\mathbb{R}_n$ en $\mathbb{R}_n^*$ zijn dus $\mathbb{R}$-lineaire ruimten, $\mathbb{C}_n$ en $\mathbb{C}_n^*$ zijn $\mathbb{C}$-lineaire ruimten. De elementen van $\mathbb{R}_n$ zijn dus de "kolommen" van n reële getallen

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

met optelling en scalaire vermenigvuldiging:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(analoog, maar met complexe in plaats van reële getallen, voor $\mathbb{C}_n$);
de elementen van $\mathbb{R}_n^*$ zijn de "rijtjes" van n reële getallen

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

met optelling en scalaire vermenigvuldiging

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) =$$

$$= (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n);$$

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(analoog, maar met complexe in plaats van reële getallen, voor $\mathbb{C}_n^*$).

II.1.29 <u>Definitie</u>: Als V een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte is, zodat voldaan is aan de volgende voorwaarde:
er bestaat een <u>eindige</u> deelverzameling $\{v_1, \ldots, v_m\}$ van V zodat er bij ieder element $v \in V$ getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in $\mathbb{F}$ bestaan met:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m,$$

dan heet V een <u>$\mathbb{F}$-vectorruimte</u>.

II.1.30 <u>Terminologie</u>: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte, dan heet, als $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, V een $\mathbb{R}$-vectorruimte of een <u>reële vectorruimte</u>; is $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dan heet V een $\mathbb{C}$-vectorruimte of een <u>complexe vectorruimte</u>. De elementen van V heten <u>vectoren van</u> V.

II.1.31 Opmerking: Voor elk tweetal $k,l \in \mathbb{N}$ is $M_{k,l}(\mathbb{F})$ een $\mathbb{F}$-vectorruimte.

Bewijs: Voor elke $i \in \{1,\dots, k\}$ en $j \in \{1,\dots, l\}$ noteren we $E(i,j)$ voor de $(k \times l)$-matrix uit $\mathbb{F}$ waarvan elk element 0 is, behalve het element op de i^e rij en de j^e kolom. Dit element is 1. We hebben zo voor iedere $i \in \{1,\dots, k\}$ en $j \in \{1,\dots, l\}$ een element $E(i,j)$ van $M_{k,l}(\mathbb{F})$. In totaal zijn dit $k \cdot l$ elementen. Deze vormen een eindige deelverzameling van $M_{k,l}(\mathbb{F})$. Kies nu een willekeurige $(k \times l)$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}.$$

Nu is $a_{ij}E(i,j)$ de $(k \times l)$-matrix uit $\mathbb{F}$ waarvan elk element 0 is, behalve het element op de i^e rij en de j^e kolom. Dit element is a_{ij}. Sommeren we dus alle matrices $a_{ij}E(i,j)$, dan krijgen we juist de matrix A:

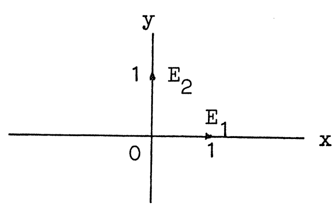
$$A = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_{ij}E(i,j). \qquad (*)$$

We zien dus dat de eindige deelverzameling $\{E(i,j) \mid i = 1,\dots, k;\ j = 1,\dots, l\}$ van $M_{k,l}(\mathbb{F})$ voldoet aan de eigenschap dat voor ieder element A uit $M_{k,l}(\mathbb{F})$ er getallen $a_{ij} \in \mathbb{F}$ $(i = 1,\dots, k;\ j = 1,\dots, l)$ bestaan zodat (*) geldt. Met andere woorden: $M_{k,l}(\mathbb{F})$ is een $\mathbb{F}$-vectorruimte.

II.1.32 Gevolg: $\mathbb{R}_n$ en $\mathbb{R}_n^*$ zijn voor ieder natuurlijk getal n reële vectorruimten; $\mathbb{C}_n$ en $\mathbb{C}_n^*$ zijn voor ieder natuurlijk getal n complexe vectorruimten.

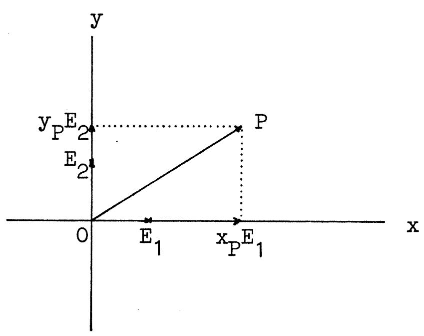
II.1.33 Voorbeeld: $\mathbb{E}_2$ is een reële vectorruimte.

Bewijs:



Kies de punten E_1, E_2 uit $\mathbb{E}_2$ die - op de manier, zoals uiteengezet in II.1.8 - corresponderen met de reële (2 × 1)-matrices

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Kies een willekeurig punt $P \in \mathbb{E}_2$, zeg, corresponderend met de matrix

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}.$$

Dan is, wegens

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = x_P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$P = x_PE_1 + y_PE_2$. Dus voldoet de eindige deelverzameling $\{E_1, E_2\}$ uit $\mathbb{E}_2$ aan de eigenschap dat er bij ieder element $P \in \mathbb{E}_2$ reële getallen x_P, y_P bestaan zodat

$$P = x_PE_1 + y_PE_2.$$

Dus is volgens II.1.29 en II.1.30 $\mathbb{E}_2$ een reële vectorruimte.

* * *

§II.2. Dimensie

II.2.1 Opmerking: Als V een $\mathbb{F}$-vectorruimte is, dan geldt voor iedere vector $v \in V$ en elk getal $\lambda \in \mathbb{F}$:

(i) $\lambda v = 0$ dan en slechts dan als $\lambda = 0$ of als $v = 0$.

(ii) $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$.

Bewijs (i): (We noteren in dit bewijs $\vec{0}$ voor de nulvector (d.i. het nulelement) van V, ter onderscheiding van het getal $0 \in \mathbb{F}$). Als $\lambda = 0$, dan vinden we:

$$\lambda v = 0\cdot v = 0\cdot v + \vec{0} = 0\cdot v + (0\cdot v + (-(0\cdot v))) =$$

$$= (0\cdot v + 0\cdot v) + (-(0\cdot v)) = (0 + 0)v + (-(0\cdot v)) =$$

$$= 0\cdot v + (-(0\cdot v)) = \vec{0}.$$

Als $\lambda \neq 0$, maar $v = \vec{0}$ dan is $\lambda v = \lambda\vec{0}$. Om te bewijzen dat $\lambda\vec{0} = \vec{0}$, is het voldoende om te laten zien dat voor iedere vector $w \in V$ geldt: $\lambda\vec{0} + w = w$ (cf. II.1.9 en II.1.10). Welnu,

$$\lambda\vec{0} + w = \lambda\vec{0} + 1\cdot w = \lambda\vec{0} + (\lambda\tfrac{1}{\lambda})w = \lambda\vec{0} + \lambda(\tfrac{1}{\lambda}w) =$$

$$= \lambda(\vec{0} + \tfrac{1}{\lambda}w) = \lambda(\tfrac{1}{\lambda}w) = (\lambda\tfrac{1}{\lambda})w = 1\cdot w = w.$$

Stel nu dat $\lambda v = \vec{0}$. We moeten aantonen dat in dat geval $\lambda = 0$ of $v = \vec{0}$ is. Als $\lambda \neq 0$, dan is

$$v = 1\cdot v = (\tfrac{1}{\lambda}\lambda)v = \tfrac{1}{\lambda}(\lambda v) = \tfrac{1}{\lambda}\,\vec{0}.$$

We hebben hiervoor al bewezen dat voor ieder getal $\mu \in \mathbb{F}$ geldt: $\mu\vec{0} = \vec{0}$. Dus is in het bijzonder $v = \frac{1}{\lambda}\,\vec{0} = \vec{0}$. Hiermee is (i) bewezen.

Bewijs (ii): We bewijzen eerst dat $(-\lambda)v = -(\lambda v)$, oftewel, we bewijzen dat $(-\lambda)v$ de inverse is van λv. We moeten dus laten zien dat $(-\lambda)v + \lambda v = \vec{0}$. Welnu, $(-\lambda)v + \lambda v = ((-\lambda) + \lambda)v = 0\cdot v = \vec{0}$ (volgens (i)). We moeten tot slot laten zien dat $\lambda(-v)$ de inverse is van λv, d.w.z., we moeten nog bewijzen dat $\lambda(-v) + \lambda(v) = \vec{0}$. Dit geldt wegens: $\lambda(-v) + \lambda(v) = \lambda(-v + v) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$ (cf. (i)). □

II.2.2 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte. Een m-tupel $[a_1,\ldots, a_m]$ uit V heet een <u>stelsel voortbrengenden van</u> V als voor iedere vector $v \in V$ er getallen $\lambda_1,\ldots, \lambda_m$ in $\mathbb{F}$ bestaan zodat $v = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m$.

II.2.3 <u>Voorbeeld</u>: Het 3-tupel

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

uit $\mathbb{R}_3$ is een stelsel voortbrengenden van $\mathbb{R}_3$. Immers, kies een willekeurige vector

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3.$$

Dan is

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad (*)$$

zodat er getallen a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$ bestaan die voldoen aan (*).

II.2.4 <u>Voorbeeld</u>: Het 3-tupel

$$\left[\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$

uit $\mathbb{R}_3$ is ook een stelsel voortbrengenden van $\mathbb{R}_3$. Kies een willekeurige vector

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 .$$

Kies $\lambda = a_3$, $\mu = \frac{1}{4}(a_2 - 2a_3)$, $\nu = \frac{1}{12}(4a_1 + a_2 - 10a_3)$. Dan rekene de lezer na dat we drie getallen λ, μ, $\nu \in \mathbb{R}$ gevonden hebben die voldoen aan

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II.2.5 <u>Voorbeeld</u>: Het 3-tupel

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

uit $\mathbb{R}_3$ is geen stelsel voortbrengenden van $\mathbb{R}_3$. Kies bijvoorbeeld de vector

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 .$$

Was het 3-tupel wel een stelsel voortbrengenden van $\mathbb{R}_3$, dan zouden er reële getallen λ, μ, ν bestaan zodat zou gelden:

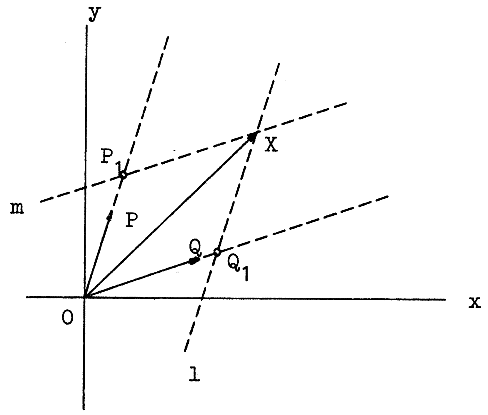
$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu + \nu \\ 2\lambda - \mu + 5\nu \\ \lambda + \mu + \nu \end{pmatrix} .$$

Dat wil zeggen:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ 2\lambda - \mu + 5\nu = 3 \\ \lambda + \mu + \nu = 1. \end{cases}$$

Het is direkt duidelijk dat de eerste en derde vergelijking met elkaar in strijd zijn, zodat er geen reële getallen λ, μ, ν bestaan die voldoen aan $(*)$.

II.2.6 Voorbeeld: Beschouw twee punten P en Q uit $\mathbb{E}_2$, zodat -als 0 de oorsprong van het gekozen cartesisch assenstelsel is- de rechten door 0 en P en door 0 en Q niet samenvallen. We laten zien dat het 2-tupel [P,Q] een stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{E}_2$: ($P \neq 0$, $Q \neq 0$)



Kies een willekeurig punt $X \in \mathbb{E}_2$. Trek rechten l en m door X, evenwijdig aan OP, resp. OQ. l en m snijden OQ, resp. OP in punten Q_1, resp. P_1. Ga na dat, omdat Q_1 op de rechte OQ ligt, er een reëel getal λ bestaat zodat $Q_1 = \lambda Q$. Evenzo is er een reëel getal μ met $P_1 = \mu P$. Dan is $X = \mu P + \lambda Q$.

We hebben bewezen dat er voor ieder punt $X \in \mathbb{E}_2$ getallen $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ te vinden zijn, zodat $X = \lambda P + \mu Q$. Dit wil zeggen dat [P,Q] een stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{E}_2$.

Ga ook na, dat, als we P en Q zo kiezen dat de rechten door 0,P en door 0,Q samenvallen, [P,Q] niet een stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{E}_2$.

II.2.7 Merk op dat, als V een $\mathbb{F}$-vectorruimte is, en $[a_1, \dots, a_m]$ is een stelsel voortbrengenden van V, bij een vector $v \in V$ best twee verschillende stellen getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ en $\mu_1, \dots, \mu_m$ uit $\mathbb{F}$ kunnen bestaan zodat:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = v = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m .$$

Bijvoorbeeld:

II.2.8 Voorbeeld: Beschouw het 4-tupel

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

uit $\mathbb{R}_3$. Ga na dat dit een stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{R}_3$. Kies $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 0$, $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 1$. Dan geldt:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \mu_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mu_4\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

II.2.9 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[a_1,\dots, a_m]$ een stelsel voortbrengenden van V, dan is voor iedere m-permutatie σ ook het n-tupel $[a_{\sigma(1)},\dots, a_{\sigma(n)}]$, dat uit $[a_1,\dots, a_m]$ ontstaat door toepassing van σ, een stelsel voortbrengenden van V.

Bewijs: Kies een willekeurige vector $v \in V$ en bij v een stel getallen $\lambda_1,\dots, \lambda_m$ uit $\mathbb{F}$ zodat

$$v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m.$$

Anders geschreven:

$$v = \sum_{i\in\{1,\dots,m\}} \lambda_i a_i.$$

Omdat σ een m-permutatie is, komen de getallen $1,\dots,m$ precies één keer voor onder de getallen $\sigma(1),\dots, \sigma(m)$, zodat $\{1,\dots, m\} = \{\sigma(1),\dots, \sigma(m)\}$. Dus kunnen we ook schrijven:

$$v = \sum_{j\in\{\sigma(1),\dots,\sigma(m)\}} \lambda_j a_j,$$

oftewel:

$$v = \lambda_{\sigma(1)}a_{\sigma(1)} + \dots + \lambda_{\sigma(m)}a_{\sigma(m)}. \qquad (*)$$

We zien dus dat er voor iedere vector $v \in V$ getallen $\lambda_{\sigma(1)},\dots, \lambda_{\sigma(m)}$ uit $\mathbb{F}$ bestaan zodat (*) geldt. Hiermee is de opmerking bewezen. □

De voorgaande opmerking leert ons dat als V een $\mathbb{F}$-vectorruimte is met een stelsel voortbrengenden $[a_1,\dots, a_m]$, en $[b_1,\dots, b_m]$ is een m-tupel uit V dat we uit $[a_1,\dots, a_m]$ verkrijgen door de elementen in een andere volgorde te plaatsen, ook $[b_1,\dots, b_m]$ een stelsel voortbrengenden is van V.

Met andere woorden: of een m-tupel $[a_1,\dots, a_m]$ uit een $\mathbb{F}$-vectorruimte een stelsel voortbrengenden is, hangt niet af van de volgorde der optredende elementen in dat m-tupel.

II.2.10 <u>Notatie</u>: Is $[a_1,\dots, a_m]$ een m-tupel, dan geven we met

$$[a_1,\dots, \hat{a}_i,\dots, a_m]$$

aan het $(m - 1)$-tupel, dat we verkrijgen door uit $[a_1,\dots, a_m]$ het element a_i weg te laten.

II.2.11 <u>Voorbeeld</u>: $[3,4,8,6,1,\hat{2},2,4,3] = [3,4,8,6,1,2,4,3]$.

II.2.12 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte. Een stelsel voortbrengenden $[a_1,\dots, a_n]$ van V heet een <u>basis van</u> V als $a_1 \neq 0,\dots, a_n \neq 0$ en als voor geen enkele $i \in \{1,\dots, n\}$ het $(n - 1)$-tupel

$$[a_1,\dots, \hat{a}_i,\dots, a_n]$$

uit V een stelsel voortbrengenden is van V.

II.2.13 <u>Voorbeeld:</u> Het 4-tupel

$$[(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$$

uit $\mathbb{R}_4^*$ is een basis van $\mathbb{R}_4^*$. Allereerst laten we zien dat dit 4-tupel een stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{R}_4^*$. Kies hiertoe een willekeurige vector

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{R}_4^*$. Dan is

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \alpha_1(1,0,0,0) + \alpha_2(0,1,0,0) + \alpha_3(0,0,1,0) +$$

$$+ \alpha_4(0,0,0,1).$$

Hiermee zien we dat het gegeven 4-tupel een stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{R}_4^*$. Om te bewijzen dat het een basis van $\mathbb{R}_4^*$ is, moeten we laten zien dat geen der 3-tupels

$$[(0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)],$$
$$[(1,0,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)],$$
$$[(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,1)] \text{ en}$$
$$[(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0)]$$

een stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{R}_4^*$. We volstaan hier met te tonen dat het eerste 3-tupel geen stelsel voortbrengenden van $\mathbb{R}_4^*$ is (de lezer ga de andere gevallen na!).

We moeten hiertoe laten zien dat niet voor elke vector $v \in \mathbb{R}_4^*$ er getallen λ_1, λ_2, λ_3 in $\mathbb{R}$ te vinden zijn zodat

$$v = \lambda_1(0,1,0,0,0) + \lambda_2(0,0,1,0) + \lambda_3(0,0,0,1). \qquad (*)$$

Het is dus voldoende een vector $v \in \mathbb{R}_4^*$ aan te geven waarbij geen getallen λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ bestaan die voldoen aan (*). Welnu, kies de vector (1,0,0,0). Stel, er bestaan wel getallen λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ zodat

$$(1,0,0,0) = \lambda_1(0,1,0,0) + \lambda_2(0,0,1,0) + \lambda_3(0,0,0,1) =$$

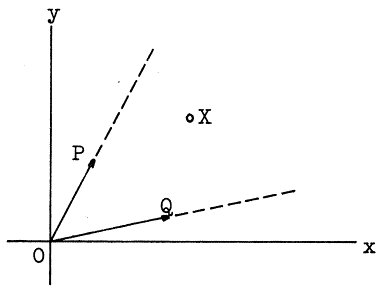
$$= (0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3).$$

Dit zou inhouden:

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ 0 = \lambda_1 \\ 0 = \lambda_2 \\ 0 = \lambda_3 \end{cases}$$

en dit kan ten duidelijkste niet. Dus is het 3-tupel
$[(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$ geen stelsel voortbrengenden van $\mathbb{R}_4^*$.

II.2.14 Voorbeeld: Beschouw in $\mathbb{E}_2$ twee punten P,Q, beide ongelijk aan de oorsprong O van het gekozen cartesisch assenstelsel, terwijl bovendien de rechten door O en P en door O en Q niet samenvallen.



In II.2.6 hebben we gezien dat het 2-tupel [P,Q] een stelsel voortbrengenden is voor $\mathbb{E}_2$. Nu is het 1-tupel [P] uit $\mathbb{E}_2$ geen stelsel voortbrengenden van $\mathbb{E}_2$, want ware dit wel zo, dan zou er bij elk punt $X \in \mathbb{E}_2$ een reëel getal λ bestaan zodat $X = \lambda P$. Dat zou betekenen dat elk punt X op de rechte OP gelegen zou zijn, tegenspraak! Dus, omdat men analoog inziet dat ook [Q] geen stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{E}_2$, is [P,Q] een basis voor $\mathbb{E}_2$.

II.2.15 Definitie: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en zij $[a_1,\dots, a_m]$ een m-tupel uit V. Een vector $v \in V$ heet een lineaire combinatie van $[a_1,\dots, a_m]$ als er getallen $\lambda_1,\dots, \lambda_m$ in $\mathbb{F}$ bestaan zodat

$$v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m.$$

II.2.16 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[a_1,\dots, a_m]$ een stelsel voortbrengenden van V, dan is elke vector uit V een lineaire combinatie van $[a_1,\dots, a_m]$.

II.2.17 Voorbeeld: Beschouw het 2-tupel

$$\left[\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right] \qquad (*)$$

uit $\mathbb{R}_3$. Dan is wegens

$$\begin{pmatrix}-1\\6\\-6\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

de vector

$$\begin{pmatrix}-1\\6\\-6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3$$

een lineaire combinatie van (*).

II.2.18 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en zij $[a_1, \ldots, a_m]$ een m-tupel uit V. Dit m-tupel heet <u>een lineair onafhankelijk stelsel van</u> V als voor ieder m-tupel $[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ uit $\mathbb{F}$ geldt:

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$$

dan en slechts dan als

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

II.2.19 <u>Voorbeeld</u>: Het 3-tupel

$$[(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]$$

uit $\mathbb{R}_3^*$ is een lineair onafhankelijk stelsel van $\mathbb{R}_3^*$, want als λ_1, λ_2, λ_3 drie reële getallen zijn zodat

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = (0,0,0),$$

dan is dit dan en slechts dan het geval als $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

II.2.20 Voorbeeld: Het 3-tupel

$$[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}]$$

uit $\mathbb{R}_3$ is geen lineair onafhankelijk stelsel omdat, als we kiezen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ en $\lambda_3 = -1$ geldt:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

terwijl niet geldt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

II.2.21 Opmerking: Is $[a_1,\dots, a_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V, dan is geen der vectoren $a_1,\dots, a_m$ uit V de nul-vector.

Bewijs: Stel $i \in \{1,\dots, m\}$ zodat $a_i = 0$. Kies getallen $\lambda_1,\dots, \lambda_m$ uit $\mathbb{F}$ als volgt

$$\begin{cases} \lambda_j = 0 \quad \text{als } j \neq i \qquad (j \in \{1,\dots, m\}), \\ \lambda_i = 1. \end{cases}$$

Dan is voor $j \in \{1,\dots, m\}$ met $j \neq i$ $\lambda_j a_j = 0\cdot a_j = 0$, terwijl ook geldt: $\lambda_i a_i = 1\cdot 0 = 0$. Dus geldt voor elke $j \in \{1,\dots, m\}$: $\lambda_j a_j = 0$. Dus is:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$$

terwijl $\lambda_i = 1 \neq 0$.

Dit is in tegenspraak met de lineaire onafhankelijkheid van het stelsel $[a_1,\dots, a_m]$. Dus kan geen enkele a_i de nul-vector zijn. □

II.2.22 Opmerking: Is $[a_1,\dots, a_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V en is σ een m-permutatie, dan is ook het m-tupel $[a_{\sigma(1)},\dots, a_{\sigma(m)}]$, dat we uit $[a_1,\dots, a_m]$ verkrijgen door toepassen van σ, een lineair onafhankelijk stelsel.

Bewijs: Kies getallen $\lambda_1,\ldots, \lambda_m$ in $\mathbb{F}$ zodat

$$\lambda_1 a_{\sigma(a)} + \ldots + \lambda_m a_{\sigma(m)} = 0.$$

Anders geschreven:

$$\sum_{i\in\{1,\ldots,m\}} \lambda_i a_{\sigma(i)} = 0. \qquad (*)$$

Nu is σ een m-permutatie, dus ook σ^{-1} is een m-permutatie, zodat $\{1,\ldots, m\} = \{\sigma^{-1}(1),\ldots,\sigma^{-1}(m)\}$. We kunnen in plaats van (*) dus ook schrijven:

$$\sum_{j\in\{\sigma^{-1}(1),\ldots,\sigma^{-1}(m)\}} \lambda_j a_{\sigma(j)} = 0$$

of, wat hetzelfde is:

$$\lambda_{\sigma^{-1}(1)} a_{\sigma(\sigma^{-1}(1))} + \ldots + \lambda_{\sigma^{-1}(m)} a_{\sigma(\sigma^{-1}(m))} = 0.$$

Nu is $\sigma(\sigma^{-1}(j)) = j \quad (j = 1,\ldots, m)$ zodat we hebben:

$$\lambda_{\sigma^{-1}(1)} a_1 + \ldots + \lambda_{\sigma^{-1}(m)} a_m = 0.$$

Omdat $[a_1,\ldots, a_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van V volgt hieruit:

$$\lambda_{\sigma^{-1}(1)} = \lambda_{\sigma^{-1}(2)} = \ldots = \lambda_{\sigma^{-1}(m)} = 0. \qquad (**)$$

Kies nu $i \in \{1,\ldots, m\}$ willekeurig. σ^{-1} is een m-permutatie, zodat i voorkomt onder de getallen $\sigma^{-1}(1),\ldots, \sigma^{-1}(m)$. Zeg, $\sigma^{-1}(j) = i$. Dan volgt uit (**):

$$\lambda_i = \lambda_{\sigma^{-1}(j)} = 0.$$

Dus is elk der getallen $\lambda_1,\ldots, \lambda_m = 0$. Hiermee is de opmerking bewezen. □

De voorgaande opmerking zegt dat het lineair onafhankelijk zijn van een m-tupel $[a_1,\ldots, a_m]$ uit een $\mathbb{F}$-vectorruimte V niet afhangt van de volgorde waarin de elementen $a_1,\ldots, a_m$ in dat m-tupel voorkomen.

II.2.23 Opmerking: Is $[a_1, \ldots, a_m]$ een m-tupel uit een $\mathbb{F}$-vectorruimte V en komen onder de vectoren $a_1, \ldots, a_m$ twee gelijke voor, dan is $[a_1, \ldots, a_m]$ geen lineair onafhankelijk stelsel van V.

Bewijs: Volgens II.2.22 mogen we - door eventueel de volgorde der elementen in $[a_1, \ldots, a_m]$ te veranderen - aannemen dat $a_1 = a_2$. Kies nu de volgende getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ uit $\mathbb{F}$:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Dan zijn niet al deze getallen 0 terwijl toch

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots + \lambda_m a_m = a_1 - a_2 + 0 \cdot a_3 + \ldots + 0 \cdot a_m =$$

$$= a_1 - a_2 + 0 + \ldots + 0 = a_1 - a_2 = 0$$

(wegens $a_1 = a_2$). Dit bewijst de opmerking. □

II.2.24 Opmerking: Als $i \in \{1, \ldots, m\}$ en $[a_1, \ldots, a_m]$ is een lineair onafhankelijk stelsel van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V, dan is ook het $(m - 1)$-tupel

$$[a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_m]$$

een lineair onafhankelijk stelsel van V.

Bewijs: Kies $m - 1$ getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_m$ uit $\mathbb{F}$ zodat

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \ldots \lambda_m a_m = 0. \qquad (*)$$

We moeten laten zien dat hieruit volgt dat al deze $m - 1$ getallen = 0 zijn. Welnu, als $\lambda_i = 0$, dan is

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_i a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \lambda_m a_m =$$

$$= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + 0 \cdot a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \ldots \lambda_m a_m =$$

$$= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + 0 + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \lambda_m a_m = 0$$

(volgens (*)). Omdat $[a_1,\dots, a_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel is volgt hieruit: $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Dus zijn in het bijzonder de $m - 1$ getallen $\lambda_1,\dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1},\dots, \lambda_m$ gelijk nul. □

II.2.25 <u>Terminologie</u>: Als V een $\mathbb{F}$-vectorruimte is, dan heet een m-tupel $[a_1,\dots, a_m]$ uit V dat niet een lineair onafhankelijk stelsel is van V <u>een lineair afhankelijk stelsel van</u> V.

II.2.26 <u>Propositie</u>: <u>Is</u> $[a_1,\dots, a_n]$ <u>een basis van een $\mathbb{F}$-vectorruimte</u> V, <u>dan is</u> $[a_1,\dots, a_n]$ <u>een lineair onafhankelijk stelsel van</u> V.

<u>Bewijs</u>: Kies getallen $\lambda_1,\dots, \lambda_n$ uit $\mathbb{F}$ zodat geldt:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0. \tag{*}$$

Stel nu dat er een index $i \in \{1,\dots, n\}$ te vinden is met $\lambda_i \neq 0$. Uit (*) volgt:

$$\lambda_i a_i = -(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1}a_{i-1} + \lambda_{i+1}a_{i+1} + \dots + \lambda_n a_n).$$

Omdat $\lambda_i \neq 0$ kunnen we door λ_i delen:

$$a_i = -\lambda_i^{-1}(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1}a_{i-1} + \lambda_{i+1}a_{i+1} + \dots + \lambda_n a_n)$$

of, als we noteren: $\mu_j = -\lambda_i^{-1}\lambda_j \quad (j = 1,\dots, i-1, i+1,\dots, n)$:

$$a_i = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_{i-1}a_{i-1} + \mu_{i+1}a_{i+1} + \dots + \mu_n a_n. \tag{**}$$

We zien dus dat a_i een lineaire combinatie is van $[a_1,\dots, \hat{a}_i,\dots, a_n]$. We laten nu zien dat hierdoor dit laatste $(n - 1)$-tupel een stelsel voortbrengenden is van V. Kies hiertoe een willekeurige vector $v \in V$. Omdat $[a_1,\dots, a_n]$ een basis is van V, dus een stelsel voortbrengenden van V, zijn er getallen $\beta_1,\dots, \beta_n$ uit $\mathbb{F}$ zodat

$$v = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_i a_i + \dots + \beta_n a_n.$$

Met (**) volgt hieruit, na enige herleiding:

$$v = (\beta_1 + \beta_i\mu_1)a_1 + (\beta_2 + \beta_i\mu_2)a_2 + \ldots + (\beta_{i-1} + \beta_i\mu_{i-1})a_{i-1} +$$

$$+ (\beta_{i+1} + \beta_i\mu_{i+1})a_{i+1} + \ldots + (\beta_n + \beta_i\mu_n)a_n.$$

Met andere woorden: elke willekeurige vector $v \in V$ is een lineaire combinatie van het $(n - 1)$-tupel

$$[a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n].$$

Dit is echter in strijd met het gegeven dat $[a_1, \ldots, a_n]$ een basis is van V (cf. II.2.12).

We hebben nu laten zien dat de veronderstelling, dat er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ bestaat met $\lambda_i \neq 0$, leidt tot een tegenspraak. Dus is bewezen dat uit (*) volgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, hetgeen de propositie bewijst. □

II.2.27 <u>Propositie</u>: <u>Zij</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte</u>. <u>Een stelsel voortbrengenden</u> $[a_1, \ldots, a_n]$ <u>van</u> V <u>dat tevens een lineair onafhankelijk stelsel is van</u> V, <u>is een basis van</u> V.

<u>Bewijs</u>: Omdat $[a_1, \ldots, a_n]$ een lineair onafhankelijk stelsel is, is volgens II.2.21 geen der vectoren $a_1, \ldots, a_n$ de nul-vector. Stel nu dat er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ te vinden is, zodat het $(n - 1)$-tupel $[a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n]$ een stelsel voortbrengenden is van V. Dan is elke vector uit V een lineaire combinatie van dit $(n - 1)$-tupel. In het bijzonder ook de vector a_i, zodat er getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n$ te vinden zijn met:

$$a_i = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1}a_{i-1} + \lambda_{i+1}a_{i+1} + \ldots + \lambda_n a_n.$$

Als we noteren $\lambda_i = -1$, volgt hieruit:

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1}a_{i-1} + \lambda_i a_i + \lambda_{i+1}a_{i+1} + \ldots + \lambda_n a_n = 0.$$

Dus hebben we n getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ uit $\mathbb{F}$, niet alle nul (want $\lambda_i = -1 \neq 0$) zodat $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$, in tegenspraak met het gegeven dat $[a_1, \ldots, a_n]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V is. Dus leidt de veronderstelling dat er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ bestaat zodat $[a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n]$ een stelsel voortbrengenden van V is, tot een tegenspraak. D.w.z. voor elke $i \in \{1, \ldots, n\}$ is $[a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n]$ geen stelsel voortbrengenden van V, terwijl geen der a_i's de nul-vector is. Met andere woorden, $[a_1, \dots, a_n]$ is een basis van V. Hiermee is de propositie bewezen. □

II.2.28 <u>Stelling</u>: <u>Een n-tupel</u> $[a_1, \dots, a_n]$ <u>uit een $\mathbb{F}$-vectorruimte</u> V <u>is een basis van</u> V <u>dan en slechts dan als dit n-tupel zowel een stelsel voortbrengenden van</u> V <u>is als een lineair onafhankelijk stelsel van</u> V.

<u>Bewijs</u>: De stelling volgt direkt uit II.2.26 en II.2.27. □

II.2.29 <u>Voorbeeld</u>: Het 4-tupel

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right] \qquad (*)$$

uit $\mathbb{R}_4$ is een basis van $\mathbb{R}_4$. Om dit te controleren laten we -gebruik makend van II.2.28- zien dat dit 4-tupel een stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{R}_4$ en tevens een lineair onafhankelijk stelsel van $\mathbb{R}_4$. Kies een willekeurige vector:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4.$$

Wegens

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

met $\lambda_1 = a_1 - a_2$, $\lambda_2 = a_2 - a_3$, $\lambda_3 = a_3 - a_4$, $\lambda_4 = a_4$ zien we dat deze willekeurig gekozen vector van $\mathbb{R}_4$ een lineaire combinatie is van het 4-tupel (*). Dus is iedere vector van $\mathbb{R}_4$ een lineaire combinatie van (*), zodat het 4-tupel (*) een stelsel voortbrengenden is van $\mathbb{R}_4$.

Nu nog de lineaire onafhankelijkheid van het stelsel (*) controleren. Kies getallen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R}$ zodat

$$\begin{pmatrix} \mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4 \\ \mu_2+\mu_3+\mu_4 \\ \mu_3+\mu_4 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \mu_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Dan moet dus gelden:

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0 \\ \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0 \\ \mu_3 + \mu_4 = 0 \\ \mu_4 = 0 \end{cases}$$

en het is direkt duidelijk dat dit stelsel vergelijkingen als enige oplossing heeft: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. Dus is het 4-tupel (*) ook een lineair onafhankelijk stelsel van $\mathbb{R}_4$.

II.2.30 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> $[a_1, \dots, a_n]$ <u>een basis van een</u> $\mathbb{F}$<u>-vectorruimte</u> V <u>en is</u> σ <u>een n-permutatie, dan is ook het n-tupel</u> $[a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}]$ <u>uit</u> V, <u>verkregen door toepassing van</u> σ op $[a_1, \dots, a_n]$, <u>een basis van</u> V.

<u>Bewijs</u>: Volgens II.2.28 is $[a_1, \dots, a_n]$ een lineair onafhankelijk stelsel voortbrengenden van V. Volgens II.2.22 is $[a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V en volgens II.2.9 is dit laatste n-tupel ook een stelsel voortbrengenden van V. Dus is $[a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}]$ volgens II.2.28 een basis van V. □

De voorgaande opmerking zegt dat het al dan niet een basis zijn voor V van het n-tupel $[a_1, \dots, a_n]$ onafhankelijk is van de keuze der volgorde van de elementen uit dit n-tupel.

II.2.31 <u>Lemma</u>: <u>Is</u> $[a_1, \dots, a_n]$ <u>een basis van een</u> $\mathbb{F}$<u>-vectorruimte</u> V <u>en is</u> $b \neq 0$ <u>een vector uit</u> V, <u>terwijl</u> $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ <u>getallen zijn uit</u> $\mathbb{F}$ <u>zodat</u>

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n,$$

dan is voor iedere $i \in \{1,\ldots, n\}$ waarvoor geldt: $\lambda_i \neq 0$ het n-tupel

$$[a_1,\ldots, \hat{a}_i,\ldots, a_n, b] \qquad (*)$$

een basis van V.

Bewijs: Volgens II.2.28 moeten we bewijzen dat het n-tupel (*) een lineair onafhankelijk stelsel is van V en tevens een stelsel voortbrengenden van V. Neem aan dat voor de n getallen $\mu_1,\ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1},\ldots, \mu_n, \mu$ uit $\mathbb{F}$ geldt:

$$\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_{i-1}a_{i-1} + \mu_{i+1}a_{i+1} + \ldots + \mu_n a_n + \mu b = 0 \qquad (**)$$

We moeten laten zien dat hieruit volgt, dat deze n getallen alle nul zijn. Als $\mu = 0$, dan volgt:

$$\mu_1 a_1 + \ldots \mu_{i-1}a_{i-1} + \mu_{i+1}a_{i+1} + \ldots + \mu_n a_n = 0. \qquad (***)$$

Nu is $[a_1,\ldots, a_n]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V, zodat uit (***) volgt: $\mu_1 = \ldots = \mu_{i-1} = \mu_{i+1} = \ldots = \mu_n = 0$, als $\mu = 0$.

Indien $\mu \neq 0$, substitueer dan in (**) de gegeven uitdrukking voor b, namelijk

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

Dit geeft:

$$(\mu_1 + \mu\lambda_1)a_1 + \ldots + (\mu_{i-1} + \mu\lambda_{i-1})a_{i-1} + \mu\lambda_i a_i +$$

$$+ (\mu_{i+1} + \mu\lambda_{i+1})a_{i+1} + \ldots + (\mu_n + \mu\lambda_n)a_n = 0.$$

Noteer:

$$\beta_j = \mu_j + \mu\lambda_j \qquad (j \in \{1,\ldots, i-1, i+1,\ldots, n\})$$

en

$$\beta_i = \mu\lambda_i.$$

Dan hebben we:

$$\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n = 0.$$

Omdat $[a_1, \ldots, a_n]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van V, volgt hieruit: $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$. Echter, $\beta_i = \mu\lambda_i \neq 0$; tegenspraak. Dus leidt de veronderstelling $\mu \neq 0$ tot een tegenspraak, zodat $\mu = 0$, en daarmee, zoals we al gezien hebben: $\mu_1 = \ldots = \mu_{i-1} = \mu_{i+1} = \ldots = \mu_n = 0$.
Hiermee hebben we aangetoond dat het n-tupel (*) lineair onafhankelijk is.

Nu bewijzen we nog dat dit n-tupel (*) een stelsel voortbrengenden is van V. Kies hiertoe een willekeurige vector $v \in V$. Omdat $[a_1, \ldots, a_n]$ een basis is van V zijn er getallen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{F}$, zodat

$$v = \gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_n a_n.$$

Nu volgt uit de gegeven uitdrukking voor b, dat $-\lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \lambda_n a_n - b$. Deling door $-\lambda_i$ (merk op dat $\lambda_i \neq 0$) geeft, als we noteren: $\nu_j = -\lambda_i^{-1}\lambda_j$ $(j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\})$ en $\nu = \lambda_i^{-1}$:

$$a_i = \nu_1 a_1 + \ldots + \nu_{i-1} a_{i-1} + \nu_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \nu_n a_n + \nu b.$$

Dus volgt:

$$\begin{aligned} v &= \gamma_1 a_1 + \ldots \gamma_{i-1} a_{i-1} + \gamma_i(\nu_1 a_1 + \ldots + \nu_{i-1} a_{i-1} + \\ &\quad + \nu_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \nu_n a_n + \nu b) + \gamma_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \gamma_n a_n = \\ &= (\gamma_1 + \gamma_i \nu_1) a_1 + \ldots + (\gamma_{i-1} + \gamma_i \nu_{i-1}) a_{i-1} + \\ &\quad + (\gamma_{i+1} + \gamma_i \nu_{i+1}) a_{i+1} + \ldots + (\gamma_n + \gamma_i \nu_n) a_n + \gamma_i \nu b. \end{aligned}$$

We zien dus dat iedere willekeurig gekozen vector v uit V een lineaire combinatie is van $[a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n, b]$, zodat dit n-tupel een stelsel voortbrengenden is van V.

Hiermee is het lemma bewezen. □

II.2.32 <u>Propositie</u>: <u>Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met een basis $[a_1, \ldots, a_n]$. Dan is ieder lineair onafhankelijk stelsel $[b_1, \ldots, b_m]$ met $m \leq n$ met $n - m$ vectoren $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-m}}$ uit de basis $[a_1, \ldots, a_n]$ aan te vullen tot een basis</u>

$$[b_1, \ldots, b_m, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-m}}]$$

<u>van</u> V.

<u>Bewijs</u>: (Met volledige inductie naar m.)

(i) Stel m = 1. Beschouw een 1-tupel $[b_1]$ uit V dat een lineair onafhankelijk stelsel is van V. Volgens II.2.21 is dan $b_1 \neq 0$. Omdat $[a_1, \ldots, a_n]$ een stelsel voortbrengenden van V is kunnen we getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ uit $\mathbb{F}$ kiezen zodat $b_1 = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$. Omdat $b_1 \neq 0$, is er minstens één index $i \in \{1, \ldots, n\}$ zodat $\lambda_i \neq 0$. Dan is volgens II.2.31 $[a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n, b_1]$ en daarmee volgens II.2.30 ook $[b_1, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n]$ een basis van V. Dus in het geval m = 1 is de propositie bewezen.

(ii) Stel nu dat voor $m = k$ $(\leq n-1)$ het lemma bewezen is. D.w.z., ieder k-tupel $[b_1, \ldots, b_k]$ dat een lineair onafhankelijk stelsel is van V is met $n - k$ vectoren uit $[a_1, \ldots, a_n]$ aan te vullen tot een basis van V. We moeten nu laten zien dat de propositie dan ook geldt in het geval $m = k + 1$ $(\leq n)$.

Kies hiertoe een lineair onafhankelijk stelsel $[b_1, \ldots, b_{k+1}]$ van V. Volgens II.2.24 is dan ook het n-tupel $[b_1, \ldots, b_k]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V. We hebben volgens de inductie-aanname dan $n - k$ vectoren $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-k}}$ uit $[a_1, \ldots, a_n]$ zodat het n-tupel

$$[b_1, \ldots, b_k, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-k}}] \qquad (*)$$

een basis is van V. Omdat $[b_1, \ldots, b_{k+1}]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van V, is volgens II.2.21 $b_{k+1} \neq 0$. Omdat (*) als basis van V een stelsel voortbrengenden is van V zijn er getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ zodat

$$b_{k+1} = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k + \lambda_{k+1} a_{i_1} + \ldots + \lambda_n a_{i_{n-k}} \qquad (**)$$

Veronderstel nu dat $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Dit zou betekenen:

$$b_{k+1} = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k.$$

Ga na dat dit in strijd is met de lineaire onafhankelijkheid van het $(k + 1)$-tupel $[b_1, \ldots, b_{k+1}]$. Dus is er onder de getallen $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ minstens één die niet nul is, zeg λ_{k+j}. Uit (**) en lemma II.2.31 volgt dan dat

$$[b_1, \ldots, b_k, a_{i_1}, \ldots, \hat{a}_{i_j}, \ldots, a_{i_{n-k}}, b_{k+1}]$$

een basis is voor V. Volgens II.2.30 is dan ook

$$[b_1, \ldots, b_{k+1}, a_{i_1}, \ldots, \hat{a}_{i_j}, \ldots, a_{i_{n-k}}] \qquad (***)$$

een basis van V. Dus kunnen we elk $(k + 1)$-tupel $[b_1, \ldots, b_{k+1}]$ dat een lineair onafhankelijk stelsel is van V met $n - k - 1$ vectoren uit $[a_1, \ldots, a_n]$ aanvullen tot de basis (***) van V. Hiermee is de propositie bewezen. □

II.2.33 Beschouw een verzameling V die bestaat uit één element: $V = \{v_0\}$. Op V kunnen we de binaire operatie $m : V \Pi V \rightarrow V$ kiezen die aan het (enige) element (v_0, v_0) van $V \Pi V$ toevoegt het beeld $m(v_0, v_0) = v_0$. Door de definities II.1.5 formeel te controleren ziet men dat (V,m) een abelse groep is. Definieer vervolgens de operatie $\sigma : \mathbb{F} \Pi V \rightarrow V$ van $\mathbb{F}$ op V door aan ieder element $(\lambda, v_0) \in \mathbb{F} \Pi V$ toe te voegen het beeld $\sigma(\lambda, v_0) = v_0$. De lezer controlere dat σ een $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging is, zodat V een uit één vector bestaande vectorruimte is. Deze enige vector $v_0 \in V$ is dan noodzakelijkerwijs de nul-vector.

Het zal duidelijk zijn dat $[v_0]$ een stelsel voortbrengenden is van V, maar, omdat $v_0 = 0$, volgens II.2.21 geen lineair onafhankelijk stelsel van V, dus ook geen basis van V is.

Om redenen van consistentie in de terminologie zullen we zeggen dat de lege verzameling of "het 0-tupel uit V" de enige basis is van V, als V een $\mathbb{F}$-vectorruimte is die slechts de nul-vector als element bevat.

II.2.34 <u>Opmerking</u>: <u>Elke $\mathbb{F}$-vectorruimte</u> V <u>heeft een basis</u>.

<u>Bewijs</u>: Als V uitsluitend uit de nul-vector bestaat, dan is er per afspraak

een basis voor V (cf. II.2.33). Stel nu dat V meer dan één vector bevat. Volgens II.1.29 bestaat er een eindig aantal vectoren $a_1,\dots, a_m$ van V zodat het m-tupel $[a_1,\dots, a_m]$ een stelsel voortbrengenden is van V. Dus V heeft stelsels voortbrengenden. Kies zo'n stelsel voortbrengenden $[b_1,\dots, b_n]$ van V met een minimaal aantal vectoren n.

Merk allereerst op dat er geen $j \in \{1,\dots, n\}$ bestaat met $b_j = 0$ (Anders zou ook $[b_1,\dots, \hat{b}_j,\dots, b_n]$ een stelsel voortbrengenden van V zijn, bestaande uit minder dan n elementen, in tegenspraak met de minimaliteit van n. (ga na!).) Omdat voor iedere $i \in \{1,\dots, n\}$ $[b_1,\dots, \hat{b}_i,\dots, b_n]$ een $(n - 1)$-tupel is, en dus - weer wegens de minimaliteit van n - geen stelsel voortbrengenden van V is, is volgens II.2.12 $[b_1,\dots, b_n]$ een basis van V. □

II.2.35 <u>Stelling</u>: <u>Bij iedere $\mathbb{F}$-vectorruimte</u> V <u>bestaat er een niet-negatief geheel getal</u> n <u>zodat iedere basis van</u> V <u>uit</u> n <u>vectoren bestaat (d.i., een n-tupel is uit</u> V).

<u>Bewijs</u>: Bestaat V uit alleen de nul-vector, dan is de stelling volgens II.2.33 triviaal. Neem nu aan dat V uit meer dan één vector bestaat. Kies twee bases $[a_1,\dots, a_n]$ en $[b_1,\dots, b_m]$ van V. We moeten dan bewijzen dat $m = n$.

Stel $m \neq n$, zeg: $m < n$. Omdat $[b_1,\dots, b_m]$ een basis is van V, en dus een lineair onafhankelijk stelsel, kunnen we volgens II.2.32 $n - m$ vectoren $a_{i_1},\dots, a_{i_{n-m}}$ uit $[a_1,\dots, a_n]$ kiezen zodat het n-tupel

$$[b_1,\dots, b_m, a_{i_1},\dots, a_{i_{n-m}}]$$

een basis is voor V. Maar dan is het $(n - 1)$-tupel

$$[b_1,\dots, b_m, a_{i_1},\dots, \hat{a}_{i_{n-m}}]$$

geen stelsel voortbrengenden van V (cf. II.2.12), dus zeker het deelstelsel $[b_1,\dots, b_m]$ niet, in tegenspraak met het gegeven dat $[b_1,\dots, b_m]$ een basis is van V. Dus leidt de veronderstelling $m < n$ tot een tegenspraak.

Door de rol van de bases $[a_1,\dots, a_n]$ en $[b_1,\dots, b_m]$ in bovenstaande redenering te verwisselen laat men zien dat ook de veronderstelling $n < m$ tot een tegenspraak leidt. Dus is $m = n$, zodat de stelling bewezen is. □

Voorgaande stelling rechtvaardigt de volgende definitie.

II.2.36 <u>Definitie:</u> Als V een $\mathbb{F}$-vectorruimte is en elke basis van V heeft n elementen, dan heet n de <u>dimensie van</u> V, genoteerd met

$$\dim_{\mathbb{F}}(V).$$

II.2.37 <u>Voorbeeld</u>: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met slechts één element, dan is $\dim_{\mathbb{F}}(V) = 0$. Uit II.2.29 volgt: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4) = 4$; uit II.2.14 volgt: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}_2) = 2$ en volgens II.2.13 is $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4^*) = 4$.

II.2.38 <u>Opmerking</u>: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n^*) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_n) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_n^*) = n$.

<u>Bewijs</u>: Omdat

$$\mathbb{R}_n = M_{n,1}(\mathbb{R}) \;\; ; \;\; \mathbb{R}_n^* = M_{1,n}(\mathbb{R}) \;\; ; \;\; \mathbb{C}_n = M_{n,1}(\mathbb{C}) \;\; ; \;\; \mathbb{C}_n^* = M_{1,n}(\mathbb{C})$$

is het voldoende om te laten zien dat geldt:

$$\dim_{\mathbb{F}}(M_{k,l}(\mathbb{F})) = k \cdot l \,. \qquad (*)$$

Noteer hiertoe - net als in II.1.31 - voor elke $i \in \{1,\ldots, k\}$ en elke $j \in \{1,\ldots, l\}$ $E(i,j)$ voor de $(k \times l)$-matrix uit $\mathbb{F}$ waarvan elk element 0 is, behalve het element op de i^e rij en de j^e kolom. Dat element is 1. In II.1.31 hebben we gezien dat het $k\cdot l$-tupel, gevormd door deze $E(i,j)$'s in een of andere volgorde, een stelsel voortbrengenden is van $M_{k,l}(\mathbb{F})$. We laten zien dat dit $k\cdot l$-tupel ook een lineair onafhankelijk stelsel is van $M_{k,l}(\mathbb{F})$.

Kies hiertoe $k\cdot l$ getallen λ_{ij} $(i = 1,\ldots, k \;\; ; \; j = 1,\ldots, l)$ uit $\mathbb{F}$ zodat

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda_{ij}\, E(i,j) = 0.$$

Nu is, voor elk paar i,j, $\lambda_{ij}E(i,j)$ de $(k \times l)$-matrix uit $\mathbb{F}$ waarvan alle elementen $\lambda_{ij}\cdot 0 = 0$ zijn, behalve het element op de i^e rij en de j^e kolom. Dit element is $\lambda_{ij}\cdot 1 = \lambda_{ij}$. Tellen we nu al deze matrices $\lambda_{ij}E(i,j)$ op, dan krijgen we de matrix

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\lambda_{ij}\,E(i,j) = \begin{pmatrix}\lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1l}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{k1} & \cdots & \lambda_{kl}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat alle getallen λ_{ij} nul zijn. Dus is de lineaire onafhankelijkheid van het bovengenoemde $k\cdot l$-tupel der $E(i,j)$'s bewezen.

Derhalve vormt dit $k\cdot l$-tupel een basis van $M_{k,l}(\mathbb{F})$, zodat (*), en daarmee de opmerking, bewezen is. □

II.2.39 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een F-vectorruimte met dimensie</u> n, <u>dan is ieder lineair onafhankelijk stelsel</u> $[b_1,\ldots, b_n]$ <u>met</u> n <u>vectoren een basis van</u> V.

<u>Bewijs</u>: Kies een basis $[a_1,\ldots, a_n]$ van V. (Volgens II.2.34 is er minstens één.) Volgens II.2.32 is het lineair onafhankelijk stelsel $[b_1,\ldots, b_n]$ met $n - n = 0$ vectoren uit $[a_1,\ldots, a_n]$ aan te vullen tot een basis van V, met andere woorden: $[b_1,\ldots, b_n]$ is zelf een basis van V. □

II.2.40 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een F-vectorruimte met dimensie</u> n, <u>dan geldt voor ieder lineair onafhankelijk stelsel van</u> V <u>dat dat stelsel uit maximaal</u> n <u>vectoren bestaat</u>.

<u>Bewijs</u>: Zij $[b_1,\ldots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V met $m > n$. Door successievelijk de laatste $m - n - 1$ vectoren uit dit stelsel weg te laten, verkrijgen we volgens II.2.24 een lineair onafhankelijk stelsel $[b_1,\ldots, b_{n+1}]$ van V. Omdat - weer volgens II.2.24 - ook $[b_1,\ldots, b_n]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van V, is dit volgens II.2.39 een basis van V. Dat houdt in: $[b_1,\ldots, b_n]$ is een stelsel voortbrengenden van V, zodat iedere vector $v \in V$, en in het bijzonder b_{n+1}, een lineaire combinatie is van $[b_1,\ldots, b_n]$. Dus is

$$b_{n+1} = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$$

voor zekere getallen $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ van $\mathbb{F}$, en dit is in tegenspraak met de lineaire onafhankelijkheid van $[b_1,\ldots, b_{n+1}]$.

Dus leidt de veronderstelling $m > n$ tot een tegenspraak, zodat $m \le n$ is. Dit bewijst de opmerking. □

* * *

§II.3 <u>Lineaire deelruimten</u>

II.3.1 <u>Definitie</u>: Zij V een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte (cf. II.1.20) en zij W een deelverzameling van V. W heet een <u>lineaire deelruimte van</u> V als voldaan is aan de volgende voorwaarden:

(i) Voor elke $w_1, w_2 \in W$ is ook $w_1 + w_2$ een element van W.
(ii) Voor elke $w \in W$ en elke $\lambda \in \mathbb{F}$ is λw bevat in W.
(iii) $W \neq \emptyset$.

II.3.2 De voorwaarde (i) uit II.3.1 garandeert dat we een binaire operatie

$$m : W \amalg W \to W$$

op W hebben, gedefinieerd door $m(w_1,w_2) = w_1 + w_2$. Voorwaarde (ii) uit II.3.1 garandeert het bestaan van de operatie

$$\sigma : \mathbb{F} \amalg W \to W$$

van $\mathbb{F}$ op W, die gedefinieerd wordt door: $\sigma(\lambda,w) = \lambda w$. We zullen nu laten zien dat (W,m) een abelse groep is en σ een $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging op deze abelse groep, zodat W een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte is.

II.3.3 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> W <u>een lineaire deelruimte van een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte</u> V, <u>dan is ook</u> W <u>een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte</u>.

<u>Bewijs</u>: Allereerst laten we zien dat (W,m), met m gedefinieerd zoals in II.3.2, een abelse groep is. Hiertoe controleren we de eigenschappen (i), (ii), (iii) en (iv) uit II.1.5:

<u>ad (i)</u>: Omdat $W \neq \emptyset$ (cf. II.3.1 (iii)) kunnen we een element $w \in W$ kiezen. Omdat $-1 \in \mathbb{F}$, is volgens II.3.1 (ii) $-w = (-1)w$ een element van W, dus volgens II.3.1 (i) ook de som van w en $-w$: $w - w = 0$. Dus $0 \in W$. Kies nu een willekeurig element $w' \in W$. Dan geldt: $m(0,w') = 0 + w' = w'$ zodat II.1.5 (i) geverifieerd is.

<u>ad (ii)</u>: Kies $w_1, w_2 \in W$. Dan is $m(w_1,w_2) = w_1 + w_2 = w_2 + w_1 = m(w_2,w_1)$ (let wel: $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$ geldt, omdat V een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte is!).

<u>ad (iii)</u>: In ad (i) hebben we al gezien dat met iedere vector $w \in W$ ook de vector $w^* = -w$ in W bevat is. Er geldt: $m(w,w^*) = w + w^* = w - w = 0$ zodat ook II.1.5 (iii) geldt.

<u>ad (iv)</u>: Kies $w_1,w_2,w_3 \in W$. Dan is $m(m(w_1,w_2),w_3) = m(w_1+w_2,w_3) =$ $(w_1+w_2) + w_3 = w_1 + (w_2+w_3) = m(w_1,w_2+w_3) = m(w_1,m(w_2,w_3))$.
(Ook hier geldt $(w_1+w_2) + w_3 = w_1 + (w_2+w_3)$ in V.)

We zien dus dat (W,m) een abelse groep is. Nu controleren we de eigenschappen (i), (ii), (iii), (iv) uit II.1.15 voor de in II.3.2 gedefinieerde operatie σ van $\mathbb{F}$ op W om te bewijzen dat σ een $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging is.

<u>ad (i)</u>: Kies $w_1,w_2 \in W$ en $\lambda \in V$. Omdat in V geldt: $\lambda(w_1+w_2) = \lambda w_1 + \lambda w_2$ vinden we: $\sigma(\lambda,w_1+w_2) = \lambda(w_1+w_2) = \lambda w_1 + \lambda w_2 = \sigma(\lambda,w_1) + \sigma(\lambda,w_2)$.
(Merk hierbij op dat $\sigma(\lambda,w_1) + \sigma(\lambda,w_2)$ de som van $\sigma(\lambda,w_1)$ en $\sigma(\lambda,w_2)$ is onder de optelling m in de abelse groep (W,m). Omdat deze optelling voor wat betreft de elementen van W (die ook elementen van V zijn) samenvalt met de optelling in V, geeft dit geen verwarring).

<u>ad (ii)</u>: Kies $w \in W$ en $\lambda,\mu \in \mathbb{F}$. Omdat in V geldt: $(\lambda+\mu)w = \lambda w + \mu w$ volgt: $\sigma(\lambda+\mu,w) = (\lambda+\mu)w = \lambda w + \mu w = \sigma(\lambda,w) + \sigma(\mu,w)$.

<u>ad(iii)</u>: Kies $w \in W$ en $\lambda,\mu \in \mathbb{F}$. In V geldt: $(\lambda\mu)w = \lambda(\mu w)$, zodat $\sigma(\lambda\mu,w) =$ $= (\lambda\mu)w = \lambda(\mu w) = \sigma(\lambda,\mu w) = \sigma(\lambda,\sigma(\mu,w))$.

<u>ad (iv)</u>: Kies $w \in W$. In V geldt: $1 \cdot w = w$ zodat $\sigma(1,w) = 1 \cdot w = w$.

Hiermee is de opmerking bewezen. □

II.3.4 Merk op dat in de loop van het bewijs van de voorgaande opmerking is vastgesteld dat, als W een lineaire deelruimte is van een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte V, de nul-vector 0 van V bevat is in W en bovendien de nul-vector is van W.

II.3.5 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> V <u>een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte is</u>, <u>dan is</u> $\{0\}$ <u>een lineaire deelruimte van</u> V.

<u>Bewijs</u>: Ga na! □

II.3.6 Opmerking: Is $[b_1,\dots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel van een vectorruimte V en is $v \in V$ een vector die geen lineaire combinatie is van $[b_1,\dots, b_m]$, dan is ook $[b_1,\dots, b_m, v]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V.

Bewijs: Kies getallen $\lambda_1,\dots, \lambda_m, \lambda$ uit $\mathbb{F}$ zodat

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m + \lambda v = 0. \tag{$*$}$$

Als $\lambda \neq 0$, dan volgt:

$$v = -\lambda^{-1}\lambda_1 b_1 - \dots - \lambda^{-1}\lambda_m b_m$$

zodat v een lineaire combinatie is van $[b_1,\dots, b_m]$, tegenspraak! Dus $\lambda = 0$. Maar dan hebben we:

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = 0$$

en, omdat $[b_1,\dots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V is, volgt: $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. We zien hiermee dat uit $(*)$ volgt: $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, zodat $[b_1,\dots, b_m, v]$ een lineair onafhankelijk stelsel is. □

II.3.7 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte, dan is elke lineaire deelruimte W van V ook een $\mathbb{F}$-vectorruimte.

Bewijs: In II.3.3 hebben we bewezen dat W een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte is. We moeten nog laten zien dat er een eindig aantal vectoren $b_1,\dots, b_m$ in W bestaan zodat iedere vector w uit W een lineaire combinatie is van $[b_1,\dots, b_m]$.

Is $W = \{0\}$, dan is W uiteraard een $\mathbb{F}$-vectorruimte. Stel nu dat W meer dan één vector bevat. Dan bestaan er lineair onafhankelijke stelsels van V waarvan alle vectoren bevat zijn in W (bijvoorbeeld, kies een vector $w \neq 0$ uit W, dan is $[w]$ zo'n stelsel). Volgens II.2.40 hebben al deze stelsels hooguit n elementen als n de dimensie van V is.

Kies nu een lineair onafhankelijk stelsel $[b_1,\dots, b_m]$ met m maximaal, zodat $b_1,\dots, b_m \in W$. Dan is, als w een willekeurige vector is uit W, w een lineaire combinatie van dit m-tupel, omdat anders, volgens II.3.6, $[b_1,\dots, b_m,w]$ een lineair onafhankelijk stelsel uit V zou zijn, bestaande uit $m + 1$ vectoren uit W, en dat kan niet wegens de maximaliteit van m.

Dus elke vector $w \in W$ is een lineaire combinatie van $[b_1, \ldots, b_m]$ zodat W een $\mathbb{F}$-vectorruimte is. □

II.3.8 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en W een lineaire deelruimte van V. Dan is elk lineair onafhankelijk stelsel van W ook een lineair onafhankelijk stelsel van V, en, omgekeerd, als $b_1, \ldots, b_m$ vectoren uit W zijn zodat $[b_1, \ldots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van V, dan is dit m-tupel ook een lineair onafhankelijk stelsel van W.

Bewijs: Volgt direkt uit definitie II.2.18. Ga na! □

II.3.9 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is W een lineaire deelruimte van V, dan is

$$\dim_{\mathbb{F}}(W) \leq \dim_{\mathbb{F}}(V).$$

Bewijs: Kies een lineair onafhankelijk stelsel $[b_1, \ldots, b_m]$ uit V, zodat $b_1, \ldots, b_m \in W$ en m maximaal is met deze eigenschap (cf. het bewijs van II.3.7). In het bewijs van II.3.7 hebben we aangetoond dat dit stelsel de vectorruimte W voortbrengt. Volgens II.3.8 is dit stelsel bovendien een lineair onafhankelijk stelsel van W, en dus een basis van W. Dan is de dimensie van W gelijk aan m. Omdat $[b_1, \ldots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V is, is volgens II.2.40 m kleiner dan of gelijk aan de dimensie van V, zodat de opmerking volgt. □

II.3.10 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en W een lineaire deelruimte van V. Als $b_1, \ldots, b_m$ vectoren zijn uit W en $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ getallen uit $\mathbb{F}$, dan is ook $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m$ een vector van W.

Bewijs: Ga na dat dit volgt door herhaald toepassen van de voorwaarden (i) en (ii) uit definitie II.3.1. □

II.3.11 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is W een lineaire deelruimte van V zodat

$$\dim_{\mathbb{F}}(W) = \dim_{\mathbb{F}}(V)$$

dan is $W = V$.

Bewijs: Omdat W, als lineaire deelruimte van V, uiteraard een deelverzameling is van V behoeven we alleen aan te tonen dat $V \subset W$, oftewel dat iedere vector $v \in V$ bevat is in W. Zij n de dimensie van V en van W. Kies een basis $[b_1,\ldots, b_n]$ van W. Dan is $[b_1,\ldots, b_n]$ een lineair onafhankelijk stelsel van W en volgens II.3.8 bijgevolg een lineair onafhankelijk stelsel van V, bestaande uit n vectoren. Volgens II.2.39 is $[b_1,\ldots, b_n]$ dan een basis van V, zodat er voor iedere vector $v \in V$ getallen $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ uit $\mathbb{F}$ bestaan met $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$. Volgens II.3.10 is dan iedere vector v uit V bevat in W, zodat $V \subset W$ en dus $V = W$. □

II.3.12 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte van dimensie n en is W een lineaire deelruimte van V van dimensie m, dan is elke basis $[b_1,\ldots, b_m]$ van W met $n - m$ vectoren $a_{m+1},\ldots, a_n$ uit V uit te breiden tot een basis $[b_1,\ldots, b_m, a_{m+1},\ldots, a_n]$ van V.

Bewijs: De basis $[b_1,\ldots, b_m]$ van W is, als lineair onafhankelijk stelsel van W, een lineair onafhankelijk stelsel van V (cf. II.3.8). Kies een basis $[c_1,\ldots, c_n]$ van V. Volgens II.2.32 kunnen we dan $n - m$ vectoren

$$a_{m+1} = c_{i_1},\ldots, a_n = c_{i_{n-m}}$$

uit $[c_1,\ldots, c_n]$ kiezen zodat $[b_1,\ldots, b_m, a_{m+1},\ldots, a_n]$ een basis is van V. □

II.3.13 Opmerking: Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en $[b_1,\ldots, b_m]$ een m-tupel uit V. Zij W de verzameling van alle lineaire combinaties van $[b_1,\ldots, b_m]$. Dan is W een lineaire deelruimte van V.

Bewijs: We verifiëren voor W de voorwaarden (i), (ii), (iii) van definitie II.3.1.

ad (i): We moeten aantonen dat voor ieder tweetal vectoren w_1, w_2 uit W de som $w_1 + w_2$ in W bevat is. Dit wil zeggen, als w_1 en w_2 twee lineaire combinaties zijn van $[b_1,\ldots, b_m]$, dan is ook $w_1 + w_2$ een lineaire combinatie van $[b_1,\ldots, b_m]$. Welnu, als $w_1 = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m$ en $w_2 = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_m b_m$, dan is $w_1 + w_2 = (\lambda_1 + \mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_m + \mu_m)b_m$, dus ook een lineaire combinatie van $[b_1, \ldots, b_m]$.

ad (ii): Zij $w \in W$, zeg: $w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m$, en $\lambda \in \mathbb{F}$. Dan is $\lambda w = \lambda(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m) = (\lambda\lambda_1)b_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)b_m$, een lineaire combinatie van $[b_1, \ldots, b_m]$, en derhalve een element van W.

ad (iii): $W \neq \emptyset$ want $b_1 = 1\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + \ldots + 0\cdot b_m \in W$. □

II.3.14 Definitie: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[b_1, \ldots, b_m]$ een m-tupel uit V, dan heet de lineaire deelruimte W van alle lineaire combinaties van $[b_1, \ldots, b_m]$ de $\mathbb{F}$-vectorruimte, opgespannen door $[b_1, \ldots, b_m]$, of: de lineaire deelruimte van V, opgespannen door $[b_1, \ldots, b_m]$.

II.3.15 Definitie: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[b_1, \ldots, b_m]$ een m-tupel uit V, dan heet de dimensie van de lineaire deelruimte van V die opgespannen wordt door $[b_1, \ldots, b_m]$ de rang van $[b_1, \ldots, b_m]$.

II.3.16 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[b_1, \ldots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V, dan is $[b_1, \ldots, b_m]$ een basis van de lineaire deelruimte W van V die opgespannen wordt door $[b_1, \ldots, b_m]$ en is m de rang van $[b_1, \ldots, b_m]$.

Bewijs: $[b_1, \ldots, b_m]$ is een lineair onafhankelijk stelsel van W. Bovendien is - per definitie van W - elke vector $w \in W$ een lineaire combinatie van $[b_1, \ldots, b_m]$, zodat dit m-tupel een basis is van W. Bijgevolg is m de dimensie van W en derhalve de rang van $[b_1, \ldots, b_m]$. □

II.3.17 Propositie: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[b_1, \ldots, b_m]$ een m-tupel uit V van rang k, dan is $k \le m$ en er zijn k vectoren $b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}$ uit dit m-tupel, zodat $[b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van V, dat bovendien een basis is voor de lineaire deelruimte van V, opgespannen door $[b_1, \ldots, b_m]$.

Bewijs: Zij W de lineaire deelruimte van V, opgespannen door $[b_1, \ldots, b_m]$. Dan is k de dimensie van W.

Is $b_1 = \ldots = b_m = 0$, dan is $W = \{0\}$ en $k = 0$ en is de propositie triviaal. Neem nu aan dat er een $i \in \{1, \ldots, m\}$ is met $b_i \neq 0$. Dan bestaan er lineair onafhankelijke stelsels van W (bijvoorbeeld: het 1-tupel $[b_i]$). Kies nu een maximaal getal l zodat er l vectoren $b_{i_1}, \ldots, b_{i_l}$ uit $[b_1, \ldots, b_m]$ bestaan zodat $[b_{i_1}, \ldots, b_{i_l}]$ een lineair onafhankelijk stelsel van W is. Dan is elke b_j ($j \in \{1, \ldots, m\}$) een lineaire combinatie van dit l-tupel: als b_j in het l-tupel voorkomt spreekt dit vanzelf. Zij nu b_j een vector uit $[b_1, \ldots, b_m]$ die niet in $[b_{i_1}, \ldots, b_{i_l}]$ voorkomt. Als b_j geen lineaire combinatie van dit l-tupel was, dan zou $[b_{i_1}, \ldots, b_{i_l}, b_j]$ volgens II.3.6 een uit $l + 1$ vectoren bestaand lineair onafhankelijk stelsel van W zijn, waarvan alle elementen afkomstig zijn uit $[b_1, \ldots, b_m]$ en dit is in tegenspraak met de maximaliteit van l. Dus is elke b_j een lineaire combinatie van $[b_{i_1}, \ldots, b_{i_l}]$.

Als W_1 de lineaire deelruimte is van V die opgespannen wordt door het lineair onafhankelijke deelstelsel $[b_{i_1}, \ldots, b_{i_l}]$ van $[b_1, \ldots, b_m]$ dan is uiteraard $W_1 \subset W$. Ook is $W \subset W_1$, want elke vector $w \in W$ is te schrijven in de vorm: $w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m$. Omdat W_1 een lineaire deelruimte van V is en, volgens het voorgaande, $b_1, \ldots, b_m \in W_1$, is ook $w \in W_1$ (cf. II.3.10).

We hebben nu gezien dat $W = W_1$. Dus is de basis $[b_{i_1}, \ldots, b_{i_l}]$ van W_1 een basis van W, zodat l de dimensie van W is: $l = k$.

Bovendien volgt uit de constructie van l in het bewijs direkt dat $l \leq m$, dus $k \leq m$. □

II.3.18 Gevolg: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[b_1, \ldots, b_m]$ een m-tupel uit V van rang m, dan is $[b_1, \ldots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel van V.

Bewijs: Ga na! □

II.3.19 Gevolg: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte van dimensie n en is het n-tupel $[b_1, \ldots, b_n]$ een stelsel voortbrengenden van V, dan is dit n-tupel een basis van V.

Bewijs: De lineaire deelruimte, opgespannen door $[b_1, \ldots, b_n]$, van V is de verzameling van alle lineaire combinaties van $[b_1,\dots, b_n]$. Omdat dit n-tupel een stelsel voortbrengenden is van V, is elke vector van V een lineaire combinatie van $[b_1,\dots, b_n]$. Dus de lineaire deelruimte van V, opgespannen door $[b_1,\dots, b_n]$, is V zelf. Dus is de rang van $[b_1,\dots, b_n]$ gelijk aan de dimensie n van V. II.3.19 volgt nu direkt uit II.3.18. □

II.3.20 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is</u> $[b_1,\dots, b_m]$ <u>een m-tupel uit</u> V, <u>terwijl</u> $[b_{\sigma(1)},\dots, b_{\sigma(m)}]$ <u>het m-tupel is, verkregen uit</u> $[b_1,\dots, b_m]$ <u>door toepassing van een m-permutatie</u> σ, <u>dan hebben beide m-tupels dezelfde rang</u>.

<u>Bewijs</u>: Laat W_1 (resp. W_2) de lineaire deelruimte van V zijn, opgespannen door $[b_1,\dots, b_m]$ (resp. $[b_{\sigma(1)},\dots, b_{\sigma(m)}]$). Het is uiteraard voldoende als we bewijzen dat $W_1 = W_2$. Welnu, $[b_1,\dots, b_m]$ is een stelsel voortbrengenden van W_1. Volgens II.2.9 is dan ook $[b_{\sigma(1)},\dots, b_{\sigma(m)}]$ een stelsel voortbrengenden van W_1. Dus is elke vector uit W_1 een lineaire combinatie van dit laatste m-tupel, en is derhalve bevat in W_2. Dus, $W_1 \subset W_2$.

Is σ^{-1} de inverse m-permutatie van σ, dan ontstaat $[b_1,\dots, b_m]$ uit $[b_{\sigma(1)},\dots, b_{\sigma(m)}]$ door toepassing van σ^{-1} (ga na!). Dus is, omdat $[b_{\sigma(1)},\dots, b_{\sigma(m)}]$ een stelsel voortbrengenden is van W_2, volgens II.2.9 ook $[b_1,\dots, b_m]$ een stelsel voortbrengenden van W_2. Iedere vector uit W_2 is dus een lineaire combinatie van $[b_1,\dots, b_m]$ en derhalve bevat in W_1. Dus ook, $W_2 \subset W_1$.

Hiermee hebben we bewezen dat $W_1 = W_2$. □

II.3.21 In de voorgaande opmerking hebben we dus bewezen dat de rang van een m-tupel $[b_1,\dots, b_m]$ uit een $\mathbb{F}$-vectorruimte V niet afhangt van de volgorde waarin de vectoren $b_1,\dots, b_m$ in dat m-tupel voorkomen.

II.3.22 <u>Terminologie</u>: Als V een $\mathbb{F}$-vectorruimte is en $[b_1,\dots, b_m]$ en $[b'_1,\dots, b'_m]$ zijn twee m-tupels uit V, zodat voor twee verschillende indices $i,j \in \{1,\dots, m\}$ geldt:

$$\begin{cases} b'_k = b_k & \text{als } k \in \{1,\dots, m\} \text{ en } k \neq j, \\ b'_j = b_j + \lambda b_i & (\lambda \in \mathbb{F}), \end{cases}$$

dan zeggen we dat $[b'_1,\dots, b'_m]$ uit $[b_1,\dots, b_m]$ verkregen is door de i^{de} vector λ keer op te tellen bij de j^{de} vector.

II.3.23 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[b_1,\dots, b_m]$ een m-tupel uit V, terwijl $[b_1',\dots, b_m']$ het m-tupel is uit V, verkregen door de i^{de} vector uit $[b_1,\dots, b_m]$ λ keer op te tellen bij de j^{de} vector ($i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{F}$), dan hebben beide m-tupels dezelfde rang.

Bewijs: Zij W (resp. W') de lineaire deelruimte van V, opgespannen door $[b_1,\dots, b_m]$ (resp. $[b_1',\dots, b_m']$). Het is uiteraard voldoende om te laten zien dat $W = W'$.

Als $k \in \{1,\dots, m\}$ en $k \neq j$ dan is $b_k' = b_k$ zodat $b_k' \in W$. Ook is $b_j' = b_j + \lambda b_i$, een lineaire combinatie van de vectoren b_i en b_j uit W, zodat volgens II.3.10 ook $b_j' \in W$. Dus zijn al de vectoren $b_1',\dots, b_m'$ bevat in W. Nu is elke vector van W' een lineaire combinatie van $[b_1',\dots, b_m']$, dus - weer volgens II.3.10 - ook bevat in W. Hiermee is bewezen dat $W' \subset W$.
Als $k \in \{1,\dots, m\}$ en $k \neq j$ dan is $b_k = b_k' \in W'$. Ook is $b_j = (b_j + \lambda b_i) - \lambda b_i = b_j' - \lambda b_i'$ zodat ook b_j - zijnde een lineaire combinatie van vectoren b_j' en b_i' uit W' - bevat is in W'. Alle vectoren $b_1,\dots, b_m$ zijn dus bevat in W en daarmee (cf. II.3.10) ook alle lineaire combinaties van $[b_1,\dots, b_m]$. Dus is $W \subset W'$.

Samenvattend: $W = W'$, zodat de opmerking volgt. □

II.3.24 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[b_1,\dots, b_m]$ een m-tupel uit V zodat voor zekere $i \in \{1,\dots, m\}$ geldt: $b_i = 0$, dan is de rang van $[b_1,\dots, b_m]$ gelijk aan de rang van $[b_1,\dots, \hat{b}_i,\dots, b_m]$.

Bewijs: Ga na! □

II.3.25 Opmerking: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[b_1,\dots, b_m]$ een m-tupel uit V, dan is, als $[b_1',\dots, b_m']$ het m-tupel is, verkregen door in $[b_1,\dots, b_m]$ voor zekere $i \in \{1,\dots, m\}$ b_i te vervangen door λb_i ($\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$), de rang van $[b_1,\dots., b_m]$ gelijk aan de rang van $[b_1',\dots, b_m']$.

Bewijs: Zij W (resp. W') de lineaire deelruimte van V, opgespannen door $[b_1,\dots, b_m]$ (resp. $[b'_1,\dots, b'_m]$). Bewijs zelf, op een manier analoog aan de methode van het bewijs van II.3.23, dat W = W', waaruit de opmerking volgt. □

II.3.26 Gevolg: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[b_1,\dots, b_m]$ een m-tupel uit V en is voor zekere $i \in \{1,\dots, m\}$ b_i een lineaire combinatie van het (m - 1)-tupel $[b_1,\dots, \hat{b}_i,\dots, b_m]$, dan is de rang van dit (m - 1)-tupel gelijk aan de rang van $[b_1,\dots, b_m]$.

Bewijs: Omdat volgens II.3.21 de volgorde van de vectoren in $[b_1,\dots, b_m]$ de rang van dit m-tupel niet beïnvloedt, mogen we aannemen dat i = m. Dan is b_m een lineaire combinatie van $[b_1,\dots, b_{m-1}]$, zeg:

$$b_m = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{m-1} b_{m-1} \qquad (\lambda_1,\dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{F}) \qquad (*)$$

en we moeten bewijzen dat $[b_1,\dots, b_m]$ en $[b_1,\dots, b_{m-1}]$ dezelfde rang hebben. Tel hiertoe eerst in $[b_1,\dots, b_m]$ de eerste vector $-\lambda_1$ keer op bij de m-de vector. We krijgen het m-tupel $[b_1,\dots, b_{m-1}, b_m-\lambda_1 b_1]$. Tel in dit m-tupel de tweede vector $-\lambda_2$ keer op bij de m-de vector. We krijgen: $[b_1,\dots, b_{m-1}, b_m-\lambda_1 b_1-\lambda_2 b_2]$. Enz., enz. Zo doorgaande vinden we na (m - 1) keer het m-tupel

$$[b_1,\dots, b_{m-1}, b_m-\lambda_1 b_1-\lambda_2 b_2- \dots -\lambda_{m-1} b_{m-1}],$$

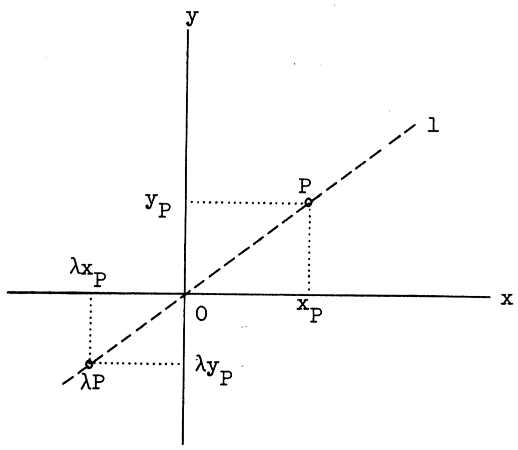
dat volgens II.3.23 nog steeds dezelfde rang heeft als $[b_1,\dots, b_m]$. Wegens (*) is $b_m - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \dots - \lambda_{m-1} b_{m-1} = 0$, zodat het m-tupel

$$[b_1,\dots, b_{m-1}, 0]$$

dezelfde rang heeft als $[b_1,\dots, b_m]$. Dus heeft volgens II.3.24 het (m - 1)-tupel $[b_1,\dots, b_{m-1}]$ dezelfde rang als $[b_1,\dots, b_m]$, zodat de opmerking bewezen is. □

Tot slot van deze paragraaf geven we enige voorbeelden.

II.3.27 Voorbeeld: Beschouw de 2-dimensionale reële vectorruimte $\mathbb{E}_2$. Kies een willekeurig punt P uit $\mathbb{E}_2$, zodat $P \neq 0$, de oorsprong van het gekozen assenstelsel.



Zij l de rechte door O en P. Dan zijn de punten van l de punten van de vorm λP met $\lambda \in \mathbb{R}$. De punten van deze rechte l vormen een lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_2$, want:

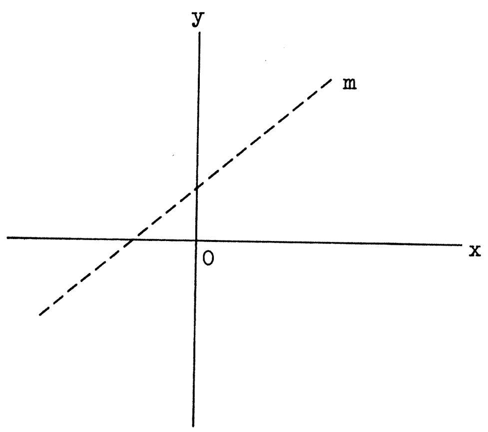
(i) Als $Q_1, Q_2 \in l$, zeg: $Q_1 = \lambda_1 P$ en $Q_2 = \lambda_2 P$, dan is $Q_1 + Q_2 = \lambda_1 P + \lambda_2 P = (\lambda_1 + \lambda_2)P$ eveneens een punt van l.

(ii) Is $Q \in l$ met $Q = \lambda P$ en is $\mu \in \mathbb{R}$, dan is wegens $\mu Q = \mu(\lambda P) = (\mu\lambda)P$ ook $\mu Q \in l$.

(iii) Wegens $0 \in l$ is $l \neq \emptyset$.

Hiermee zijn de voorwaarden uit definitie II.3.1 voor l geverifieerd, zodat l een lineaire deelruimte is van $\mathbb{E}_2$.

Omdat we P willekeurig ($\neq 0$) hebben gekozen, zien we hiermee dat elke rechte door O een lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_2$ is. Uiteraard zijn $\{0\}$ en $\mathbb{E}_2$ zelf ook lineaire deelruimten van $\mathbb{E}_2$.

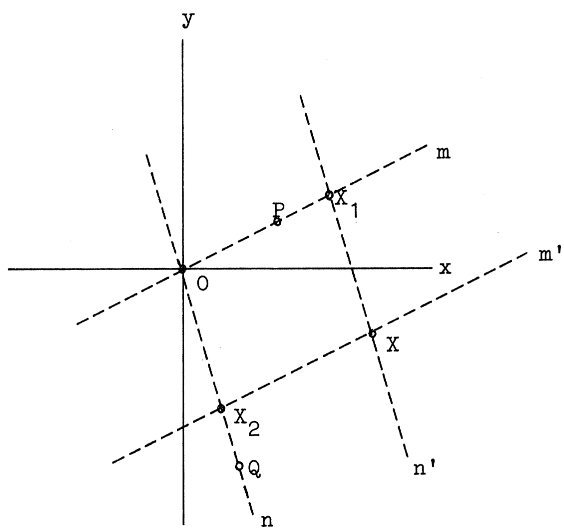


Is m een rechte in $\mathbb{E}_2$ die niet door 0 gaat, dan is m geen lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_2$ omdat volgens II.3.4 de nul-vector 0 van $\mathbb{E}_2$ in elke lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_2$ bevat moet zijn, en $0 \notin m$.

We zullen, om dit voorbeeld af te ronden, aantonen dat de lineaire deelruimten van $\mathbb{E}_2$ zijn:
(a) $\mathbb{E}_2$ zelf; (b) de rechten door 0; (c) de éénpuntsverzameling $\{0\}$.

We hebben al aangetoond dat al deze deelverzamelingen lineaire deelruimten zijn van $\mathbb{E}_2$ (de gevallen (a) en (c) zijn triviaal). We moeten derhalve alleen nog bewijzen dat elke lineaire deelruimte W van $\mathbb{E}_2$ van één der typen (a), (b) of (c) is.

Zij W een willekeurige lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_2$. Als $W = \{0\}$ zijn we klaar. Als $W \neq \{0\}$ dan kunnen we een punt P uit W kiezen met $P \neq 0$. Volgens II.3.1 (ii) is dan met P ook elk punt λP ($\lambda \in \mathbb{R}$) bevat in W, zodat de rechte m door 0 en P een deelverzameling is van W. Is $W = m$, dan behoort W tot de lineaire deelverzamelingen van type (b) van $\mathbb{E}_2$. Is $W \neq m$, dan bestaat er een punt $Q \notin m$ dat tot W behoort. In dit geval is $W = \mathbb{E}_2$. Om dit laatste te bewijzen moeten we laten zien dat ieder willekeurig gekozen punt X uit $\mathbb{E}_2$ tot W behoort.



Kies een willekeurig punt $X \in \mathbb{E}_2$. Zij n de rechte door 0 en Q (dan is n niet evenwijdig aan m). Trek door X rechten m' en n', evenwijdig aan m, resp. n. Dan hebben m en n' (resp. m' en n) een snijpunt X_1 (resp. X_2). X_2 ligt op n, dus $X_2 = \mu Q$ voor zekere $\mu \in \mathbb{R}$. Evenzo is er, omdat $X_1 \in m$, een reëel getal λ zodat $X_1 = \lambda P$. Omdat OX_2XX_1 een parallellogram is, is $X = X_1 + X_2 = \mu Q + \lambda P$. Omdat P en Q vectoren uit W zijn is volgens II.3.10 ook elke lineaire combinatie van [Q,P] in W bevat, zodat $X \in W$ (vgl. II.2.14).

Hiermee hebben we alle lineaire deelruimten van $\mathbb{E}_2$ bepaald.

II.3.28 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de reële vectorruimte $\mathbb{R}_3$ en daarin het 4-tupel [a,b,c,d], waarbij:

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \;,\; c = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \;,\; d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

We willen de rang van [a,b,c,d] bepalen.

Merk allereerst op dat, als W de lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}_3$ die door dit 4-tupel wordt opgespannen, wegens II.3.9 geldt:

$$\dim_{\mathbb{R}}(W) \le \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3) = 3$$

(cf. II.2.38). Dus is de rang van [a,b,c,d] hoogstens 3. Uit II.3.16 volgt hiermee, dat [a,b,c,d] een lineair afhankelijk stelsel is.

Nu geldt, zoals men gemakkelijk narekent:

$$c = 3a + 2b.$$

Dus is c een lineaire combinatie van [a,b,d] zodat volgens II.3.26 de rang van [a,b,d] gelijk is aan de rang van [a,b,c,d]. Vervolgens is

$$d = a - b,$$

een lineaire combinatie van [a,b]. Dus is - weer volgens II.3.26 - de rang van [a,b,d] (en daarmee de rang van [a,b,c,d]) gelijk aan de rang van [a,b].

Stel nu dat

$$\lambda a + \mu b = 0.$$

Dan geldt:

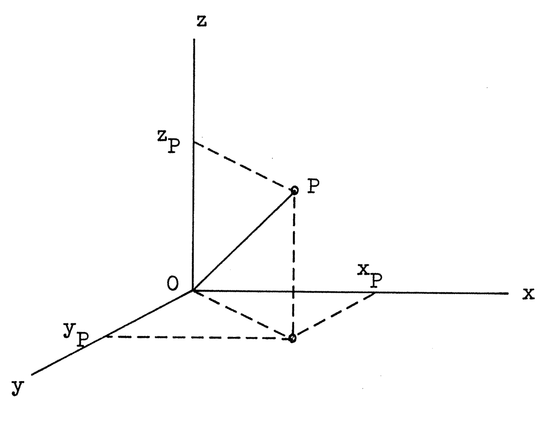
$$\begin{pmatrix} 2\lambda + \mu \\ \lambda - \mu \\ -2\mu \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oftewel:

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \\ -2\mu = 0. \end{cases}$$

Uit de derde vergelijking volgt: $\mu = 0$, zodat met de tweede vergelijking gevonden wordt: $\lambda = \mu = 0$ als enige mogelijkheid. Dus is het 2-tupel [a,b] een lineair onafhankelijk stelsel van $\mathbb{R}_3$. Volgens II.3.16 is dan de rang van [a,b] (en daarmee de rang van [a,b,c,d]) gelijk aan 2.

II.3.29 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw nu de 3-dimensionale euclidische ruimte en kies daarin een vast gekozen cartesisch assenstelsel.



De oorsprong geven we aan met O. Als P een punt uit deze ruimte is, dan kunnen we aan P toevoegen de reële (3×1)-matrix

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$

gevormd door de x-, y- en z-coördinaat x_P, y_P, resp. z_P van het punt P.

Analoog aan het geval van het euclidische platte vlak definiëren we een optelling en een reële scalaire vermenigvuldiging op de punten van de 3-dimensionale euclidische ruimte (met vast gekozen cartesisch assenstelsel):
als P en Q twee willekeurige punten zijn, gegeven door de corresponderende matrices

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix}$$

en λ is een reëel getal, dan is P + Q per definitie het punt R, corresponderend met de matrix

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P + x_Q \\ y_P + y_Q \\ z_P + z_Q \end{pmatrix},$$

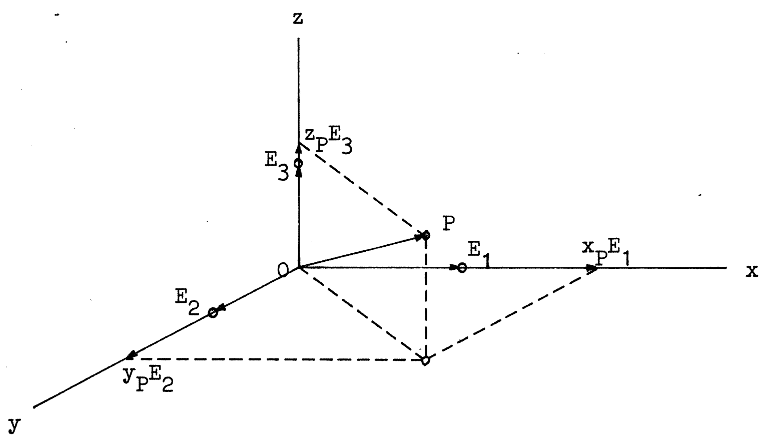
en λP is het punt S met bijbehorende matrix

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_P \\ \lambda y_P \\ \lambda z_P \end{pmatrix}.$$

De lezer ga na dat zo een reële vectorruimte is verkregen die we voortaan aan zullen duiden met het symbool $\mathbb{E}_3$.

Beschouw nu de punten E_1, E_2, E_3, gegeven door de respectievelijke matrices

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Voor een willekeurig gekozen punt $P \in \mathbb{E}_3$, corresponderend met

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$

geldt dan, wegens

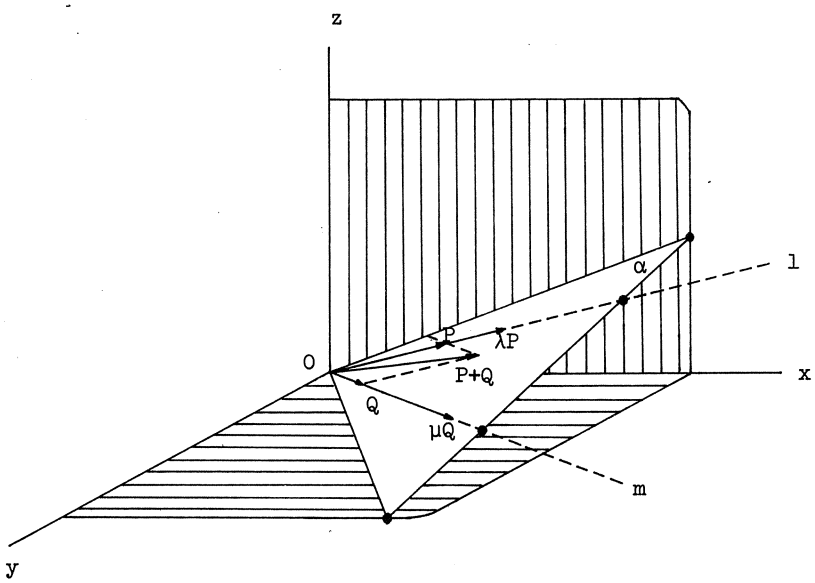
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_P \end{pmatrix},$$

dat

$$P = x_PE_1 + y_PE_2 + z_PE_3 .$$

Dus elk punt $P \in \mathbb{E}_3$ is een lineaire combinatie van het 3-tupel $[E_1,E_2,E_3]$ uit $\mathbb{E}_3$. Dit 3-tupel is derhalve een stelsel voortbrengenden van $\mathbb{E}_3$. De lezer ga vervolgens zelf na dat $[E_1,E_2,E_3]$ ook een lineair onafhankelijk stelsel - en dus een basis - van $\mathbb{E}_3$ is. Als gevolg hiervan hebben we tevens:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}_3) = 3 .$$



Kies nu een willekeurig punt $P \in \mathbb{E}_3$ met $P \neq 0$. Zij l de rechte door 0 en P. Dan is l de verzameling van alle punten λP $(\lambda \in \mathbb{R})$. l is een lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_3$. Dus elke rechte door 0 is een lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_3$.

Kies naast P vervolgens een punt $Q \in \mathbb{E}_3$, zodat $Q \notin l$. Zij m de rechte door 0 en Q. De twee verschillende rechten l en m door 0 bepalen het vlak α door 0, P en Q. Dit vlak α is de verzameling van alle punten $\lambda P + \mu Q$ $(\lambda,\mu \in \mathbb{R})$. Met andere woorden, α is de verzameling van alle lineaire combinaties van het 2-tupel $[P,Q]$ uit $\mathbb{E}_3$. Bijgevolg is ook α een lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_3$. Dus ook alle vlakken door 0 zijn lineaire deelruimten van $\mathbb{E}_3$.

Zij nu W een lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_3$. Dan is volgens II.3.9 de dimensie van W hooguit 3 (= de dimensie van $\mathbb{E}_3$).

(i) Stel: de dimensie van W is 0. Dan is $W = \{0\}$, dus W is in dit geval de lineaire deelruimte van $\mathbb{E}_3$ met als enige vector de oorsprong.

(ii) Stel: de dimensie van W is 1. Kies een punt $P \in W$ zodat $P \neq 0$. Dan is $[P]$ een lineair onafhankelijk stelsel van W. Volgens II.2.39 is $[P]$ dan een basis, en in het bijzonder een stelsel voortbrengenden van W. Dat wil zeggen dat iedere vector $Q \in W$ te schrijven is als: $Q = \lambda P$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Dus ieder punt van W ligt op de rechte l door 0 en P. Is, omgekeerd, Q' een punt van l, dan is er een reëel getal λ' met $Q' = \lambda' P$. Omdat $P \in W$, is dan volgens II.3.1 (ii) ook $Q' = \lambda' P \in W$, zodat ieder punt van l bevat is in W. Dus is $W = l$, een rechte door 0.

(iii) Stel: de dimensie van W is 2. Kies een basis [P,Q] van W. Dit is een lineair onafhankelijk stelsel, zodat $P \neq 0 \neq Q$ (cf. II.2.21). Zij l de rechte door 0 en P. Dan is $Q \notin l$, omdat als $Q \in l$, er een reëel getal $\mu \in \mathbb{R}$ zou bestaan met $Q = \mu P$, in tegenspraak met de lineaire onafhankelijkheid van [P,Q] Zij α het vlak door 0, P en Q. (Omdat $Q \notin l$ is α eenduidig bepaald!) Elk punt $R \in W$ is een lineaire combinatie van de basis [P,Q] van W, en dus bevat in α. Omgekeerd, als $R' \in \alpha$, dan is R' een lineaire combinatie van [P,Q] zodat, omdat $P,Q \in W$, volgens II.3.10 R' een punt van W is. Hiermee is bewezen dat $W = \alpha$, een vlak door 0.

(iv) Stel: de dimensie van W is 3. Dan zijn de dimensies van W en $\mathbb{E}_3$ gelijk, zodat volgens II.3.11 geldt: $W = \mathbb{E}_3$.

Samenvattend kunnen we dus opmerken dat er vier typen lineaire deelruimten van $\mathbb{E}_3$ zijn: $\{0\}$; de rechten door 0; de vlakken door 0; $\mathbb{E}_3$ zelf.

* * *

§II.4. <u>Lineaire afbeeldingen</u>

II.4.1 <u>Definitie</u>: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten, dan heet een afbeelding

$$\phi : V \to W$$

een <u>$\mathbb{F}$-lineaire afbeelding van</u> V <u>naar</u> W als voldaan is aan de volgende twee voorwaarden:

(i) Voor elk tweetal $v_1, v_2 \in V$ geldt:
$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$.

(ii) Voor elke $v \in V$ en elke $\lambda \in \mathbb{F}$ geldt:
$\phi(\lambda v) = \lambda \cdot \phi(v)$.

II.4.2. <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de afbeelding

$$\phi : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$$

die aan elke vector

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3$$

toevoegt het beeld

$$\phi\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2.$$

We gaan na dat ϕ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding is van $\mathbb{R}_3$ naar $\mathbb{R}_2$. Hiertoe controleren we de voorwaarden (i) en (ii) van II.4.1:

ad (i): Kies twee willekeurig gekozen vectoren

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3.$$

Dan geldt:

$$\phi\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right) = \phi\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_3+b_3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}a_1\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_3\end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

zodat aan voorwaarde (i) voldaan is.

ad (ii): Zij λ een willekeurig reëel getal en

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3.$$

Dan geldt voorwaarde (ii) ook:

$$\phi\left(\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right) = \phi\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_3\end{pmatrix} = \lambda\cdot\phi\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}.$$

Dus voldoet ϕ aan alle voorwaarden uit II.4.1.

II.4.3 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de afbeelding

$$\phi : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_3^*$$

die aan elke vector

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$$

toevoegt het beeld

$$\phi\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (2a_1,\ a_1-a_2,\ a_1+2a_2) \in \mathbb{R}_3^*.$$

Ook hier controleren we de voorwaarden (i) en (ii) van II.4.1:
<u>ad (i)</u>:

$$\phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) = \phi\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (2(a_1+b_1),\ (a_1+b_1)-(a_2+b_2),\ (a_1+b_1)+2(a_2+b_2)) =$$

$$= (2a_1,\ a_1-a_2,\ a_1+2a_2) + (2b_1,\ b_1-b_2,\ b_1+2b_2) =$$

$$= \phi\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

<u>ad (ii)</u>: Als $\lambda \in \mathbb{R}$, dan is:

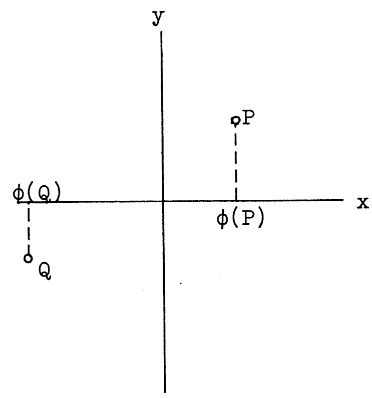
$$\phi(\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}) = \phi\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} = (2(\lambda a_1),\ \lambda a_1-\lambda a_2,\ \lambda a_1+2(\lambda a_2)) =$$

$$= (\lambda(2a_1),\ \lambda(a_1-a_2),\ \lambda(a_1+2a_2)) = \lambda(2a_1,\ a_1-a_2,\ a_1+2a_2) =$$

$$= \lambda\cdot\phi\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

We zien dus weer dat aan de voorwaarden van definitie II.4.1 is voldaan, zodat ϕ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding van $\mathbb{R}_2$ naar $\mathbb{R}_3^*$ is.

II.4.4 Voorbeeld:



Beschouw de afbeelding

$$\phi : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$$

die aan elk punt $P \in \mathbb{E}_2$ toevoegt de projectie van P op de x-as: $\phi(P)$.
Dat wil zeggen: als P als corresponderende matrix heeft

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix},$$

dan is het beeld $\phi(P)$ van P onder ϕ gegeven door de matrix

$$\overrightarrow{\phi(P)} = \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De lezer controlere dat ϕ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding is van $\mathbb{E}_2$ naar $\mathbb{E}_2$.

II.4.5 Voorbeeld: Beschouw de afbeelding

$$\phi : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$$

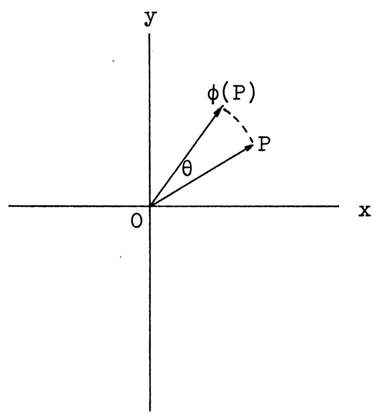
die aan elk punt P, met corresponderende matrix

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

toevoegt het beeld $\phi(P)$, gegeven door de matrix

$$\phi(\vec{P}) = \begin{pmatrix} x_P \cos\theta - y_P \sin\theta \\ x_P \sin\theta + y_P \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dat wil zeggen: ϕ is de afbeelding die aan een punt P uit $\mathbb{E}_2$ toevoegt het beeld $\phi(P)$ dat we verkrijgen door P te roteren om de oorsprong O over een hoek θ in de richting van de positieve x-as naar de positieve y-as.



Ook deze afbeelding is $\mathbb{R}$-lineair, zoals direkt te controleren is.

II.4.6 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is</u> $\phi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, dan is</u> $\phi(0) = 0$.

<u>Bewijs</u>: Kies een vector $v \in V$. Dan geldt:

$$\phi(0) = \phi(0 \cdot v) = 0 \cdot \phi(v) = 0. \quad \square$$

II.4.7 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> V <u>een $\mathbb{F}$-vectorruimte, dan is de identieke afbeelding</u>

$$id_V : V \to V$$

<u>van</u> V <u>$\mathbb{F}$-lineair</u>.

<u>Bewijs</u>: Ga na! $\square$

II.4.8 Opmerking: <u>Zijn</u> U, V, W <u>drie $\mathbb{F}$-vectorruimten en zijn</u>

$$\phi : U \to V \quad , \quad \psi : V \to W$$

<u>twee $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen, dan is hun samenstelling</u>

$$\psi \circ \phi : U \to W$$

<u>ook een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding</u>.

<u>Bewijs</u>: We controleren voor de afbeelding $\psi \circ \phi$ de voorwaarden (i) en (ii) van II.4.1:

<u>ad (i)</u>: Kies $u_1, u_2 \in U$ en noteer: $v_1 = \phi(u_1)$, $v_2 = \phi(u_2)$. Omdat ϕ en ψ $\mathbb{F}$-lineair zijn, geldt: $\psi(v_1) + \psi(v_2) = \psi(v_1 + v_2)$ en $\phi(u_1 + u_2) = \phi(u_1) + \phi(u_2)$. Derhalve:

$$\psi \circ \phi(u_1+u_2) = \psi(\phi(u_1+u_2)) = \psi(\phi(u_1) + \phi(u_2)) =$$

$$= \psi(v_1+v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2) = \psi(\phi(u_1)) + \psi(\phi(u_2)) =$$

$$= \psi \circ \phi(u_1) + \psi \circ \phi(u_2).$$

<u>ad (ii)</u>: Kies $\lambda \in \mathbb{F}$ en $u \in U$ en zij $v = \phi(u)$. Omdat $\phi(\lambda u) = \lambda \cdot \phi(u)$ en $\psi(\lambda v) = \lambda \cdot \psi(v)$, hebben we

$$\psi \circ \phi(\lambda u) = \psi(\phi(\lambda u)) = \psi(\lambda \cdot \phi(u)) = \psi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \psi(v) =$$

$$= \lambda \cdot \psi(\phi(u)) = \lambda \cdot \psi \circ \phi(u),$$

zodat de opmerking bewezen is. □

Ga na dat iets algemener geldt:

II.4.9 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> $V_0, V_1, \ldots, V_m$ $(m+1)$ <u>$\mathbb{F}$-vectorruimten zijn, en</u>

$$V_0 \xrightarrow[\phi_1]{} V_1 \xrightarrow[\phi_2]{} V_2 \xrightarrow[\phi_3]{} \cdots \xrightarrow[\phi_m]{} V_m$$

<u>is een m-tal $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen, dan is ook hun samenstelling</u>

$$\phi_m \circ \dots \circ \phi_1 : V_0 \to V_m$$

een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding.

II.4.10 Terminologie: Een isomorphisme $\phi : V \to W$ van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V naar een $\mathbb{F}$-vectorruimte W dat tevens een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding is, heet een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme.
Een endomorphisme $\psi : V \to V$ van een $\mathbb{F}$-vectorruimte V dat tevens een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding is, heet een $\mathbb{F}$-lineair endomorphisme.
Analoog definieert men $\mathbb{F}$-lineaire automorphismen van V.

II.4.11 Opmerking: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme, dan is ook de inverse afbeelding $\phi^{-1} : W \to V$ van ϕ een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme.

Bewijs: Volgens I.1.38 is $\phi^{-1} : W \to V$ een isomorphisme. We behoeven dus slechts te bewijzen dat ϕ^{-1} een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding is.

Als w een element van W is, dan volgt uit I.1.35 dat $\phi^{-1}(w) = v$ dan en slechts dan als $\phi(v) = w$.

We controleren weer de voorwaarden (i) en (ii) van II.4.1:
ad (i): Kies $w_1, w_2 \in W$. Noteer: $\phi^{-1}(w_1) = v_1$, $\phi^{-1}(w_2) = v_2$, $\phi^{-1}(w_1 + w_2) = v$. We moeten dan laten zien dat $v_1 + v_2 = v$ is. Er geldt: $\phi(v_1) = w_1$, $\phi(v_2) = w_2$, $\phi(v) = w_1 + w_2$. Omdat ϕ $\mathbb{F}$-lineair is geldt ook: $\phi(v_1) + \phi(v_2) = \phi(v_1 + v_2)$, zodat:

$$\phi(v) = w_1 + w_2 = \phi(v_1) + \phi(v_2) = \phi(v_1 + v_2).$$

Nu is ϕ een isomorphisme, dus injectief, terwijl de elementen v en $v_1 + v_2$ van V door ϕ worden afgebeeld op hetzelfde element $\phi(v) = \phi(v_1 + v_2)$ van W. Dus zijn deze elementen v en $v_1 + v_2$ gelijk.
ad (ii): Kies $\lambda \in \mathbb{F}$ en $w \in W$ en noteer: $\phi^{-1}(w) = v'$, $\phi^{-1}(\lambda w) = v''$. We moeten laten zien dat $v'' = \lambda v'$. Welnu: $\phi(v') = w$ en $\phi(v'') = \lambda w$, terwijl wegens de $\mathbb{F}$-lineariteit van ϕ geldt: $\phi(\lambda v') = \lambda\phi(v')$. Derhalve:

$$\phi(\lambda v') = \lambda\phi(v') = \lambda w = \phi(v'').$$

Wegens de injectiviteit van ϕ volgt hieruit: $\lambda v' = v''$, hetgeen we moesten bewijzen.

Hiermee is de opmerking geverifieerd. □

II.4.12 Terminologie: Als V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten zijn, en $\phi : V \to W$ is een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, terwijl $[b_1,\dots, b_m]$ een m-tupel is uit V, dan heet het m-tupel $[\phi(b_1),\dots, \phi(b_m)]$ uit W het beeld van $[b_1,\dots, b_m]$ onder ϕ.

II.4.13 Lemma: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[a_1,\dots, a_n]$ een basis van V, dan is er voor iedere vector $v \in V$ precies één n-tupel $[\lambda_1,\dots, \lambda_n]$ uit $\mathbb{F}$ zodat $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

Bewijs: Omdat $[a_1,\dots, a_n]$ als basis een stelsel voortbrengenden is van V, zijn er bij iedere vector $v \in V$ getallen $\lambda_1,\dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ te vinden zodat $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Dus bestaat er bij iedere vector $v \in V$ minstens één n-tupel $[\lambda_1,\dots, \lambda_n]$ uit $\mathbb{F}$ zodat $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

Als nu $[\lambda_1,\dots, \lambda_n]$ en $[\mu_1,\dots, \mu_n]$ twee n-tupels uit $\mathbb{F}$ zijn, zodat voor zekere $v \in V$ geldt: $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = v = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n$, dan moeten we nog aantonen dat beide n-tupels uit $\mathbb{F}$ gelijk zijn. Welnu, omdat geldt:

$$0 = (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) - (\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n) =$$

$$= (\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)a_n$$

en $[a_1,\dots, a_n]$ een lineair onafhankelijk stelsel is, volgt:

$$\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0$$

zodat $[\lambda_1,\dots, \lambda_n] = [\mu_1,\dots, \mu_n]$. Dus geldt het lemma. □

II.4.14 Propositie: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is $[a_1,\dots, a_n]$ een basis van V, terwijl $[w_1,\dots, w_n]$ een n-tupel is uit W, dan is er precies één $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding $\phi : V \to W$, met de eigenschap dat $[w_1,\dots, w_n]$ het beeld onder ϕ is van $[a_1,\dots, a_n]$.

Bewijs: We construeren eerst een afbeelding $\phi : V \to W$, zodat $\phi(a_i) = w_i$ $(i = 1,\dots, n)$ en bewijzen vervolgens dat ϕ $\mathbb{F}$-lineair is. Daarna laten we zien dat als ψ nog een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding van V naar W is zodat $\psi(a_i) = w_i$ $(i = 1,\dots, n)$, noodzakelijkerwijs geldt: $\psi = \phi$.

Om een afbeelding ϕ van V naar W te construeren, moeten we voor iedere vector $v \in V$ aangeven welke vector uit W het beeld onder ϕ van v is. Kies hiertoe een willekeurige vector $v \in V$. Omdat $[a_1,\dots, a_n]$ een basis is van V, is er precies één n-tupel $[\lambda_1,\dots, \lambda_n]$ uit $\mathbb{F}$, zodat $v = \lambda_1a_1 + \dots + \lambda_na_n$. Definieer nu:

$$\phi(v) = \lambda_1w_1 + \dots + \lambda_nw_n.$$

Omdat $a_i = \delta_{i1}a_1 + \dots + \delta_{in}a_n$ met $\delta_{ik} = 0$ als $i \neq k$ en $\delta_{ii} = 1$, volgt direkt: $\phi(a_i) = w_i$ $(i = 1,\dots, n)$.

Nu laten we zien dat ϕ $\mathbb{F}$-lineair is. We verifiëren hiertoe de voorwaarden (i) en (ii) van II.4.1:

ad (i): Als v_1 en v_2 vectoren in V zijn met:

$$v_1 = \lambda_1a_1 + \dots + \lambda_na_n \quad ; \quad v_2 = \mu_1a_1 + \dots + \mu_na_n$$

dan is

$$v_1 + v_2 = (\lambda_1 + \mu_1)a_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)a_n$$

zodat geldt:

$$\phi(v_1 + v_2) = (\lambda_1 + \mu_1)w_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)w_n =$$

$$= (\lambda_1w_1 + \dots + \lambda_nw_n) + (\mu_1w_1 + \dots + \mu_nw_n) = \phi(v_1) + \phi(v_2).$$

ad (ii): Is bovendien $\nu \in \mathbb{F}$, dan is

$$\nu v_1 = (\nu\lambda_1)a_1 + \dots + (\nu\lambda_n)a_n$$

zodat:

$$\phi(\nu v_1) = (\nu\lambda_1)w_1 + \dots + (\nu\lambda_n)w_n = \nu(\lambda_1w_1 + \dots \lambda_nw_n) = \nu\phi(v_1).$$

Hiermee is bewezen dat ϕ $\mathbb{F}$-lineair is.

Stel nu dat $\phi : V \to W$ en $\psi : V \to W$ twee $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen zijn, zodat $\phi(a_i) = w_i = \psi(a_i)$ $(i = 1,\ldots, n)$. We moeten dan aantonen dat $\phi = \psi$, oftewel dat voor een willekeurig gekozen vector $v \in V$ geldt: $\phi(v) = \psi(v)$. Welnu, als $v \in V$, dan zijn er getallen $\lambda_1,\ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ met $v = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$. Wegens de $\mathbb{F}$-lineariteit van ϕ en ψ geldt dan:

$$\begin{aligned}\phi(v) &= \phi(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) = \phi(\lambda_1 a_1) + \ldots + \phi(\lambda_n a_n) = \\ &= \lambda_1\phi(a_1) + \ldots + \lambda_n\phi(a_n) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n = \\ &= \lambda_1\psi(a_1) + \ldots + \lambda_n\psi(a_n) = \psi(\lambda_1 a_1) + \ldots + \psi(\lambda_n a_n) = \\ &= \psi(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) = \psi(v).\end{aligned}$$

Hiermee is de propositie bewezen. □

II.4.15 <u>Opmerking</u>: <u>De voorgaande propositie leert dat, als</u> V <u>en</u> W <u>$\mathbb{F}$-vectorruimten zijn en</u> $[a_1,\ldots, a_n]$ <u>is een basis van</u> V, <u>een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding</u> $\phi : V \to W$ <u>volledig bepaald is door het n-tupel</u> $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ <u>uit</u> W.

II.4.16 <u>Voorbeeld</u>: Kies in $\mathbb{E}_2$ de vectoren E_1 en E_2, gegeven door de matrices

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \text{resp.} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Dan is het 2-tupel $[E_1,E_2]$ een basis voor $\mathbb{E}_2$. Volgens II.4.15 kunnen we een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding

$$\phi : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$$

definiëren door aan te geven welk punt $\phi(E_1)$ is en welk punt $\phi(E_2)$ is.

Kies bijvoorbeeld $\phi(E_1) = F_1$, $\phi(E_2) = F_2$, waarbij F_1 en F_2 gegeven zijn door de matrices

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \text{resp.} \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

We bepalen nu voor de vector $P \in \mathbb{E}_2$, gegeven door de matrix

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

het beeld $\phi(P) \in \mathbb{E}_2$.

Wegens

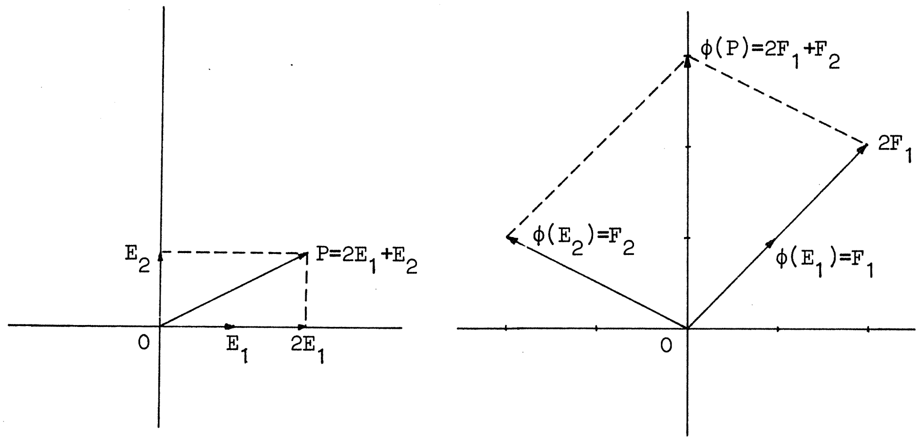
$$P = 2E_1 + E_2$$

geldt

$$\phi(P) = 2\phi(E_1) + \phi(E_2) = 2F_1 + F_2.$$

Dus wordt de matrix die correspondeert met $\phi(P)$:

$$\overrightarrow{\phi(P)} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



II.4.17 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw in $\mathbb{R}_3$ het 3-tupel $[a_1,a_2,a_3]$ met:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De lezer controlere zelf dat $[a_1,a_2,a_3]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van $\mathbb{R}_3$, en, omdat de dimensie van $\mathbb{R}_3$ 3 is, volgens II.2.39, een basis van $\mathbb{R}_3$.

Beschouw nu de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\phi : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_5^*$, gegeven door $\phi(a_1) = b_1$, $\phi(a_2) = b_2$, $\phi(a_3) = b_3$, met:

$$b_1 = (1,0,1,0,-1) \ ; \ b_2 = (1,1,2,1,1) \ ; \ b_3 = (2,0,1,0,3).$$

We bepalen nu het beeld $\phi(c) \in \mathbb{R}_5^*$ van de vector

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3.$$

Wegens $c = 2a_1 - 3a_2 + a_3$, zoals de lezer gemakkelijk narekent, is

$$\phi(c) = 2\phi(a_1) - 3\phi(a_2) + \phi(a_3) = 2b_1 - 3b_2 + b_3 =$$

$$= 2(1,0,1,0,-1) - 3(1,1,2,1,1) + (2,0,1,0,3) = (1,-3,-3,-3,-2).$$

II.4.18 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is</u> $\phi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, terwijl</u> $[b_1,\ldots, b_m]$ <u>een m-tupel is uit</u> V, <u>dan is, als het beeld</u> $[\phi(b_1),\ldots, \phi(b_m)]$ <u>onder</u> ϕ <u>van</u> $[b_1,\ldots, b_m]$ <u>een lineair onafhankelijk stelsel is van</u> W, <u>ook</u> $[b_1,\ldots, b_m]$ <u>een lineair onafhankelijk stelsel van</u> V.

<u>Bewijs</u>: Kies getallen $\lambda_1,\ldots, \lambda_m$ uit $\mathbb{F}$ zodat $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m = 0$. Dan is (cf. II.4.6):

$$\lambda_1\phi(b_1) + \ldots + \lambda_m\phi(b_m) = \phi(\lambda_1 b_1) + \ldots + \phi(\lambda_m b_m) =$$

$$= \phi(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m) = \phi(0) = 0.$$

Omdat $[\phi(b_1),\ldots, \phi(b_m)]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van W, volgt hieruit: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Hiermee is bewezen dat $[b_1,\ldots, b_m]$ een lineair onafhankelijk stelsel is van V. $\square$

II.4.19 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is</u> $\phi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, dan is</u> $\mathrm{Im}(\phi)$ (cf. I.1.18) <u>een lineaire deelruimte van</u> W.

<u>Bewijs</u>: We verifiëren de voorwaarden (i), (ii) en (iii) van II.3.1:

ad (i): Als w_1, w_2 twee vectoren zijn uit $\mathrm{Im}(\phi)$, dan zijn er vectoren $v_1, v_2 \in V$, zodat $w_1 = \phi(v_1)$ en $w_2 = \phi(v_2)$. Omdat ϕ $\mathbb{F}$-lineair is, volgt: $w_1 + w_2 = \phi(v_1) + \phi(v_2) = \phi(v_1 + v_2)$, zodat $w_1 + w_2$, zijnde het beeld van de vector $v_1 + v_2 \in V$, ook in $\mathrm{Im}(\phi)$ bevat is.
ad (ii): Als $w \in \mathrm{Im}(\phi)$ en $\lambda \in \mathbb{F}$, dan is er een vector $v \in V$ met $\phi(v) = w$. Dan is $\lambda w = \lambda\phi(v) = \phi(\lambda v)$ het beeld van de vector $\lambda v \in V$, zodat $\lambda w \in \mathrm{Im}(\phi)$.
ad (iii): $\mathrm{Im}(\phi) \neq \emptyset$, want $0 = \phi(0)$, dus $0 \in \mathrm{Im}(\phi)$. □

II.4.20 Opmerking: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, terwijl $[b_1, \ldots, b_m]$ een stelsel voortbrengenden is van V, dan is $[\phi(b_1), \ldots, \phi(b_n)]$ een stelsel voortbrengenden van $\mathrm{Im}(\phi)$.

Bewijs: Kies een willekeurige vector $w \in \mathrm{Im}(\phi)$. Dan is er een vector $v \in V$, zodat $\phi(v) = w$. Omdat $[b_1, \ldots, b_m]$ een stelsel voortbrengenden is van V, zijn er getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ met $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m$. Dan volgt:

$$w = \phi(v) = \phi(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m) = \lambda_1\phi(b_1) + \ldots + \lambda_m\phi(b_m)$$

zodat w een lineaire combinatie is van $[\phi(b_1), \ldots, \phi(b_m)]$.

We zien dat iedere vector $w \in \mathrm{Im}(\phi)$ een lineaire combinatie is van $[\phi(b_1), \ldots, \phi(b_m)]$, hetgeen de opmerking bewijst. □

II.4.21 Definitie: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, dan heet de deelverzameling

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{v \mid v \in V \quad \text{en} \quad \phi(v) = 0\}$$

van V de kern van de afbeelding ϕ.

II.4.22 Opmerking: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, dan is $\mathrm{Ker}(\phi)$ een lineaire deelruimte van V.

Bewijs: We controleren de voorwaarden (i), (ii) en (iii) van II.3.1:
ad (i): Als v_1 en v_2 twee vectoren uit $\mathrm{Ker}(\phi)$ zijn, dan is $\phi(v_1) = 0 = \phi(v_2)$, zodat wegens $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) = 0 + 0 = 0$ ook $v_1 + v_2 \in \mathrm{Ker}(\phi)$.
ad (ii): Als $v \in \mathrm{Ker}(\phi)$ en $\lambda \in \mathbb{F}$, dan is $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(v) = \lambda \cdot 0 = 0$, zodat ook

$\lambda v \in \mathrm{Ker}(\phi)$.

ad (iii): Wegens $0 \in V$ en $\phi(0) = 0$ is $0 \in \mathrm{Ker}(\phi)$, zodat $\mathrm{Ker}(\phi) \neq \emptyset$. □

II.4.23 Opmerking: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten, dan geldt voor iedere $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding $\phi : V \to W$: ϕ is injectief dan en slechts dan als $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$.

Bewijs: Veronderstel eerst dat ϕ injectief is. Als $v \in \mathrm{Ker}(\phi)$, dan is $\phi(v) = 0 = \phi(0)$, zodat de vectoren v en 0 van V hetzelfde beeld hebben onder ϕ. Omdat ϕ injectief is, moeten deze vectoren dan gelijk zijn: $v = 0$. Dus is 0 de enige vector uit $\mathrm{Ker}(\phi)$, zodat $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$.

Veronderstel nu dat $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$. Om te bewijzen dat ϕ injectief is, moeten we laten zien dat voor ieder tweetal vectoren $v_1, v_2 \in V$ met $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ geldt: $v_1 = v_2$. Welnu, kies een willekeurig tweetal $v_1, v_2 \in V$ en veronderstel: $\phi(v_1) = \phi(v_2)$. Dan is $\phi(v_1 - v_2) = \phi(v_1) - \phi(v_2) = 0$, zodat $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Omdat $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$, moet gelden: $v_1 - v_2 = 0$, oftewel: $v_1 = v_2$.

Hiermee is de opmerking bewezen. □

II.4.24 Stelling: Zijn V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten en is $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding van V naar W, dan is

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\phi)) + \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim_{\mathbb{F}}(V).$$

Bewijs: Noteer:

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = m \qquad ; \qquad \dim_{\mathbb{F}}(V) = n.$$

Kies een basis $[k_1, \ldots, k_m]$ van $\mathrm{Ker}(\phi)$. Volgens II.2.32 kunnen we $n - m$ vectoren $a_1, \ldots, a_{n-m}$ uit V kiezen, zodat het n-tupel $[k_1, \ldots, k_m, a_1, \ldots, a_{n-m}]$ een basis is van V. Volgens II.4.20 is dan

$$[0, \ldots, 0, \phi(a_1), \ldots, \phi(a_{n-m})] =$$

$$= [\phi(k_1), \ldots, \phi(k_m), \phi(a_1), \ldots, \phi(a_{n-m})]$$

een stelsel voortbrengenden van $\mathrm{Im}(\phi)$. Maar dan is ook $[\phi(a_1), \ldots, \phi(a_{n-m})]$

een stelsel voortbrengenden van $\mathrm{Im}(\phi)$ (ga na!). Kies nu getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{F}$ zodat

$$\lambda_1\phi(a_1) + \ldots + \lambda_{n-m}\phi(a_{n-m}) = 0. \qquad (*)$$

Dan is wegens

$$\phi(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n-m}a_{n-m}) = \lambda_1\phi(a_1) + \ldots + \lambda_{n-m}\phi(a_{n-m}) = 0$$

de vector $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n-m}a_{n-m}$ bevat in $\mathrm{Ker}(\phi)$. Omdat $[k_1, \ldots, k_m]$ een basis is van $\mathrm{Ker}(\phi)$, zijn er getallen $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{F}$ zodat

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n-m}a_{n-m} = \mu_1 k_1 + \ldots + \mu_m k_m,$$

oftewel:

$$\mu_1 k_1 + \ldots + \mu_m k_m + (-\lambda_1)a_1 + \ldots + (-\lambda_{n-m})a_{n-m} = 0.$$

Omdat $[k_1, \ldots, k_m, a_1, \ldots, a_{n-m}]$ een lineair onafhankelijk stelsel is, volgt hieruit:

$$\mu_1 = \ldots = \mu_m = -\lambda_1 = \ldots = -\lambda_{n-m} = 0$$

en in het bijzonder: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-m} = 0$. Dus volgt uit (*) dat $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-m} = 0$. Met andere woorden: $[\phi(a_1), \ldots, \phi(a_{n-m})]$ is een lineair onafhankelijk stelsel, dat bovendien $\mathrm{Im}(\phi)$ voortbrengt. Dit $(n - m)$-tupel is dus een basis voor $\mathrm{Im}(\phi)$, wat betekent:

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = n - m = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\phi)).$$

Hieruit volgt de stelling. □

II.4.25 <u>Gevolg</u>: <u>Zijn</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten, en is</u> $\phi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire injectieve afbeelding, dan is voor elke basis</u> $[a_1, \ldots, a_n]$ <u>van</u> V $[\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)]$ <u>een basis van</u> $\mathrm{Im}(\phi)$.

<u>Bewijs</u>: $[a_1, \ldots, a_n]$ is een basis van V, dus volgens II.4.20 is

$[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ een stelsel voortbrengenden van $\mathrm{Im}(\phi)$. Bovendien is volgens II.4.24:

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = n - 0 = n$$

(omdat, volgens II.4.23 $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$, zodat $\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = 0$). Volgens II.2.39 is $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ dan een basis van $\mathrm{Im}(\phi)$. □

II.4.26 <u>Gevolg</u>: <u>Zijn</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten, en is</u> $\phi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme van</u> V <u>naar</u> W, <u>dan is een n-tupel</u> $[a_1,\ldots, a_n]$ <u>een basis voor</u> V <u>dan en slechts dan als</u> $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ <u>een basis is voor</u> W.

<u>Bewijs</u>:
(i) Stel eerst dat $[a_1,\ldots, a_n]$ een basis is voor V. Omdat ϕ als isomorphisme injectief is, is volgens II.4.25 $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ een basis voor $\mathrm{Im}(\phi)$. Omdat ϕ ook surjectief is, is volgens I.1.20 $\mathrm{Im}(\phi) = W$, zodat $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ een basis is van W.
(ii) Stel nu dat $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ een basis is van W. Nu is volgens II.4.11 $\phi^{-1} : W \to V$ ook een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme. Volgens het eerste deel van dit bewijs (met ϕ^{-1} i.p.v. ϕ en de basis $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ van W i.p.v. de basis $[a_1,\ldots, a_n]$ van V) is dan $[a_1,\ldots, a_n] = [\phi^{-1}\phi(a_1),\ldots, \phi^{-1}\phi(a_n)]$ een basis van V.

Dus is II.4.26 bewezen. □

II.4.27 <u>Gevolg</u>: <u>Zijn</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten van gelijke dimensie en is</u> $\phi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire injectieve afbeelding van</u> V <u>naar</u> W, <u>dan is</u> ϕ <u>een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies een basis $[a_1,\ldots, a_n]$ van V. Volgens II.4.25 is dan $[\phi(a_1),\ldots, \phi(a_n)]$ een basis van $\mathrm{Im}(\phi)$. Dus is:

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = n = \dim_{\mathbb{F}}(V) = \dim_{\mathbb{F}}(W).$$

Nu is $\mathrm{Im}(\phi)$ een lineaire deelruimte van W met dezelfde dimensie als W. Volgens II.3.11 is dan $\mathrm{Im}(\phi) = W$, zodat ϕ surjectief, en dus bijectief is. Dan is ϕ volgens I.1.33 een isomorphisme, zodat II.4.27 volgt. □

II.4.28 Gevolg: <u>Zijn</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten van gelijke dimensie en is</u> $\phi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire surjectieve afbeelding van</u> V <u>naar</u> W , <u>dan is</u> ϕ <u>een $\mathbb{F}$-lineair isomorphisme</u>.

<u>Bewijs</u>: Omdat ϕ surjectief is, is $\mathrm{Im}(\phi) = W$. Derhalve is

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim_{\mathbb{F}}(W) = \dim_{\mathbb{F}}(V)$$

zodat met II.4.24 hieruit volgt:

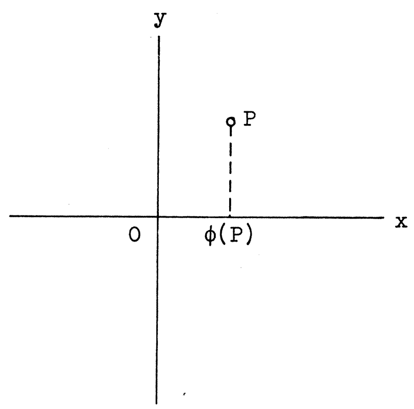
$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\phi)) = 0.$$

Dus is $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$, wat inhoudt dat ϕ injectief is (cf. II.4.23). Volgens II.4.27 is ϕ dan een isomorphisme. □

II.4.29 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw nog eens het $\mathbb{R}$-lineaire endomorphisme

$$\phi : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$$

uit voorbeeld II.4.4.



Voor een willekeurig punt P met corresponderende matrix

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

werd het beeld $\phi(P)$ gegeven door de matrix

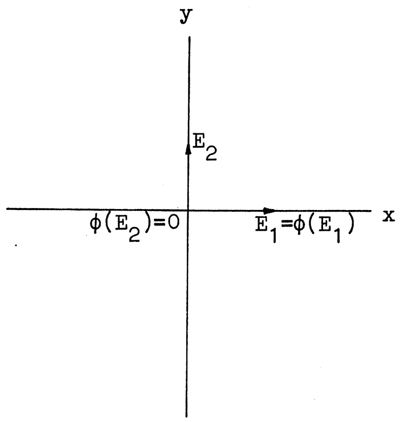
$$\overrightarrow{\phi(P)} = \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We willen nu Ker(ϕ) en Im(ϕ) bepalen.

Beschouw de vectoren E_1 en E_2 uit $\mathbb{E}_2$, gegeven door:

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \text{ resp. } \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dan is $\phi(E_1) = E_1$ en $\phi(E_2) = 0$, zodat $E_1 \in \mathrm{Im}(\phi)$ en $E_2 \in \mathrm{Ker}(\phi)$.



Omdat $E_1 \neq 0 \neq E_2$, zijn $[E_1]$ en $[E_2]$ lineair onafhankelijke stelsels van Im(ϕ), resp. Ker(ϕ). Met II.2.40 volgt hieruit:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\phi)) \geq 1 \quad ; \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\phi)) \geq 1. \qquad (*)$$

Ook geldt volgens II.4.24:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\phi)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}_2) = 2. \qquad (**)$$

Uit (*) en (**) volgt dan:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\phi)) = 1 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\phi)).$$

Met II.2.39 volgt hieruit dat $[E_1]$ en $[E_2]$ bases zijn voor Im(ϕ), resp. Ker(ϕ). Dus:

$$\mathrm{Im}(\phi) = \{\lambda E_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \;;\; \mathrm{Ker}(\phi) = \{\lambda E_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

II.4.30 <u>Definitie</u>: Als V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten zijn en $\phi : V \to W$ en $\psi : V \to W$ zijn twee $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen van V naar W, dan noteren we:

$$\phi + \psi : V \to W$$

voor de afbeelding van V naar W die per definitie aan elk element $v \in V$ toevoegt het beeld

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v) \in W.$$

II.4.31 <u>Opmerking</u>: <u>Als</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten zijn en</u> $\phi : V \to W$ <u>en</u> $\psi : V \to W$ <u>zijn twee $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen, dan is ook</u> $\phi + \psi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding</u>.

<u>Bewijs</u>: We controleren de voorwaarden (i) en (ii) van II.4.1:
<u>ad (i)</u>: Als $v_1, v_2 \in V$, dan geldt:

$$(\phi + \psi)(v_1 + v_2) = \phi(v_1 + v_2) + \psi(v_1 + v_2) =$$

$$= \phi(v_1) + \phi(v_2) + \psi(v_1) + \psi(v_2) =$$

$$= [\phi(v_1) + \psi(v_1)] + [\phi(v_2) + \psi(v_2)] = (\phi + \psi)(v_1) + (\phi + \psi)(v_2).$$

<u>ad (ii)</u>: Als $v \in V$ en $\lambda \in \mathbb{F}$, dan geldt:

$$(\phi + \psi)(\lambda v) = \phi(\lambda v) + \psi(\lambda v) = \lambda\cdot\phi(v) + \lambda\cdot\psi(v) =$$

$$= \lambda\cdot(\phi(v) + \psi(v)) = \lambda\cdot(\phi + \psi)(v). \;\square$$

II.4.32 <u>Definitie</u>: Als V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten zijn en $\phi : V \to W$ is een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, terwijl $\alpha \in \mathbb{F}$, dan noteren we:

$$\alpha\cdot\phi : V \to W$$

voor de afbeelding van V naar W die per definitie aan elk element $v \in V$ toevoegt het beeld

$$(\alpha\cdot\phi)(v) = \alpha\cdot\phi(v) \in W.$$

II.4.33 Opmerking: Als V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten zijn en $\phi : V \to W$ is een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, terwijl $\alpha \in \mathbb{F}$, dan is ook $\alpha\cdot\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding.

Bewijs: We verifiëren II.4.1 (i) en II.4.1 (ii):
ad (i): Als $v_1, v_2 \in V$, dan geldt:

$$(\alpha\cdot\phi)(v_1 + v_2) = \alpha\cdot\phi(v_1 + v_2) = \alpha\cdot[\phi(v_1) + \phi(v_2)] =$$

$$= \alpha\cdot\phi(v_1) + \alpha\cdot\phi(v_2) = (\alpha\cdot\phi)(v_1) + (\alpha\cdot\phi)(v_2).$$

ad (ii): Als $v \in V$ en $\lambda \in \mathbb{F}$, dan geldt:

$$(\alpha\cdot\phi)(\lambda v) = \alpha\cdot\phi(\lambda v) = \alpha\cdot(\lambda\cdot\phi(v)) = (\alpha\cdot\lambda)\ \phi(v) =$$

$$= (\lambda\cdot\alpha)\ \phi(v) = \lambda\cdot(\alpha\cdot\phi(v)) = \lambda\cdot(\alpha\cdot(\phi)(v).$$

Hiermee is de opmerking bewezen. □

II.4.34 Tot slot van deze paragraaf nog een algemene opmerking. Beschouw eens twee $\mathbb{F}$-vectorruimten V en W. Noteer met

$$M_{\mathbb{F}}(V,W)$$

de verzameling van alle $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen van V naar W. We kunnen blijkens II.4.31 en II.4.33 een binaire operatie

$$m : M_{\mathbb{F}}(V,W)\ \Pi\ M_{\mathbb{F}}(V,W) \to M_{\mathbb{F}}(V,W)$$

op deze verzameling definiëren met:

$$m(\phi,\psi) = \phi + \psi.$$

De lezer ga na dat $M_{\mathbb{F}}(V,W)$ met deze binaire operatie een abelse groep wordt.

Vervolgens kunnen we een operatie

$$\sigma : \mathbb{F} \amalg M_{\mathbb{F}}(V,W) \to M_{\mathbb{F}}(V,W)$$

van $\mathbb{F}$ op $M_{\mathbb{F}}(V,W)$ definiëren door:

$$\sigma(\alpha,\phi) = \alpha\cdot\phi.$$

Ga na dat zo een $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging op $M_{\mathbb{F}}(V,W)$ verkregen wordt, zodat -met optelling m en $\mathbb{F}$-scalaire vermenigvuldiging σ- $M_{\mathbb{F}}(V,W)$ een $\mathbb{F}$-lineaire ruimte is.

* * *

§II.5. Matrices en lineaire afbeeldingen

II.5.1 Beschouw een $\mathbb{F}$-vectorruimte V en vervolgens een basis $[a_1,\dots, a_n]$ van V. Als v een vector is uit V, dan bestaat er volgens II.4.13 precies één n-tupel $[\lambda_1,\dots, \lambda_n]$ uit $\mathbb{F}$, zodat

$$v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n.$$

Hadden we een andere basis $[a_1',\dots, a_n']$ van V gekozen, dan hadden we uiteraard een ander n-tupel $[\lambda_1',\dots, \lambda_n']$ uit $\mathbb{F}$ moeten kiezen opdat

$$v = \lambda_1' a_1' + \dots + \lambda_n' a_n'.$$

Ook in dit laatste geval zou echter, gegeven deze basis $[a_1',\dots, a_n']$ van V, het n-tupel $[\lambda_1',\dots, \lambda_n']$ uit $\mathbb{F}$ door v éénduidig bepaald zijn geweest.

We zien dus dat, als we in een $\mathbb{F}$-vectorruimte V een basis $[a_1,\dots, a_n]$ vooraf vast kiezen, elke vector $v \in V$ precies één n-tupel $[\lambda_1,\dots, \lambda_n]$ uit $\mathbb{F}$ bepaalt middels de relatie $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Omgekeerd bepaalt uiteraard -gegeven V en $[a_1,\dots, a_n]$- elk n-tupel $[\lambda_1,\dots, \lambda_n]$ uit $\mathbb{F}$ de éénduidig bepaalde vector $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ uit V.

Deze vaststelling rechtvaardigt de volgende notatie-afspraak:

II.5.2 <u>Notatie</u>: Is V een $\mathbb{F}$-vectorruimte en is $[a_1, \ldots, a_n]$ een basis van V, dan noteren we:

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n])$$

als $v = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$.

II.5.3 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de $\mathbb{R}$-vectorruimte $\mathbb{R}_3^*$ en de basis $[e_1, e_2, e_3]$ van $\mathbb{R}_3^*$, gegeven door:

$$e_1 = (1,0,0) \quad ; \quad e_2 = (0,1,0) \quad ; \quad e_3 = (0,0,1).$$

Beschouw vervolgens de vector $v = (2,-1,4)$ uit $\mathbb{R}_3^*$. Wegens

$$v = 2e_1 - e_2 + 4e_3$$

kunnen we dan ook noteren:

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*, [e_1, e_2, e_3]).$$

Hadden we in plaats van $[e_1, e_2, e_3]$ een andere basis van $\mathbb{R}_3^*$ gekozen, bijvoorbeeld $[a_1, a_2, a_3]$, gegeven door:

$$a_1 = (1,1,1) \quad ; \quad a_2 = (1,-1,2) \quad ; \quad a_3 = (0,-2,2) \qquad (*)$$

dan rekent men gemakkelijk na dat geldt:

$$v = a_1 + a_2 + \tfrac{1}{2}a_3 ,$$

zodat in dit geval

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*, [a_1, a_2, a_3]). \qquad (**)$$

Let goed op de volgorde der in de basis voorkomende vectoren; hadden we in plaats van de basis (*) van $\mathbb{R}_3^*$ gekozen de basis $[a_1', a_2', a_3']$ met:

$$a_1' = (1,-1,2) \quad ; \quad a_2' = (0,-2,2) \quad ; \quad a_3' = (1,1,1)$$

(zodat $[a_1', a_2', a_3'] = [a_2, a_3, a_1]$) dan hadden we in plaats van (**) verkregen:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*, [a_1', a_2', a_3'])$$

wegens $v = a_1' + \frac{1}{2}a_2' + a_3'$, of, wat hetzelfde is:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*, [a_2, a_3, a_1]).$$

Tenslotte, als:

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*, [a_1, a_2, a_3]),$$

dan is

$$w = 2a_1 + 4a_2 - 3a_3 = 2(1,1,1) + 4(1,-1,2) - 3(0,-2,2) =$$

$$= (2,2,2) + (4,-4,8) + (0,6,-6) = (6,4,4) \in \mathbb{R}_3^*,$$

terwijl, als

$$w' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*, [a_3, a_2, a_1]),$$

geldt:

$$w' = 2a_3 + 4a_2 - 3a_1 = 2(0,-2,2) + 4(1,-1,2) - 3(1,1,1) =$$

$$= (0,-4,4) + (4,-4,8) + (-3,-3,-3) = (1,-11,9) \in \mathbb{R}_3^*.$$

II.5.4 Merk nog op dat voor iedere $\mathbb{F}$-vectorruimte V en voor elke basis $[a_1,\ldots, a_n]$ van V geldt:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n])$$

en bovendien:

$$a_i = \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \vdots \\ \delta_{ni} \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]) \qquad (i = 1,\ldots, n),$$

waarbij $\delta_{ki} = 0$ als $k \neq i$ en $\delta_{ii} = 1$ $(i = 1,\ldots, n)$. Vervolgens, als

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]) \quad ; \quad w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]),$$

dan is voor iedere $\lambda,\mu \in \mathbb{F}$:

$$\lambda v + \mu w = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n]).$$

(Ga na!)

II.5.5 Beschouw weer een $\mathbb{F}$-vectorruimte V met een basis $[a_1,\ldots, a_n]$. Zij voorts $[v_1,\ldots, v_m]$ een m-tupel uit V, zeg (enigszins verkort genoteerd):

$$v_1, v_2, \ldots, v_m = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1m} \\ \alpha_{2m} \\ \vdots \\ \alpha_{nm} \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n]).$$

Dan kunnen we aan dit m-tupel $[v_1, \ldots, v_m]$ toevoegen de $(n \times m)$-matrix uit $\mathbb{F}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Het is uit II.5.1 duidelijk dat zo ieder m-tupel uit V, gegeven de basis $[a_1, \ldots, a_n]$ van V, op éénduidige wijze een $(n \times m)$-matrix uit $\mathbb{F}$ oplevert. Omgekeerd induceert iedere $(n \times m)$-matrix

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nm} \end{pmatrix}$$

uit $\mathbb{F}$ het m-tupel $[w_1, \ldots, w_m]$ uit V, gegeven door:

$$w_1, \ldots, w_m = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \beta_{1m} \\ \vdots \\ \beta_{nm} \end{pmatrix} \in (V, [a_1, \ldots, a_n]).$$

II.5.6 Zij nu V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[a_1, \ldots, a_n]$, W een $\mathbb{F}$-vectorruimte met basis $[b_1, \ldots, b_m]$ en $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding van V naar W. Volgens II.4.14 is ϕ volledig bepaald door het n-tupel $[w_1, \ldots, w_n] = [\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)]$ uit W. Als nu

$$w_1, \ldots, w_m = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in (W, [b_1, \ldots, b_m]),$$

dan is dus ϕ, gegeven de bases $[a_1,\dots, a_n]$ resp. $[b_1,\dots, b_m]$ van V, respectievelijk W, volledig bepaald door de $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Omgekeerd, als we een $(m \times n)$-matrix

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

uit $\mathbb{F}$ geven, dan induceert deze matrix het n-tupel $[w_1,\dots, w_n]$ uit W dat gegeven is door:

$$w_1,\dots,w_n = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \beta_{1n} \\ \vdots \\ \beta_{mn} \end{pmatrix} \in (W,[b_1,\dots, b_m])$$

en dit n-tupel bepaalt volgens II.4.14 precies één $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding $\phi : V \to W$ die voldoet aan $\phi(a_i) = w_i$ $(i = 1,\dots, n)$.

We zien dus dat de $(m \times n)$-matrices uit $\mathbb{F}$ één-éénduidig corresponderen met de $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen van de n-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte V naar de m-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte W, waarbij deze correspondentie wordt bepaald door de keuze van de bases van V en van W. Dit motiveert de volgende notatie-afspraak.

II.5.7 <u>Notatie</u>: Is V,W een tweetal $\mathbb{F}$-vectorruimten met bases $[a_1,\dots, a_n]$, resp. $[b_1,\dots, b_m]$ en is

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, dan noteren we:

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,\ldots, b_m])$$

voor de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding $\phi : V \to W$ die gegeven wordt door $\phi(a_i) = w_i$ $(i = 1,\ldots, n)$, waarbij

$$w_1,\ldots,w_n = \begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \vdots \\ \alpha_{m1}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \vdots \\ \alpha_{mn}\end{pmatrix} \in (W,[b_1,\ldots, b_m]).$$

II.5.8 Merk op dat in de situatie van II.5.7 het aantal kolommen van A de dimensie is van V, terwijl het aantal rijen van A gelijk is aan de dimensie van W.

II.5.9 Voorbeeld: Beschouw de afbeelding

$$\phi : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_3^*$$

die aan elke vector

$$\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$$

toevoegt het beeld

$$\phi\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} = (2a_1,\ a_1-a_2,\ a_1+2a_2) \in \mathbb{R}_3^*.$$

In II.4.3 hebben we gezien dat ϕ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding is. Kies in $\mathbb{R}_2$ de basis $[e_1,e_2]$ met

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad ; \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Kies vervolgens in $\mathbb{R}_3^*$ de basis $[f_1,f_2,f_3]$ met

$$f_1 = (1,0,0,) \quad ; \quad f_2 = (0,1,0) \quad ; \quad f_3 = (0,0,1).$$

Nu is ϕ bepaald door het 2-tupel $[w_1,w_2] = [\phi(e_1), \phi(e_2)]$ uit $\mathbb{R}_3^*$. Hierbij geldt:

$$w_1 = \phi(e_1) = \phi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (2\cdot 1,\ 1-0,\ 1+2\cdot 0) = (2,1,1) \in \mathbb{R}_3^*$$

en

$$w_2 = \phi(e_2) = \phi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (2\cdot 0,\ 0-1,\ 0+2\cdot 1) = (0,-1,2) \in \mathbb{R}_3^*$$

zodat we vinden:

$$w_1 = 2f_1 + 1f_2 + 1f_3 \quad ; \quad w_2 = -f_2 + 2f_3,$$

oftewel:

$$w_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*,[f_1,f_2,f_3]) \quad ; \quad w_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*,[f_1,f_2,f_3]).$$

We kunnen dus noteren:

$$\phi = (\mathbb{R}_2,[e_1,e_2]) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}_3^*,[f_1,f_2,f_3])$$

met

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

We hadden natuurlijk ook andere bases kunnen kiezen, bijvoorbeeld $[a_1,a_2]$ van $\mathbb{R}_2$ en $[b_1,b_2,b_3]$ van $\mathbb{R}_3^*$, gegeven door:

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad a_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_1 = (2,0,1) \quad ; \quad b_2 = (0,-1,1) \quad ; \quad b_3 = (1,1,0).$$

De afbeelding $\phi : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_3^*$ wordt nu bepaald door het 2-tupel $[w_1',w_2'] = [\phi(a_1), \phi(a_2)]$ uit $\mathbb{R}_3^*$. Nu is

$$w_1' = \phi(a_1) = \phi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (2\cdot 1,\ 1-1,\ 1+2\cdot 1) = (2,0,3) \in \mathbb{R}_3^*$$

en

$$w_2' = \phi(a_2) = \phi\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = (2(-1),\ -1-1,\ -1+2\cdot 1) = (-2,-2,1) \in \mathbb{R}_3^*.$$

Nu rekent men gemakkelijk na dat geldt:

$$w_1' = \phi(a_1) = -b_1 + 4b_2 + 4b_3$$

$$w_2' = \phi(a_2) = -b_1 + 2b_2,$$

zodat wegens

$$w_1' = \begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*,[b_1,b_2,b_3]) \;;\; w_2' = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*,[b_1,b_2,b_3])$$

ook geldt:

$$\phi = (\mathbb{R}_2,[a_1,a_2]) \overset{B}{\to} (\mathbb{R}_3^*,[b_1,b_2,b_3]),$$

waarbij

$$B = \begin{pmatrix}-1 & -1\\4 & 2\\4 & 0\end{pmatrix}.$$

II.5.10 <u>Voorbeeld</u>: Zij gegeven een $\mathbb{F}$-vectorruimte V met basis $[a_1,a_2,a_3]$, een $\mathbb{F}$-vectorruimte W met basis $[b_1,b_2,b_3,b_4]$, de vector

$$v = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} \in (V,[a_1,a_2,a_3]),$$

alsmede de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding

$$\phi = (V,[a_1,a_2,a_3]) \overset{A}{\to} (W,[b_1,b_2,b_3,b_4])$$

met

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 0\\0 & 1 & 4\\3 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

We vragen ons nu af wat het beeld $\phi(v)$ van de vector $v \in V$ is.

Uit het gegeven blijkt:

$$\phi(a_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in (W,[b_1,b_2,b_3,b_4]),$$

$$\phi(a_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in (W,[b_1,b_2,b_3,b_4]),$$

$$\phi(a_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in (W,[b_1,b_2,b_3,b_4]).$$

oftewel:

$$\phi(a_1) = b_1 + 2b_2 + 3b_4,$$

$$\phi(a_2) = 2b_1 + b_2 + b_3 + 4b_4,$$

$$\phi(a_3) = 3b_1 + 4b_3 + b_4.$$

Voorts blijkt uit het gegeven:

$$v = 3a_1 + 2a_2 - a_3.$$

Derhalve vinden we:

$$\phi(v) = \phi(3a_1 + 2a_2 - a_3) = 3\phi(a_1) + 2\phi(a_2) - \phi(a_3) =$$

$$= 3(b_1 + 2b_2 + 3b_4) + 2(2b_1 + b_2 + b_3 + 4b_4) +$$

$$- (3b_1 + 4b_3 + b_4) = 4b_1 + 8b_2 - 2b_3 + 16b_4,$$

oftewel:

$$\phi(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix} \in (W,[b_1,b_2,b_3,b_4]).$$

II.5.11 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten met bases</u> $[a_1,\ldots, a_n]$, <u>resp.</u> $[b_1,\ldots, b_m]$ <u>en zijn</u> $\phi : V \to W$ <u>en</u> $\psi : V \to W$ <u>twee $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen met</u>

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \overset{A}{\to} (W,[b_1,\ldots, b_m])$$

<u>en</u>

$$\psi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \overset{B}{\to} (W,[b_1,\ldots, b_m]),$$

<u>dan is de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding</u> $\phi + \psi : V \to W$ <u>gegeven door</u>

$$\phi + \psi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A+B} (W,[b_1,\ldots, b_m]).$$

<u>Bewijs</u>: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dan is voor elke $j \in \{1,\ldots, n\}$:

$$\phi(a_j) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} \in (W,[b_1,\ldots, b_m]) \ ; \ \psi(a_j) = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{pmatrix} \in (W,[b_1,\ldots, b_m]).$$

Nu is $(\phi + \psi)(a_j) = \phi(a_j) + \psi(a_j)$ $(j = 1,\ldots, n)$, en volgens II.5.4 geldt voor $j = 1,\ldots, n$:

$$(\phi + \psi)(a_j) = \phi(a_j) + \psi(a_j) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j}+\beta_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj}+\beta_{mj} \end{pmatrix} \in (W,[b_1,\ldots, b_m]).$$

Dus, als

$$\phi + \psi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \overset{C}{\to} (W,[b_1,\dots, b_m]),$$

dan is de j^{de} kolom van C de kolom

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j}+\beta_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj}+\beta_{mj} \end{pmatrix}$$

$(j = 1,\dots, n)$. Derhalve is $C = A + B$ en is de opmerking bewezen. □

Analoog bewijst men:

II.5.12 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> V <u>en</u> W <u>twee $\mathbb{F}$-vectorruimten met bases</u> $[a_1,\dots, a_n]$, <u>resp.</u> $[b_1,\dots, b_m]$ <u>en is</u> $\phi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding met</u>:

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \overset{A}{\to} (W,[b_1,\dots, b_m]),$$

<u>dan wordt voor iedere</u> $\lambda \in \mathbb{F}$ <u>de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding</u> $\lambda\cdot\phi : V \to W$ <u>gegeven door</u>:

$$\lambda\cdot\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \overset{\lambda A}{\to} (V,[b_1,\dots, b_m]).$$

<u>Bewijs</u>: Ga na! □

II.5.13 <u>Terminologie</u>: Zij

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\quad B \quad} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_m\end{matrix} & \boxed{\quad C \quad} & \begin{matrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_m\end{matrix} & \boxed{\quad D \quad} \end{pmatrix} \qquad (j \neq k)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ j^{\text{de}} \text{ kolom} & k^{\text{de}} \text{ kolom} \end{array}$$

een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$. Dan heet

$$\begin{pmatrix} \boxed{B} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{matrix} & \boxed{C} & \begin{matrix}\gamma_1+\lambda\beta_1\\ \vdots \\ \gamma_m+\lambda\beta_m\end{matrix} & \boxed{D}\end{pmatrix}$$

de matrix, uit A verkregen door de j^{de} kolom λ keer op te tellen bij de k^{de} kolom ($\lambda \in \mathbb{F}$); de matrix

$$\begin{pmatrix} \boxed{B} & \begin{matrix}\lambda\beta_1\\ \vdots\\ \lambda\beta_m\end{matrix} & \boxed{C} & \begin{matrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_m\end{matrix} & \boxed{D}\end{pmatrix}$$

heet verkregen uit A door de j^{de} kolom met λ te vermenigvuldigen;

$$\begin{pmatrix} \boxed{B} & \begin{matrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_m\end{matrix} & \boxed{C} & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_m\end{matrix} & \boxed{D}\end{pmatrix}$$

heet de matrix, verkregen uit A door de j^{de} kolom en de k^{de} kolom te verwisselen (dus: door K_σ op A toe te passen met $\sigma = \tau^{(n)}_{j,k}$, cf. I.2.24 en I.3.47).

De $(m \times (n-1))$-matrix

$$\begin{pmatrix} \boxed{B}\boxed{C} & \begin{matrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_m\end{matrix} & \boxed{D}\end{pmatrix}$$

heet tenslotte uit A verkregen door het weglaten van de j^{de} kolom.

Analoog voor rijen.

II.5.14 <u>Voorbeeld</u>: Zij

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

een (3×2)-matrix uit $\mathbb{F}$. Dan is

$$A' = \begin{pmatrix} a & b+\lambda a \\ c & d+\lambda c \\ e & f+\lambda e \end{pmatrix}$$

uit A verkregen door de eerste kolom λ ($\in \mathbb{F}$) keer op te tellen bij de tweede kolom. Voorts is

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

en

$$(A^T)' = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b+\lambda a & d+\lambda c & f+\lambda e \end{pmatrix}$$

de matrix, uit A^T verkregen door de eerste rij λ keer op te tellen bij de tweede rij. Merk op dat geldt:

$$(A^T)' = (A')^T.$$

II.5.15 <u>Afspraak</u>: Voor de rest van deze paragraaf spreken we af dat steeds V en W twee $\mathbb{F}$-vectorruimten zijn van dimensie n, resp. m, en dat $[a_1,\dots, a_n]$ (resp. $[b_1,\dots, b_m]$) steeds een basis is van V (resp. W).

II.5.16 <u>Opmerking</u>: <u>Zij</u> A <u>een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ en</u> $\phi : V \to W$ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, zodat geldt</u>:

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,\dots, b_m]).$$

<u>Zij</u> A' (<u>resp</u>. $[a_1',\dots, a_n']$) <u>de matrix (resp. het n-tupel) die uit</u> A (<u>resp</u>. $[a_1,\dots, a_n]$) <u>ontstaat door de</u> k^{de} <u>kolom (resp.</u> k^{de} <u>vector</u>) λ <u>keer op te tellen bij de</u> l^{de} <u>kolom (resp. de</u> l^{de} <u>vector</u>) $(k \neq l)$;

Zij A'' (resp. $[a_1'',\dots, a_n'']$) de matrix (resp. het n-tupel) die uit A (resp. $[a_1,\dots, a_n]$) ontstaat door de k^{de} kolom (resp. k^{de} vector) met λ te vermenigvuldigen ($\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$);
Zij A''' (resp. $[a_1''',\dots, a_n''']$) de matrix (resp. het n-tupel) die uit A (resp. $[a_1,\dots, a_n]$) ontstaat door de k^{de} kolom (resp. k^{de} vector) en de l^{de} kolom (resp. l^{de} vector) van plaats te verwisselen ($k \neq l$).

Dan zijn $[a_1',\dots, a_n']$, $[a_1'',\dots, a_n'']$ en $[a_1''',\dots, a_n''']$ bases van V, terwijl geldt:

(i) $\phi = (V,[a_1',\dots, a_n']) \xrightarrow{A'} (W,[b_1,\dots, b_m])$;

(ii) $\phi = (V,[a_1'',\dots, a_n'']) \xrightarrow{A''} (W,[b_1,\dots, b_m])$;

(iii) $\phi = (V,[a_1''',\dots, a_n''']) \xrightarrow{A'''} (W,[b_1,\dots, b_m])$.

Bewijs: Volgens II.3.23, resp. II.3.25, resp. II.3.20 is de rang van de n-tupels $[a_1',\dots, a_n']$, resp. $[a_1'',\dots, a_n'']$, resp. $[a_1''',\dots, a_n''']$ gelijk aan de rang van de basis $[a_1,\dots, a_n]$ van V, en dus gelijk aan de dimensie n van V. Dus spannen de eerstgenoemde drie n-tupels volgens II.3.16 een n-dimensionale deelruimte van V op, waarvan zij alle drie een basis zijn. Volgens II.3.11 is deze lineaire deelruimte gelijk aan V, zodat de drie n-tupels bases zijn van V.

Zij nu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

We bewijzen dan (i), (ii) en (iii) achtereenvolgens.
ad (i): Als

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11}' & \cdots & \alpha_{1n}' \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}' & \cdots & \alpha_{mn}' \end{pmatrix},$$

dan is

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} \quad \text{als} \quad j \neq l \qquad ; \qquad \alpha'_{il} = \alpha_{il} + \lambda\alpha_{ik} \quad (i = 1,\ldots, m)$$

We moeten bewijzen dat voor iedere $j \in \{1,\ldots, n\}$ geldt:

$$\phi(a'_j) = \alpha'_{1j}b_1 + \ldots + \alpha'_{mj}b_m.$$

Welnu, als $j \neq l$, dan geldt:

$$\phi(a'_j) = \phi(a_j) = \alpha_{1j}b_1 + \ldots + \alpha_{mj}b_m = \alpha'_{1j}b_1 + \ldots + \alpha'_{mj}b_m,$$

terwijl voor $j = l$ geldt:

$$\begin{aligned}\phi(a'_j) &= \phi(a'_l) = \phi(a_l + \lambda a_k) = \phi(a_l) + \lambda\phi(a_k) = \\ &= (\alpha_{1l}b_1 + \ldots + \alpha_{ml}b_m) + \lambda(\alpha_{1k}b_1 + \ldots + \alpha_{mk}b_m) = \\ &= (\alpha_{1l} + \lambda\alpha_{1k})b_1 + \ldots + (\alpha_{ml} + \lambda\alpha_{mk})b_m = \\ &= \alpha'_{1l}b_1 + \ldots + \alpha'_{ml}b_m = \alpha'_{1j}b_1 + \ldots + \alpha'_{mj}b_m,\end{aligned}$$

zodat (i) bewezen is.

ad (ii): Als

$$A'' = \begin{pmatrix} \alpha''_{11} & \cdots & \alpha''_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha''_{m1} & \cdots & \alpha''_{mn} \end{pmatrix},$$

dan is

$$\alpha''_{ij} = \alpha_{ij} \quad \text{als} \quad j \neq k \qquad ; \qquad \alpha''_{ik} = \lambda\alpha_{ik} \quad (i = 1,\ldots, m).$$

We moeten bewijzen dat voor iedere $j \in \{1,\ldots, n\}$ geldt:

$$\phi(a''_j) = \alpha''_{1j}b_1 + \ldots + \alpha''_{mj}b_m.$$

Welnu, als $j \neq k$, dan hebben we:

$$\phi(a_j'') = \phi(a_j) = \alpha_{1j}b_1 + \ldots + \alpha_{mj}b_m = \alpha_{1j}''b_1 + \ldots + \alpha_{mj}''b_m.$$

Als $j = k$, dan vinden we:

$$\phi(a_j'') = \phi(a_k'') = \phi(\lambda a_k) = \lambda\phi(a_k) = \lambda(\alpha_{1k}b_1 + \ldots + \alpha_{mk}b_m) =$$

$$= (\lambda\alpha_{1k})b_1 + \ldots + (\lambda\alpha_{mk})b_m = \alpha_{1k}''b_1 + \ldots + \alpha_{mk}''b_m =$$

$$= \alpha_{1j}''b_1 + \ldots + \alpha_{mj}''b_m,$$

zodat (ii) geldt.

ad (iii): Als

$$A''' = \begin{pmatrix} \alpha_{11}''' & \ldots & \alpha_{1n}''' \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}''' & \ldots & \alpha_{mn}''' \end{pmatrix},$$

dan is:

$$\alpha_{ij}''' = \alpha_{ij} \text{ als } j \neq k \text{ en } j \neq l \ ; \ \alpha_{ik}''' = \alpha_{il} \ ; \ \alpha_{il}''' = \alpha_{ik} \quad (i = 1,\ldots, m).$$

We moeten bewijzen dat voor iedere $j \in \{1,\ldots, n\}$ geldt:

$$\phi(a_j''') = \alpha_{1j}'''b_1 + \ldots + \alpha_{mj}'''b_m.$$

Welnu, als $j \neq k$ en $j \neq l$, vinden we:

$$\phi(a_j''') = \phi(a_j) = \alpha_{1j}b_1 + \ldots + \alpha_{mj}b_m = \alpha_{1j}'''b_1 + \ldots + \alpha_{mj}'''b_m.$$

Als $j = k$, dan geldt:

$$\phi(a_j''') = \phi(a_k''') = \phi(a_l) = \alpha_{1l}b_1 + \ldots + \alpha_{ml}b_m =$$

$$= \alpha_{1k}'''b_1 + \ldots + \alpha_{mk}'''b_m = \alpha_{1j}'''b_1 + \ldots + \alpha_{mj}'''b_m,$$

terwijl, als $j = l$:

$$\phi(a_j''') = \phi(a_l''') = \phi(a_k) = \alpha_{1k}b_1 + \ldots + \alpha_{mk}b_m =$$

$$= \alpha_{1l}'''b_1 + \ldots + \alpha_{ml}'''b_m = \alpha_{1j}'''b_1 + \ldots + \alpha_{mj}'''b_m,$$

waarmee ook (iii) bewezen is. □

II.5.17 Opmerking: Zij ϕ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding van V naar W en A een (m × n)-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,\ldots, b_m]).$$

Zij A' de matrix die uit A ontstaat door de k^{de} rij λ keer op te tellen bij de l^{de} rij ($k \neq l$, $\lambda \in \mathbb{F}$). Zij $[b_1',\ldots, b_m']$ het m-tupel uit W dat uit $[b_1,\ldots, b_m]$ ontstaat door de l^{de} vector $-\lambda$ keer op te tellen bij de k^{de} vector. Dan is $[b_1',\ldots, b_m']$ een basis van W en:

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A'} (W,[b_1',\ldots, b_m']).$$

Bewijs: Volgens II.3.23 hebben $[b_1',\ldots, b_m']$ en $[b_1,\ldots, b_m]$ dezelfde rang. Omdat $[b_1,\ldots, b_m]$ een basis is van W is deze rang m. Volgens II.3.16 en II.3.11 is $[b_1',\ldots, b_m']$ dan een basis van W (ga na!). Als

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

dan is

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11}' & \cdots & \alpha_{1n}' \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}' & \cdots & \alpha_{mn}' \end{pmatrix},$$

waarbij

$$\alpha_{ij}' = \alpha_{ij} \text{ als } i \neq l \ ; \ \alpha_{lj}' = \alpha_{lj} + \lambda\alpha_{kj} \quad (j = 1,\ldots,n) \qquad (*)$$

Ook is gegeven:

$$b_i' = b_i \text{ als } i \neq k \qquad ; \qquad b_k' = b_k - \lambda b_l \qquad (**)$$

en we moeten laten zien dat geldt:

$$\phi(a_j) = \alpha_{1j}' b_1' + \ldots + \alpha_{mj}' b_m' \qquad (j = 1,\ldots, n).$$

Welnu, voor elke $j \in \{1,\ldots, n\}$ hebben we, rekening houdend met (*) en (**):

$$\begin{aligned}
\phi(a_j) &= \alpha_{1j} b_1 + \ldots + \alpha_{mj} b_m = \sum_i \alpha_{ij} b_i = \\
&= \alpha_{kj} b_k + \alpha_{lj} b_l + \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \alpha_{ij} b_i = \\
&= \alpha_{kj}(b_k' + \lambda b_l) + (\alpha_{lj}' - \lambda\alpha_{kj}) b_l + \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \alpha_{ij} b_i = \\
&= \alpha_{kj} b_k' + \alpha_{lj}' b_l + \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \alpha_{ij} b_i = \\
&= \alpha_{kj}' b_k' + \alpha_{lj}' b_l' + \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \alpha_{ij}' b_i' = \sum_i \alpha_{ij}' b_i' = \\
&= \alpha_{1j}' b_1' + \ldots + \alpha_{mj}' b_m',
\end{aligned}$$

zodat de opmerking bewezen is. □

II.5.18 Opmerking: Zij $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding en A een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, zodat

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,\ldots, b_m]).$$

Zij A' de matrix die we uit A verkrijgen door de k^{de} rij met λ te vermenigvuldigen ($\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$). Zij $[b_1',\ldots, b_m']$ het m-tupel uit W dat uit $[b_1,\ldots, b_m]$ ontstaat door de k^{de} vector met $\frac{1}{\lambda}$ te vermenigvuldigen. Dan geldt: $[b_1',\ldots, b_m']$ is een basis van W en:

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A'} (W,[b_1',\ldots, b_m']).$$

Bewijs: Volgens II.3.25 hebben $[b_1,\ldots, b_m]$ en $[b_1',\ldots, b_m']$ dezelfde rang. $[b_1,\ldots, b_m]$ is een basis van W, dus is deze rang m. Uit II.3.16 en II.3.11 volgt dan dat $[b_1',\ldots,b_m']$ een basis is van W. Als

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

dan is

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \cdots & \alpha'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{m1} & \cdots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix},$$

waarbij

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} \text{ als } i \neq k \qquad \text{en} \qquad \alpha'_{kj} = \lambda\alpha_{kj} \qquad (j = 1,\dots, n).$$

Ook is gegeven dat geldt:

$$b'_i = b_i \text{ als } i \neq k \qquad ; \qquad b'_k = \frac{1}{\lambda} b_k .$$

We moeten bewijzen dat voor iedere $j \in \{1,\dots, n\}$ geldt:

$$\phi(a_j) = \alpha'_{1j}b'_1 + \dots + \alpha'_{mj}b'_m.$$

Welnu, kies $j \in \{1,\dots, n\}$. Dan volgt

$$\begin{aligned}\phi(a_j) &= \alpha_{1j}b_1 + \dots + \alpha_{mj}b_m = \sum_i \alpha_{ij}b_i = \alpha_{kj}b_k + \sum_{i\neq k} \alpha_{ij}b_i = \\ &= (\tfrac{1}{\lambda}\alpha'_{kj})(\lambda b'_k) + \sum_{i\neq k}\alpha_{ij}b_i = \alpha'_{kj}b'_k + \sum_{i\neq k}\alpha'_{ij}b'_i = \\ &= \sum_i \alpha'_{ij}b'_i = \alpha'_{1j}b'_1 + \dots + \alpha'_{mj}b'_m,\end{aligned}$$

zodat de opmerking geldt. □

II.5.19 Opmerking: Zij $\phi : V \to W$ een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding en A een $(m \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$ zodat

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \overset{A}{\to} (W,[b_1,\dots, b_m]).$$

Zij A' (resp. $[b'_1,\dots, b'_m]$) de matrix (resp. het m-tupel) die we uit A (resp. $[b_1,\dots, b_m]$) verkrijgen door de k^{de}

<u>rij (resp. k^{de} vector) en de l^{de} rij (resp. l^{de} vector) van plaats te verwisselen. Dan is</u> $[b'_1,\dots, b'_m]$ <u>een basis van</u> W <u>en er geldt</u>:

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A'} (W,[b'_1,\dots, b'_m]).$$

<u>Bewijs</u>: Volgens II.3.20 hebben $[b'_1,\dots, b'_m]$ en $[b_1,\dots, b_m]$ dezelfde rang. Omdat $[b_1,\dots, b_m]$ een basis is van W, is deze rang m. Volgens II.3.16 en II.3.11 is dan $[b'_1,\dots, b'_m]$ een basis van W. Als

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

dan is

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \dots & \alpha'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{m1} & \dots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix},$$

waarbij

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} \text{ als } i \neq k,l \quad ; \quad \alpha'_{kj} = \alpha_{lj} \quad ; \quad \alpha'_{lj} = \alpha_{kj} \quad (j = 1,\dots, n)$$

en we moeten, wetende dat

$$b'_i = b_i \text{ als } i \neq k,l \quad ; \quad b'_k = b_l \quad ; \quad b'_l = b_k,$$

bewijzen dat voor iedere $j \in \{1,\dots, n\}$ geldt:

$$\phi(a_j) = \alpha'_{1j}b'_1 + \dots + \alpha'_{mj}b'_m.$$

Welnu,

$$\phi(a_j) = \alpha_{1j}b_1 + \dots + \alpha_{mj}b_m = \sum_i \alpha_{ij}b_i =$$

$$= \alpha_{kj}b_k + \alpha_{lj}b_l + \sum_{\substack{i\neq k \\ i\neq l}} \alpha_{ij}b_i =$$

$$= \alpha'_{lj}.b'_l + \alpha'_{kj}.b'_k + \sum_{\substack{i\neq k\\ i\neq l}} \alpha'_{ij}.b'_i = \sum_i \alpha'_{ij}.b'_i =$$
$$= \alpha'_{1j}.b'_1 + \ldots + \alpha'_{mj}.b'_m,$$

zodat de opmerking bewezen is. □

II.5.20 <u>Voorbeeld</u>: Beschouw de bases $[e_1,e_2,e_3]$, resp. $[f_1,f_2]$ van de $\mathbb{R}$-vectorruimten $\mathbb{R}_3$, resp. $\mathbb{R}_2^*$, gegeven door:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; \; e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} ; \; e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} ; \; f_1 = (1,0) \; ; \; f_2 = (0,1).$$

Zij

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

en $\phi : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2^*$ de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding, gegeven door

$$\phi = (\mathbb{R}_3,[e_1,e_2,e_3]) \overset{A}{\to} (\mathbb{R}_2^*,[f_1,f_2]). \qquad (*)$$

Tel in A de eerste rij 2 keer op bij de tweede rij. We krijgen de matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

en we vinden:

$$\phi = (\mathbb{R}_3,[e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A_1} (\mathbb{R}_2^*,[f_1-2f_2,f_2]).$$

Verwissel nu in A_1 de tweede kolom en de derde kolom. We krijgen de matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

en er geldt:

$$\phi = (\mathbb{R}_3,[e_1,e_3,e_2]) \xrightarrow{A_2} (\mathbb{R}_2^*,[f_1-2f_2,f_2]).$$

Tel in A_2 de eerste kolom bij de derde kolom op:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

dan geldt:

$$\phi = (\mathbb{R}_3,[e_1,e_3,e_2+e_1]) \xrightarrow{A_3} (\mathbb{R}_2^*,[f_1-2f_2,f_2]).$$

Vermenigvuldig tenslotte de tweede rij van A_3 met 2:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Dan geldt:

$$\phi = (\mathbb{R}_3,[e_1,e_3,e_2+e_1]) \xrightarrow{A_4} (\mathbb{R}_2^*,[f_1-2f_2,\tfrac{1}{2}f_2]). \qquad (**)$$

Ter controle berekenen we het beeld van de vector

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3$$

onder ϕ volgens (*) en volgens (**):
Er geldt: $a = e_1 + e_2 + e_3$, zodat volgens (*) geldt:

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = \\ &= (f_1 + 2f_2) + (f_2) + (3f_1 - 2f_2) = 4f_1 + f_2 = \\ &= 4(1,0) + (0,1) = (4,1).\end{aligned}$$

Ook geldt: $a = e_3 + (e_2 + e_1)$, zodat we volgens (**) vinden:

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \phi(e_3) + \phi(e_2 + e_1) = (3(f_1 - 2f_2) + 8(\tfrac{1}{2}f_2)) + \\ &\quad + ((f_1 - 2f_2) + 10(\tfrac{1}{2}f_2)) = 4f_1 + f_2 = \\ &= 4(1,0) + (0,1) = (4,1).\end{aligned}$$

II.5.21 <u>Definitie</u>: Zij B een $(m \times t)$-matrix uit $\mathbb{F}$ en A een $(t \times n)$-matrix uit $\mathbb{F}$, zeg:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mt} \end{pmatrix} ; \; A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{t1} & \cdots & \alpha_{tn} \end{pmatrix}.$$

Definieer de $(m \times n)$-matrix C uit $\mathbb{F}$ met:

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix},$$

waarbij voor elke $i \in \{1,\dots, m\}$ en elke $j \in \{1,\dots, n\}$ γ_{ij} gegeven is door:

$$\gamma_{ij} = \beta_{i1}\alpha_{1j} + \beta_{i2}\alpha_{2j} + \dots + \beta_{it}\alpha_{tj} = \sum_{k=1}^{t} \beta_{ik}\alpha_{kj}.$$

(Vergelijk het schema:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots\cdots\cdots & \beta_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} \;\cdots & \beta_{it} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots\cdots\cdots & \beta_{mt} \end{pmatrix} \leftarrow i^{de} \text{ rij} \; ; \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \alpha_{2j} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{t1} & \cdots & \alpha_{tj} & \cdots & \alpha_{tn} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j^{de} \text{ kolom} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots \; \boxed{\gamma_{ij}} \; \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow i^{de} \text{ rij} \\ \uparrow \\ j^{de} \text{ kolom} \end{array} \qquad).$$

De $(m \times n)$-matrix C heet het produkt van B en A en wordt genoteerd met:

$$C = B \cdot A \ .$$

II.5.22 Voorbeeld: Als

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 7 & 2 \\ 8 & 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan vinden we:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 7 & 2 \\ 8 & 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 15 & 4 & 38 & 11 \\ 40 & 13 & 8 & 53 & 14 \\ 43 & 11 & 17 & 33 & 7 \\ 12 & 4 & 0 & 25 & 7 \end{pmatrix}$$

II.5.23 Merk op dat het produkt $B \cdot A$ van twee matrices B en A uit $\mathbb{F}$ alleen dan in II.5.21 gedefinieerd is, als het aantal kolommen van B gelijk is aan het aantal rijen van A. Een gevolg hiervan is dat niet voor elk tweetal matrices B, A uit $\mathbb{F}$ het produkt $B \cdot A$ of het produkt $A \cdot B$ gedefinieerd behoeft te zijn. Ook als $B \cdot A$ wel gedefinieerd is, dan behoeft $A \cdot B$ niet gedefinieerd te zijn. Bijvoorbeeld, als

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} ,$$

dan zijn $A \cdot B$ en $B \cdot A$ beide gedefinieerd; is $A \cdot C$ wel, maar $C \cdot A$ niet gedefinieerd, en zijn noch $C \cdot B$, noch $B \cdot C$ gedefinieerd.

Vervolgens blijkt uit de definitie II.5.21 dat, als A, B twee matrices zijn uit $\mathbb{F}$ zodat hun produkt $B \cdot A$ gedefinieerd is, het aantal kolommen van $B \cdot A$ gelijk is aan het aantal kolommen van A en het aantal rijen van $B \cdot A$ gelijk is aan het aantal rijen van B. Is B een (2×3)-matrix en A een (3×2)-matrix, dan is $B \cdot A$ een (2×2)-matrix en $A \cdot B$ een (3×3)-matrix. Hier ziet men bovendien dat in dit geval $A \cdot B \neq B \cdot A$ is. Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 11 & 18 & 19 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} .$$

II.5.24 Opmerking: Zijn A en B twee matrices uit $\mathbb{F}$ zodat $B \cdot A$ gedefinieerd is, dan is ook het produkt $A^T \cdot B^T$ gedefinieerd en er geldt:

$$A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T.$$

Bewijs: Zij

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mt} \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{t1} & \cdots & \alpha_{tn} \end{pmatrix} ,$$

dan is:

$$A^T = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \cdots & \alpha'_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \cdots & \alpha'_{nt} \end{pmatrix} \quad ; \quad B^T = \begin{pmatrix} \beta'_{11} & \cdots & \beta'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta'_{t1} & \cdots & \beta'_{tm} \end{pmatrix} ,$$

waarbij voor elke $i \in \{1,\ldots, n\}$, $k \in \{1,\ldots, t\}$ en $j \in \{1,\ldots, m\}$ geldt:

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ki} \quad ; \quad \beta'_{kj} = \beta_{jk}.$$

Omdat A^T t kolommen heeft en B^T t rijen, is het produkt $A^T \cdot B^T$ gedefinieerd. Als we noteren:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad A^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \cdots & \delta_{nm} \end{pmatrix}$$

(let op de aantallen kolommen en rijen!), dan geldt:

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \beta_{ik}\alpha_{kj} \qquad (i \in \{1,\ldots, m\},\ j \in \{1,\ldots, n\})$$

en

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \alpha'_{ik}\beta'_{kj} \qquad (i \in \{1,\ldots, n\},\ j \in \{1,\ldots, m\}).$$

Bijgevolg vinden we voor iedere $i \in \{1,\ldots, n\}$ en elke $j \in \{1,\ldots, m\}$:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \alpha'_{ik}\beta'_{kj} = \sum_{k=1}^{t} \alpha_{ki}\beta_{jk} = \sum_{k=1}^{t} \beta_{jk}\alpha_{ki} = \gamma_{ji},$$

zodat inderdaad geldt:

$$A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T. \ \square$$

II.5.25 Opmerking: Zijn V, W en U drie $\mathbb{F}$-vectorruimten met respectievelijke bases $[a_1,\ldots, a_n]$, $[b_1,\ldots, b_m]$ en $[c_1,\ldots, c_p]$, en zijn A en B twee matrices uit $\mathbb{F}$, terwijl $\phi : V \to W$ en $\psi : W \to U$ twee $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen zijn, zodat geldt:

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,\ldots, b_m])$$

$$\psi = (W,[b_1,\ldots, b_m]) \xrightarrow{B} (U,[c_1,\ldots, c_p]),$$

dan is

$$\psi \circ \phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \xrightarrow{B\cdot A} (U,[c_1,\ldots, c_p]).$$

Bewijs: A is een $(m \times n)$-matrix en B is een $(p \times m)$-matrix (cf. II.5.8), zodat het aantal kolommen van B gelijk is aan het aantal rijen van A. Dus is de produkt-matrix $B \cdot A$ gedefinieerd (en heeft p rijen en n kolommen). Zij nu:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & \cdots & \beta_{pm} \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \cdots & \gamma_{pn} \end{pmatrix}$$

met

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{ik}\alpha_{kj} \qquad (i \in \{1,\dots, p\},\ j \in \{1,\dots, n\}).$$

We moeten bewijzen dat voor iedere $j \in \{1,\dots, n\}$ geldt:

$$(\psi \circ \phi)(a_j) = \gamma_{1j}c_1 + \gamma_{2j}c_2 + \dots + \gamma_{pj}c_p. \tag{*}$$

Welnu,

$$\phi(a_j) = \alpha_{1j}b_1 + \alpha_{2j}b_2 + \dots + \alpha_{mj}b_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj}b_k.$$

Dus:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \phi)(a_j) &= \psi(\phi(a_j)) = \psi(\alpha_{1j}b_1 + \alpha_{2j}b_2 + \dots + \alpha_{mj}b_m) = \\ &= \alpha_{1j}\psi(b_1) + \alpha_{2j}\psi(b_2) + \dots + \alpha_{mj}\psi(b_m) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj}\psi(b_k).\end{aligned}$$

Nu is voor iedere $k \in \{1,\dots, m\}$

$$\psi(b_k) = \beta_{1k}c_1 + \beta_{2k}c_2 + \dots + \beta_{pk}c_p.$$

Derhalve:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \phi)(a_j) &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj}(\beta_{1k}c_1 + \beta_{2k}c_2 + \dots + \beta_{pk}c_p) = \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj}\beta_{1k}\Big)c_1 + \Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj}\beta_{2k}\Big)c_2 + \dots + \Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj}\beta_{pk}\Big)c_p = \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{m} \beta_{1k}\alpha_{kj}\Big)c_1 + \Big(\sum_{k=1}^{m} \beta_{2k}\alpha_{kj}\Big)c_2 + \dots + \Big(\sum_{k=1}^{m} \beta_{pk}\alpha_{kj}\Big)c_p =\end{aligned}$$

$$= \gamma_{1j}c_1 + \gamma_{2j}c_2 + \ldots + \gamma_{pj}c_p$$

zodat (*) en daarmee de opmerking bewezen is. □

II.5.26 Opmerking: Zijn A, B en C drie matrices uit $\mathbb{F}$ zodat $A \cdot B$ en $B \cdot C$ gedefinieerd zijn, dan zijn $A \cdot (B \cdot C)$ en $(A \cdot B) \cdot C$ gedefinieerd en er geldt:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C\ .$$

Bewijs: Het aantal kolommen van A is het aantal rijen van B en het aantal kolommen van B is het aantal rijen van C. Zij A een $(m \times n)$-matrix, B een $(n \times p)$-matrix en C een $(p \times q)$-matrix.

Kies nu $\mathbb{F}$-vectorruimten U_1, U_2, U_3, U_4 van dimensie m, resp. n, resp. p, resp. q en respectievelijke bases $[c_1, \ldots, c_m]$, $[d_1, \ldots, d_n]$, $[e_1, \ldots, e_p]$ en $[f_1, \ldots, f_q]$. Dan kunnen we $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen $\phi : U_4 \to U_3$, $\psi : U_3 \to U_2$ en $\xi : U_2 \to U_1$ definiëren met:

$$\begin{array}{ccc} U_4 & & (U_4, [f_1, \ldots, f_q]) \\ \downarrow\phi & & \downarrow C \\ U_3 & & (U_3, [e_1, \ldots, e_p]) \\ \downarrow\psi & = & \downarrow B \\ U_2 & & (U_2, [d_1, \ldots, d_n]) \\ \downarrow\xi & & \downarrow A \\ U_1 & & (U_1, [c_1, \ldots, c_m]) \end{array}$$

Dan volgt, door herhaald toepassen van II.5.25:

$$(\xi \circ \psi) \circ \phi = (U_4, [f_1, \ldots, f_q]) \xrightarrow[(A \cdot B) \cdot C]{} (U_1, [c_1, \ldots, c_m])$$

en analoog

$$\xi \circ (\psi \circ \phi) = (U_4, [f_1, \ldots, f_q]) \xrightarrow[A \cdot (B \cdot C)]{} (U_1, [c_1, \ldots, c_m]).$$

Volgens I.1.25 is $\xi \circ (\psi \circ \phi) = (\xi \circ \psi) \circ \phi$ zodat $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (vgl. II.5.6). □

II.5.27 Opmerking: Is A een $(m \times t)$-matrix uit $\mathbb{F}$ en zijn B en C twee $(t \times n)$-

<u>matrices uit $\mathbb{F}$, dan is</u>

$$A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C.$$

<u>Bewijs</u>: Kies drie $\mathbb{F}$-vectorruimten U_1, U_2 en U_3 van dimensies n, t resp. m met respectievelijke bases $[c_1,\dots, c_n]$, $[d_1,\dots, d_t]$ en $[e_1,\dots, e_m]$, alsmede de drie $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen $\alpha : U_2 \to U_3$, $\beta : U_1 \to U_2$ en $\gamma : U_1 \to U_2$, gegeven door:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & & (U_1,[c_1,\dots, c_n]) \\ \beta\downarrow\downarrow\gamma & & B\downarrow\downarrow C \\ U_2 & = & (U_2,[d_1,\dots, d_t]) \\ \downarrow\alpha & & \downarrow A \\ U_3 & & (U_3,[e_1,\dots, e_m]). \end{array}$$

Dan is, volgens II.5.11:

$$\beta + \gamma = (U_1,[c_1,\dots, c_n]) \xrightarrow{B + C} (U_2,[d_1,\dots, d_t]) \qquad (*)$$

en, volgens II.5.25 en II.5.11:

$$\alpha\circ\beta + \alpha\circ\gamma = (U_1,[c_1,\dots, c_n]) \xrightarrow[A\cdot B+A\cdot C]{} (U_3,[e_1,\dots, e_m]). \qquad (**)$$

Voorts volgt uit (*) en II.5.25:

$$\alpha\circ(\beta+\gamma) = (U_1,[c_1,\dots, c_n]) \xrightarrow[A\cdot(B+C)]{} (U_3,[e_1,\dots, e_m]). \qquad (***)$$

Uit (**) en (***) volgt, lettend op II.5.6, dat het voldoende is -opdat $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$- om te bewijzen dat de $\mathbb{F}$-lineaire afbeeldingen $\alpha \circ (\beta + \gamma) : U_1 \to U_3$ en $\alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma : U_1 \to U_3$ gelijk zijn. We moeten dus laten zien dat voor iedere vector $u \in U_1$ geldt: $(\alpha \circ (\beta + \gamma))(u) =$ $= (\alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma)(u)$. Welnu,

$$\begin{aligned}(\alpha\circ(\beta+\gamma))(u) &= \alpha((\beta+\gamma)(u)) = \alpha(\beta(u) + \gamma(u)) = \\ &= \alpha(\beta(u)) + \alpha(\gamma(u)) = (\alpha\circ\beta)(u) + (\alpha\circ\gamma)(u) = \\ &= (\alpha\circ\beta + \alpha\circ\gamma)(u),\end{aligned}$$

zodat de opmerking geldt. □

II.5.28 <u>Opmerking</u>: <u>Zijn</u> A <u>en</u> B <u>twee $(m \times t)$-matrices uit</u> $\mathbb{F}$ <u>en is</u> C <u>een $(t \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$, <u>dan geldt</u>:

$$(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C.$$

<u>Bewijs</u>: Bewijs dit zelf analoog aan het bewijs van de voorgaande opmerking. □

II.5.29 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> A <u>een $(m \times t)$-matrix en</u> B <u>een $(t \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>en is</u> $\lambda \in \mathbb{F}$, <u>dan geldt</u>:

$$(\lambda A)\cdot B = \lambda(A\cdot B) = A\cdot(\lambda B).$$

<u>Bewijs</u>: Ga na! □

II.5.30 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> A <u>een $(m \times n)$-matrix uit</u> $\mathbb{F}$, <u>dan geldt</u>:

$$A\cdot I_n = A = I_m\cdot A.$$

<u>Bewijs</u>: Zij $\phi : V \to W$ de $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding, gegeven door (cf. II.5.15)

$$\phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A} (W,[b_1,\dots, b_m]). \qquad (*)$$

De lezer ga met behulp van II.5.4 na dat

$$id_V = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{I_n} (V,[a_1,\dots, a_n])$$

en dat

$$id_W = (W,[b_1,\dots, b_m]) \xrightarrow{I_m} (W,[b_1,\dots, b_m]).$$

Volgens II.5.25 is dan (cf. I.1.32):

$$\phi = \phi \circ id_V = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{A\cdot I_n} (W,[b_1,\dots, b_m]) \qquad (**)$$

$$\phi = id_W \circ \phi = (V,[a_1,\dots, a_n]) \xrightarrow{I_m\cdot A} (W,[b_1,\dots, b_m]). \qquad (***)$$

Uit (*), (**) en (***) volgt dan, gelet op II.5.6, dat $A = A\cdot I_n = I_m\cdot A$, zodat de opmerking bewezen is. □

II.5.31 Als A een (m × n)-matrix is uit $\mathbb{F}$, en B is een (n × 1)-matrix uit $\mathbb{F}$, zeg:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

dan is

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$$

een (m × 1)-matrix uit $\mathbb{F}$ met

$$\gamma_i = \alpha_{i1}\beta_1 + \ldots + \alpha_{in}\beta_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j \qquad (i = 1,\ldots, m)$$

(ga na!). Er geldt (cf. II.5.15 voor de notatie):

II.5.32 <u>Opmerking</u>: <u>Is</u> ϕ <u>een $\mathbb{F}$-lineaire afbeelding van</u> V <u>naar</u> W <u>en is</u>

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>een (m × n)-matrix uit</u> $\mathbb{F}$ <u>zodat</u>

$$\phi = (V,[a_1,\ldots, a_n]) \overset{A}{\to} (W,[b_1,\ldots, b_m])$$

<u>dan geldt voor iedere vector</u> $v \in V$, <u>gegeven door</u>

$$v = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in (V,[a_1,\ldots, a_n])$$

<u>dat voor het beeld</u> $\phi(v) \in W$ <u>van</u> v <u>onder</u> ϕ <u>geldt</u>:

$$\phi(v) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in (W,[b_1,\dots, b_m]).$$

<u>Bewijs</u>: Als we noteren:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix},$$

dan is volgens II.5.31:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mu_j \qquad (i = 1,\dots, m).$$

We moeten bewijzen dat $\phi(v) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$. Welnu,

$$\phi(v) = \phi(\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n) = \mu_1\phi(a_1) + \dots + \mu_n\phi(a_n) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \mu_j\phi(a_j).$$

Voor elke $j \in \{1,\dots, n\}$ geldt:

$$\phi(a_j) = \alpha_{1j}b_1 + \dots + \alpha_{mj}b_m,$$

zodat we vinden:

$$\begin{aligned} \phi(v) &= \sum_{j=1}^{n} \mu_j(\alpha_{1j}b_1 + \dots + \alpha_{mj}b_m) = \\ &= (\sum_{j=1}^{n} \mu_j\alpha_{1j})b_1 + \dots + (\sum_{j=1}^{n} \mu_j\alpha_{mj})b_m = \\ &= (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\mu_j)b_1 + \dots + (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj}\mu_j)b_m = \\ &= \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m, \end{aligned}$$

zodat de opmerking geldt. □

II.5.33 Voorbeeld: Laten $[e_1,e_2,e_3]$ en $[f_1,f_2]$ de bases van $\mathbb{R}_3^*$ resp. $\mathbb{R}_2^*$ zijn, gegeven door:

$$e_1 = (1,0,0) \;;\; e_2 = (0,1,0) \;;\; e_3 = (0,0,1) \;;\; f_1 = (1,0) \;;\; f_2 = (0,1).$$

Zij

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en $\phi : \mathbb{R}_3^* \to \mathbb{R}_2^*$ de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding, gegeven door:

$$\phi = (\mathbb{R}_3^*,[e_1,e_2,e_3]) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}_2^*,[f_1,f_2]).$$

Zij $v = (4,4,3) \in \mathbb{R}_3^*$. Wegens $v = 4e_1 + 4e_2 + 3e_3$ is

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_3^*,[e_1,e_2,e_3]).$$

Dan is

$$\phi(v) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_2^*,[f_1,f_2]) \;,$$

oftewel:

$$\phi(v) = 20f_1 + 17f_2 = (20,17) \in \mathbb{R}_2^*.$$

* * *

Lijst van symbolen

* * *

Index

* * *