STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ORIENTEREND COLLOQUIUM VERZAMELINGSLEER

1962/63

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.),by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZC 57

Oriënterend Colloquium Verzamelingsleer.

1962/63

Oriënterend colloquium verzamelingsleer

Eerste bijeenkomst: 3 oktober 1962

Spreker: W. Kuyk, Algemene inleiding.

§ 1. Het begrip verzameling is ingevoerd door G. CANTOR [1] (1845-1918). Cantor's definitie van verzameling luidde: "Een verzameling is een samenvatting van bepaalde wel onderscheiden objecten van ons denken of aanschouwen tot een geheel". De objecten heten de elementen van de verzameling en men zegt dat de verzameling haar elementen bevat.

Voorbeelden: (a) de verzameling van alle Nederlandse boeken; dit is een voorbeeld van een zgn. eindige verzameling, een verzameling met eindig veel elementen.

(b) de verzameling N der natuurlijke getallen: $\{1,2,3,\ldots\}$; dit is een voorbeeld van een oneindige verzameling.

(c) de verzameling der reële getallen tussen 0 en 1, waarvan de triale ontwikkeling geen 1 bevat.

Men kan in het algemeen niet zeggen dat een eigenschap een verzameling definieert. Zo definieert de eigenschap "rood" niet de verzameling van alle rode dingen, daar t.a.v. de toepasbaarheid van het predicaat "rood" zeker geen ondubbelzinnigheid bestaat en aldus aan de eis van het welonderscheiden zijn van de objecten niet is voldaan. In de wiskunde treden doorgaans slechts mathematische verzamelingen op, i.e. verzamelingen van mathematische objecten (getallen, punten etc...) en verzamelingen van deze verzamelingen. Laten we echter slechts mathematische verzamelingen toe dan kunnen we nog niet zeggen dat elke eigenschap een verzameling definieert. Neem bijv. de eigenschap "zichzelf niet als element bevatten". Is nl. S de verzameling van alle mathematische verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten, dan geldt blijkbaar dat als de mathematische verzameling S zichzelf bevat, S zichzelf niet bevat, en omgekeerd. Hier hebben we een duidelijke tegenspraak. We spreken daarom af bij het definieren van (mathematische) verzamelingen nimmer van eigenschappen gebruik te maken die bij direct of na langer gebruik aanleiding geven tot een tegenspraak. Het schijnt voorlopig voldoende te zijn de volgende verzamelingen uit te sluiten:

----

1) Voor een uitvoerige biografie zie (8).

(a) iedere verzameling, die zichzelf als element bevat

(b) de boven gedefinieerde verzameling S.

Moeilijkheden van boven geschetste aard hebben geleid tot verschillende axiomatiseringen van de verzamelingsleer. Deze axiomatiseringen hebben hoofdzakelijk tot doel een consistente opbouw van de theorie te geven (zie (7), (17)). Daarover echter later.

§ 2. Als a element is van een verzameling A dan geven we dit aan met: $a \in A$. Is B een deel(-verzameling) van A, i.e. geldt voor alle $b, b \in B$, dat $b \in A$, dan schrijven we $B \subset A$. Als $B \subset A$ en $A \subset B$ dan is A gelijk aan B (notatie: $A = B$). B is een echte deelverzameling van A als $B \subset A$ en $B \neq A$ (notatie: $B \subset A$). Met $\emptyset$ duiden we de lege verzameling aan; dus de verzameling die geen element bevat. Laat A en B twee willekeurige verzamelingen zijn. Dan duiden we met $A \cap B$ de doorsnede van A en B aan, i.e. de verzameling van de elementen die zowel in A als in B zijn bevat. $A \cup B$ duidt de verenigingsverzameling aan van A en B, i.e. de verzameling van de elementen die in A of in B zijn bevat. $A \setminus B$ is de verschilverzameling van A en B, i.e. de verzameling van alle elementen die in A en niet in B zijn bevat. $A \setminus B$ is dus ook gedefinieerd als $B \not\subset A$.

Opmerking: In vele moderne mathematische geschriften is de omgangstaal, waarin vroeger wiskunde werd geformuleerd, vervangen door een strengere, logische taal. We zullen hier van tijd tot tijd iets van overnemen, met name daar waar het de duidelijkheid dient. Zo gebruiken we soms de logische tekens

"$\rightarrow$"	afkorting voor:	"houdt in" of "impliceert"
"$\leftrightarrow$"	" " :	"is (logisch) gelijkwaardig met"
"$\vee$"	" " :	"of" (in insluitende zin)
"$\wedge$"	" " :	"en"
"$\neg$"	" " :	"niet"
"$\exists x$"	" " :	"er bestaat een x"
"$\forall x$"	" " :	"voor alle x geldt".

$V = \{x \mid \ldots\}$ betekent: V is de verzameling van alle elementen x, die voldoen aan .... .

Haakjes worden op de gebruikelijke manier ingevoerd. Met behulp van deze tekens zijn de boven gegeven definities te formaliseren. Bijv. de definitie van $A \cap B$ en $A \cup B$:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Het verdient aanbeveling, ten einde te gewennen aan het gebruik van deze notatie, elke der bovengenoemde definities en enige van de in de syllabus voorkomende stellingen, op deze manier geheel te formaliseren.

§ 3. Verzamelingen voldoen aan de volgende rekenregels t.o.v. $\cap$ en $\cup$:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A \qquad \text{(commutativiteit)}$$

$$\left.\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)\\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\end{aligned}\right\} \text{(associativiteit)}$$

$$\left.\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C)\\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{aligned}\right\} \text{(distributiviteit)}$$

We bewijzen de laatste regel.

$$x \in (A \cap B) \cup C) \longleftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \longleftrightarrow$$
$$(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \longleftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)$$
$$\longleftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Opgaven: Bewijs dat $A \subset A \cup B$, $A \supset A \cap B$. Bewijs dat $A \subset B$ gelijkwaardig is met $A \cup B = B$ en met $A \cap B = A$, $A = B$ met $A \cap B = A \cup B$, $A \subset B \subset C$ met $A \cup B = B \cap C$.

Stelling (wetten van de Morgan): Als A en B deelverzamelingen zijn van C en $A' = C \setminus A$, $B' = C \setminus B$, dan is

a $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

<u>Bewijs</u>: bijv. van <u>a</u>: $x \in (A \cup B)' \leftrightarrow (x \in C \wedge x \notin (A \cup B))$

$$\leftrightarrow (x \in C \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)) \leftrightarrow (x \in C \wedge x \notin A) \wedge (x \in C \wedge x \notin B)$$

$$\leftrightarrow (x \in A' \wedge x \in B') \leftrightarrow x \in A' \cap B'.$$

Opgave: Als $A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, bewijs dan met behulp van een tekening dat $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, voor alle A,B en C.

§ 4. In de wiskunde spelen de <u>oneindige</u> verzamelingen ongetwijfeld de belangrijkste rol. Een belangrijke klasse van oneindige verzamelingen vormen de zgn. <u>aftelbare</u> verzamelingen. Een verzameling A heet aftelbaar als zij te schrijven is als $\{a_1, a_2, \ldots\}$, dus als er een nummering van de elementen mogelijk is, i.e. als aan elk element a van A een natuurlijk getal kan worden toegevoegd zodat met ieder element precies één natuurlijk getal en met ieder natuurlijk getal precies één element uit de verzameling correspondeert. We zeggen dan dat A op een 1-1-duidige wijze op de verzameling der natuurlijke getallen N is af te beelden.

Voorbeelden: a. De verzameling N der natuurlijke getallen.

b. De verzameling R der rationale getallen.

c. De verzameling A der algebraïsche getallen.

ad b. Plaats de breuken $\frac{p}{q}$ (p natuurlijk, q $\neq$ O natuurlijk) in een blok op de volgende wijze

$$\begin{array}{ccccc}
1, \rightarrow & 2, & 3, \rightarrow & 4, & \ldots \\
1/_2, & 2/_2, & 3/_2, & 4/_2, & \ldots \\
1/_3, & 2/_3, & 3/_3, & 4/_3, & \ldots \\
1/_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots
\end{array}$$

Schrijft men nu de getallen op de aangegeven wijze op een rij, daarbij reeds opgeschreven getallen weglatend, dan krijgen we een 1-1-duidige afbeelding van de verzameling der positieve rationale getallen op N. Hieruit kan men gemakkelijk een 1-1-duidige afbeelding van R op N construeren.

ad c. zie bijv. (11).

Tot slot zij nog de volgende belangrijke toepassing van het begrip aftelbare verzameling vermeld.

Stelling. Iedere in een interval $a \leq x \leq b$ monotone funktie $f(x)$ is in ten hoogste aftelbaar veel punten discontinu.

Literatuur:

1 H. Bachmann, Transfinite Zahlen. Springer Berlin, 1958.

2 N. Bourbaki, Théorie des ensembles. I, II, etc.

3 G. Cantor, Transfinite numbers. Dover publ.

4 A.A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 1919.

5 ————, " " " " " " , 1928.

6 ————, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, 1927.

7 ————, Abstract set theory, 1953.

8 ————, Cantors gesammelte Abhandlungen, 1962.

9 A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, Foundations of set theory, 1958.

10 F. Hausdorff, Grundzügen der Mengenlehre.

11 E. Kamke, Mengenlehre, Sammlung Göschen, 1955.

12 G.B. Keene, Abstract sets and finite ordinals, Pergamon.

13 A. Monjallon, Introduction aux mathématiques modernes, théorie des ensembles etc., 1960.

14 W. Sierpinski, Leçons sur les nombres transfinis, 1950.

15 ————, Algèbre des ensembles, 1951.

16 ————, Cardinal and ordinal numbers, 1958.

17 P. Suppes, Axiomatic set theory, 1960.

18 R. Wilder, Introduction into the foundations of mathematics, 1952.

Tweede en derde bijeenkomst: 17 oktober en 7 november

Spreker: W. Kuyk en E. Algra

§ 5. De zojuist genoemde stelling is o.a. een gevolg van de volgende hulpstelling.

Stelling 5.1. Zij $A_1, A_2, A_3, \ldots$ een aftelbare rij van aftelbare of eindige verzamelingen; dan is de vereniging $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_s \ldots$ hoogstens een aftelbare verzameling (d.i. aftelbaar of eindig).

Bewijs: Plaats de elementen van A_1 op een rij, die van A_2 eronder etc., zodat een blok ontstaat:

$$\begin{array}{l} A_1 = a_{11}, a_{12}, \ldots \\ A_2 = a_{21}, a_{22}, \ldots \\ \vdots \end{array}$$

en tel weer af zoals bij de rationale getallen (§ 4); laat reeds getelde elementen weg en passeer de lage plaatsen.

Het bewijs van de laatste stelling van § 4 gaat nu als volgt.

We mogen ons beperken tot monotoon toenemende functies f(x) op $a \leq x \leq b$. f(x) is discontinu in een punt ξ $(a \leq \xi \leq b)$ betekent dus voor het verschil $\sigma(\xi)$ tussen de rechter- en de linkerlimiet in het punt ξ:

$$\sigma(\xi) = \lim_{x \to \xi} \downarrow f(x) - \lim_{x \to \xi} \uparrow f(x) > 0 .$$

Bezie nu eerst de rij verzamelingen

$$\begin{array}{l} A_1 : \{\xi \mid a \leq \xi \leq b, \ \sigma(\xi) > 1\}. \\ A_2 : \{\xi \mid a \leq \xi \leq b, \ \sigma(\xi) > 1/2\} \\ \vdots \\ A_n : \{\xi \mid a \leq \xi \leq b, \ \sigma(\xi) > 1/n\} . \\ \vdots \end{array}$$

Deze rij is aftelbaar of eindig, terwijl elke discontinuiteit ξ in tenminste één A_i voorkomt. Elke A_i is op zichzelf eindig, daar een oneindige som van getallen $> 1/n$ bij vaste n zeker het verschil f(b)-f(a) overschrijdt. Volgens de voorgaande stelling is de vereniging $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ zeker aftelbaar.

De volgende stelling garandeert het bestaan van niet aftelbare oneindige verzamelingen.

Stelling 5.2. De verzameling van alle reële getallen x met $0<x<1$ is niet aftelbaar.

Bewijs: Elk getal x, $0<x\leq 1$, laat zich op precies één manier als oneindig voortlopende decimaalbreuk schrijven (bijv. 0,5 = 0,499..., 1 = 0,999...,etc.). Stel dat de verzameling van alle deze decimale ontwikkelingen aftelbaar was, dan kunnen we een aftelling $a_1, a_2, a_3, \ldots$ van de getallen tussen 0 en 1 vinden.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ a_2 &= 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ a_3 &= 0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bezie het getal $0,a_{11}a_{22}a_{33}\ldots$, en vorm een getal $0,b_1b_2b_3\ldots$ met $b_i \neq a_{ii}$, $b_i \neq 0$. Dan is d een getal $0<d\leq 1$, terwijl de decimale ontwikkeling van d niet afbreekt. De zo geconstrueerde decimaalbreuk echter verschilt van elke a_n uit bovenstaande rij daar d voor elke n in de n-de decimaal van a_n verschilt. Deze bewijsmethode heet de diagonaal-methode van Cantor.

§ 6. Men zegt dat een verzameling A aequivalent is met een verzameling B (notatie: $A \backsim B$) wanneer het mogelijk is A ééneénduidig op B af te beelden, i.e. wanneer het mogelijk is aan iedere $a\in A$ een element $b\in B$ toe te voegen, zodanig dat ieder element $b\in B$ het beeld is van precies één element van A.

We verifiëren gemakkelijk dat de relatie $\backsim$ (aequivalentierelatie genoemd) voldoet aan de volgende eigenschappen:

a. $A\backsim A$ (symmetrische eigenschap)

b. $A\backsim B \rightarrow B\backsim A$ (reflexieve eigenschap)

c. $(A\backsim B)\wedge(B\backsim C)\rightarrow A\backsim C$ (transitieve eigenschap)

Voorbeelden [1]: 1. De verzameling der rationale getallen is aequivalent met de verzameling der natuurlijke getallen N (§ 4).

2. De verzameling der natuurlijke getallen is aequivalent met de verzameling der even getallen, blijkens de toevoeging: n aan 2n (n=0,1,2,...).

3. De puntverzamelingen op de intervallen $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1]$, $(0,1)$ zijn met elkaar aequivalent.

----

1) zie (11), de bewijzen worden op het colloquium gegeven.

4. Elk interval is aequivalent met de gehele rechte, en elke rechte weer met elke halfrechte, dus elke halfrechte weer met elk interval en elk interval met elk ander interval.

We zien uit de voorbeelden dat een verzameling M heel wel aequivalent kan zijn met een echte deelverzameling $\overline{M} \subset M$. Dit geldt blijkbaar niet voor eindige verzamelingen: twee eindige verzamelingen zijn blijkbaar dan en slechts dan aequivalent als zij evenveel elementen bevatten.

Lemma 1. Iedere deelverzameling $\overline{M}$ van een aftelbare verzameling M is hoogstens aftelbaar.

Bewijs: Zij $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ dan is er in de rij $a_1, a_2, \ldots$ een eerste a_{k_1} die tot M behoort, een tweede a_{k_2} die tot M behoort, etc., en we krijgen een rij $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$ die precies alle elementen van $\overline{M}$ bevat. Breekt deze rij af, dan is $\overline{M}$ eindig, in het andere geval is $\overline{M}$ aftelbaar.

Lemma 2. Elke oneindige verzameling M heeft een aftelbare deelverzameling.

Bewijs: Kies uit M een element m_o; dan is $M_1 = M \setminus \{m_1\}$ niet leeg. Kies uit M_1 een element m_1, dan is $M_2 = M \setminus \{m_1\}$ niet leeg, etc. $\{m_o, m_1, \ldots\}$ is nu een aftelbare verzameling.

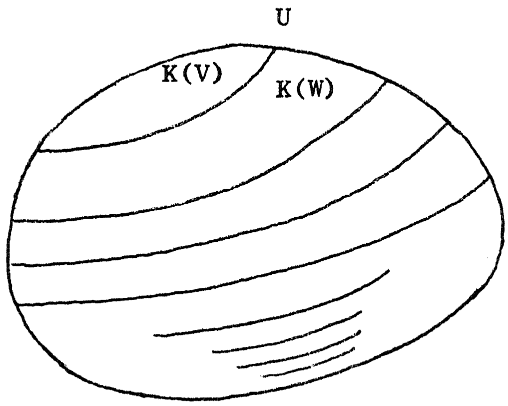
Stelling: Een verzameling M is dan en slechts dan aequivalent met een echte deelverzameling $\overline{M} \subset M$, als M oneindig veel elementen bevat.

Bewijs: Als $\overline{M} \subset M$ en $\overline{M} \backsim M$ dan kan M geen eindige verzameling zijn. Omgekeerd, kies als M oneindig is een aftelbare deelverzameling $N = \{n_1, n_2, \ldots\} \subset M$ en een aftelbare deelverzameling $\overline{N} = \{n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots\} \subset N$. Schrijf $\overline{M} = (M \setminus N) + \overline{N}$; dan is $\overline{M} \subset M$ en $\overline{\overline{M}} \backsim M$; dit laatste op grond van de toeordening n_{k_i} aan n_i $(i=1,2,\ldots)$.

Opmerking: Dedekind koos n.a.v. de voorgaande stelling de volgende definitie van oneindige verzameling: "Een verzameling heet oneindig als zij aequivalent is met een echte deelverzameling".

§ 7. Het nadeel van de hier gevolgde opzet van de verzamelingsleer is, dat men niet precies weet wat we nu als verzameling toelaten en wat niet, dat we niet eens en vooral op een duidelijke wijze hebben vastgelegd binnen welk universum U van verzamelingen we nu werken. In een axiomatische opzet van de theorie wordt precies aangegeven wat wel en wat niet tot ons universum zal behoren. We onderstellen hier tot nader aankondiging dat ons universum U van verzamelingen in ieder geval bevat alle mathematische verzamelingen, verzamelingen van functie etc., kortom de verzamelingen van alles wat in de wiskunde maar als "ding" of "object" optreedt.

We tonen aan, dat de in § 6 gegeven definitie van aequivalentie van verzamelingen en klasseindeling van ons universum U bewerkt, i.e. dat U door de relatie $\backsim$ in klassen wordt verdeeld die niets met elkaar gemeen hebben. We verenigen nl. alle verzamelingen uit U die aequivalent zijn met een willekeurig uitgekozen V tot een klasse K(V), alle verzamelingen uit U die aequivalent zijn met een verzameling $W \notin K(V)$ tot een klasse K(W) etc., Op die manier wordt U opgesplitst in klassen die geen element gemeen hebben. Stel nl. dat K(V) en K(W) een verzameling A als element gemeen hebben: $A \in K(V)$ en $A \in K(W)$, dan is $A \backsim V$ en $W \backsim A$, en volgens de transitieve eigenschap van $\backsim$ geldt $V \backsim W$, hetgeen uitgesloten is.



Voorbeelden van klassen: 1) De klasse van alle eindige verzamelingen met n elementen.

2) De klasse K(N) van alle aftelbaar oneindige verzamelingen.

3) De klasse van alle verzamelingen die aequivalent zijn met het gesloten interval $[0,1]$; dit interval wordt kortweg het <u>continuum</u> genoemd.

<u>Opmerking</u>: De klasseindeling van U met behulp van $\backsim$ voldoet dus aan de eigenschappen:

a. geheel U wordt door $\backsim$ opgesplitst in disjuncte klassen, d.w.z. elk willekeurig element in U ligt in precies één klasse;

b. een klasse K(V) kan gerepresenteerd worden door een willekeurig element uit K(V); dw.z. als $V_0 \in K(V)$ dan is $K(V) = K(V_0)$.

Definitie 1: Twee verzamelingen V en W heten gelijkmachtig als ze in dezelfde aequivalentieklasse liggen: $K(V) = K(W)$.

Definitie 2: De bij de verzameling V behorende aequivalentieklasse $K(V)$ heet het kardinaalgetal of de machtigheid van V.

De machtigheid van een willekeurige verzameling V gaan we vaak aan met $|V|$. In het geval van een eindige verzameling A geven we $|A|$ aan met het natuurlijk getal dat het aantal der elementen van A aanduidt. De machtigheid $|N|$ van N (voorbeeld 2) wordt aangeduid met $\aleph_0$ (aleph nul) en van het continuum met $\aleph$ (aleph).
De vraag of de tot nu toe gevonden kardinaalgetallen

$$0,1,2,3,\ldots;\ \aleph_0,\ \aleph,$$

de enige kardinaalgetallen zijn moet negatief beantwoord worden.

Voorbeeld: De verzameling van alle op het gesloten interval $[0,1]$ gedefinieerde reële functies of reeds de deelverzameling F van alle op $[0,1]$ gedefinieerde reële functies die slechts de waarden 0 en 1 aannemen. Daarbij wordt een functie $f(x)$ op $[0,1]$ beschouwd als te zijn gedefinieerd als aan elke x $(0 \leq x \leq 1)$, een welbepaald getal y is toegevoegd. (In symbolen: $\forall x\ (0 \leq x \leq 1) \exists y\ [y = f(x) \wedge ((z=f(x) \wedge y = f(x)) \longrightarrow z=y)]$).

We bewijzen dat de laatste verzameling F een machtigheid $\aleph_1$ heeft die niet in bovenstaande rij voorkomt. Zij nu $U \neq \emptyset$ een willekeurige deelverzameling van $[0,1]$ met machtigheid n, $\aleph_0$ of $\aleph_1$. Stel dat $U \backsim F$, onder de toevoeging $u \longleftrightarrow f_u(x)$ $(u \in U$ en $f_u(x) \in F)$. We indiceren dus de functies uit F met de elementen van U. Nu construeren we een functie $g(x)$ op $0 \leq x \leq 1$ zodat, als $u \in U$, $g(u) \neq f_u(u)$ is. Dit is altijd mogelijk daar we altijd uit twee functiewaarden kunnen kiezen nl. uit 0 en 1. Is nl. $f_u(u) = 0(1)$, dan kiezen we $g(u) = 1(0)$. $g(u)$ is nu een functie die in F voorkomt. D.w.z. er bestaat een $u \in U$ zodat $g(x) = f_u(x)$. Maar dit betekent $g(u) = f_u(u)$, in tegenspraak met de constructie van $g(x)$.

§ 8. Eindige kardinaalgetallen zijn altijd vergelijkbaar naar grootte. Is dit over te brengen op de oneindige kardinaalgetallen $\aleph_0$, $\aleph$ en $\aleph_1$?

Definitie: Een kardinaalgetal $|W|$ van een verzameling W heet kleiner dan het kardinaalgetal $|V|$ (notatie: $|W| < |V|$) van een verzameling V, als W aequivalent is met een deelverzameling van V, maar V niet .

aequivalent is met een deelverzameling van W. Het kardinaalgetal $\aleph_0$ heet <u>aftelbaar</u>, de kardinaalgetallen kleiner dan $\aleph_0$ <u>heten</u> eindig, die groter dan $\aleph_0$ <u>overaftelbaar</u>.

<u>Stelling 1</u>. Zijn $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{p}$ kardinaalgetallen dan geldt:

a. $(\mathfrak{m} < \mathfrak{n} \wedge \mathfrak{n} < \mathfrak{p}) \rightarrow \mathfrak{m} < \mathfrak{p}$.

b. hoogstens één der volgende relaties geldt: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ en $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$.
I.h.b. volgt uit $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$ altijd $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

<u>Bewijs</u>:

<u>a</u>. Laat M,N en P representanten zijn van $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{p}$. Dan bestaan er deelverzamelingen $N_1 \subset N$, $P_1 \subset P$ met $M \sim N_1$ en $N \sim P_1$. Hierdoor wordt N_1 in P_1 afgebeeld; stel het beeld is P_2; dus $N_1 \sim P_2$ en ook $M \sim P_2$. Tonen we dus aan dat P niet aequivalent is met een deelverzameling van M dan zijn we klaar. Stel dat $P \sim M_1 \subset M$; dan bestaat er blijkens $M \sim N_1$ een $N_2 \subset N_1$ met $M_1 \sim N_2$ en $P \sim N_2$, i.t.t. de ongelijkheid $\mathfrak{n} < \mathfrak{p}$.

<u>b</u>. Als $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ dan kan niet tegelijkertijd ook $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. Als $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ dan is M aequivalent met een deelverzameling van N, en dan kan niet $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ of $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ gelden.

<u>Gevolgen</u>:

1. Elk willekeurig eindig kardinaalgetal is kleiner dan alle oneindige kardinaalgetallen.
2. Voor elk oneindig kardinaalgetal $\mathfrak{m}$ geldt: $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$.

<u>c</u>. Daar $\aleph_0 \leq \aleph$ en $\aleph_0 \neq \aleph$ geldt $\aleph_0 < \aleph$.
Het is niet bekend of er tussen $\aleph_0$ en $\aleph$ nog kardinaalgetallen zijn (Het continuumprobleem.)

<u>d</u>. $\aleph_0 < \aleph < \aleph_1$.

Stelling 2. Laat M en N twee verzamelingen zijn, zodat M aequivalent is met een deelverzameling van N en omgekeerd N aequivalent met een deelverzameling van M, dan is $M \sim N$.

Colloquium Verzamelingenleer

Vierde bijeenkomst: 21 november 1962

Spreker: M.A. Maurice

§ 9. 1. Alvorens § 8, stelling 2 te bewijzen, zullen we enige in het voorgaande reeds voorkomende definities nog eens op iets andere wijze formuleren.

Onder het geordend paar (x,y) verstaat men de verzameling $\{\{x\}, \{x,y\}\}$; x heet de eerste coordinaat, y heet de tweede coordinaat.

Het is duidelijk, dat $(x,y) = (u,v) \Longleftrightarrow (x=u \text{ en } y=v)$.

Onder een functie verstaat men een verzameling f van geordende paren, met de eigenschap

$$(x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Longrightarrow y = z \ .$$

In plaats van $(x,y) \in f$ schrijft men ook wel $y = fx$ of $y = f(x)$; f(x) heet het beeld van x onder f, of ook: de functie-waarde in x. Indien A een verzameling is, dan verstaat men onder het beeld van A onder f:

$$f[A] = \{y \mid \exists x : x \in A \wedge (x,y) \in f\}$$

$\mathfrak{D}f = \{x \mid \exists y: (x,y) \in f\}$ heet het definitiegebied van f;

$\mathfrak{R}f = \{y \mid \exists x: (x,y) \in f\}$ heet het waarde-gebied van f.

De functie f heet 1-1-duidig, indien

$$\forall x,y: (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y).$$

Indien f een 1-1-duidige functie is, is de verzameling

$$f^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in f\}$$

weer een (1-1-duidige) functie; f^{-1} heet dan de inverse van f.

2. De definitie van aequivalentie van twee verzamelingen kan nu als volgt worden gegeven:
De verzameling B heet aequivalent met de verzameling A (notatie: $A \backsim B$), indien er een 1-1-duidige functie f bestaat,

waarvoor $\mathfrak{D}f = A$ en $\mathfrak{R}f = B$.

Het is duidelijk, dat dan ook A aequivalent is met B ($B \sim A$), want $\mathfrak{D}f^{-1} = B$, $\mathfrak{R}f^{-1} = A$, f^{-1} is 1-1-duidig.

Men kan dus nu ook zeggen: "A en B zijn aequivalent".

Zie verder § 6.

3. We geven nu het bewijs van § 8, stelling 2.

a. Het is duidelijk, dat we zonder beperking der algemeenheid kunnen veronderstellen, dat $M \cap N = \emptyset$.

b. Op grond van het gegeven bestaan 1-1-duidige functies f en g, met $\mathfrak{D}f = M$, $\mathfrak{R}f \subset N$ en $\mathfrak{D}g = N$, $\mathfrak{R}g \subset M$.

Zij nu voor $x \in M$

$$V(x) = \left\{ g^{-1}x,\ f^{-1}g^{-1}x,\ g^{-1}f^{-1}g^{-1}x, \ldots \right\}$$

en voor $x \in N$

$$W(x) = \left\{ f^{-1}x,\ g^{-1}f^{-1}x,\ f^{-1}g^{-1}f^{-1}x, \ldots \right\};$$

dan zijn $V(x)$ en $W(x)$ eindig of aftelbaar oneindig.

Definieer

$$\begin{aligned} M_o &= \{ x \mid |V(x)| \text{ is oneven} \\ M_e &= \{ x \mid |V(x)| \text{ is even} \\ M_\infty &= \{ x \mid |V(x)| = \aleph_0 \}; \end{aligned}$$

dan zijn M_o, M_e en M_∞ onderling disjunct, en $M_o \cup M_e \cup M_\infty = M$; definieer op analoge wijze N_o, N_e en N_∞.

c. Gemakkelijk volgt nu

$$f[M_e] = N_o, \quad f[M_\infty] = N_\infty, \quad g^{-1}[M_o] = N_e.$$

Indien nu de functie h wordt gedefinieerd door

(i) $\mathfrak{D}h = M$

(ii) $\begin{cases} x \in M_e \cup M_\infty \Longrightarrow h(x) = f(x) \\ x \in M_o \Longrightarrow h(x) = g^{-1}(x), \end{cases}$

dan is h een 1-1-duidige afbeelding van M op N.

<u>Gevolg</u>: Indien de verzameling V aequivalent is met een deelverzameling van de verzameling W, dan is $|V| \leq |W|$ (vgl. de definitie in § 8).

Opmerking: Als $\mathfrak{m}$ en $\mathfrak{n}$ kardinaalgetallen zijn, is ten hoogste één der drie beweringen: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ juist; in een later stadium zal, m.b.v. het nog te behandelen keuze-axioma, worden aangetoond, dat ook altijd aan ten minste één der drie genoemde beweringen is voldaan, m.a.w. dat twee kardinaalgetallen steeds vergelijkbaar zijn.

§ 10. Als A een verzameling is, dan verstaat men onder de machtsverzameling van A:

$$\mathfrak{P}(A) = \{ B \mid B \subset A \}.$$

Stelling: Voor elke verzameling A is $|\mathfrak{P}(A)| > |A|$.

Bewijs:

a. A is aequivalent met een deelverzameling van $\mathfrak{P}(V)$, nl. met $\{\{a\} \mid a \in A\}$.

∴ Hieruit volgt, dat $|A| \leq |\mathfrak{P}(A)|$.

b. Indien nu $|A| = |\mathfrak{P}(A)|$, oftewel $A \sim \mathfrak{P}(A)$, dan bestaat er een 1-1-duidige functie f, zodanig, dat $\mathfrak{D}f = A$ en $\mathfrak{R}f = \mathfrak{P}(A)$.

Zij nu

$$A_1 = \{a \mid a \in f(a)\} \quad \text{en} \quad A_2 = \{a \mid a \notin f(a)\},$$

dan is

$$A = A_1 \cup A_2 \quad , \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Daar $A_2 \subset A$, bestaat een $a_0 \in A$, zodanig, dat

$$A_2 = f(a_0).$$

(i) $a_0 \in A_1$ betekent: $a_0 \in f(a_0)$, $a_0 \in A_2$;

(ii) $a_0 \in A_2$ betekent: $a_0 \notin f(a_0)$, $a_0 \notin A_2$;

dit is een contradictie.

Derhalve is $|A| < |\mathfrak{P}(A)|$.

Gevolg: Bij elk gegeven kardinaalgetal is een groter kardinaalgetal te vinden; er bestaat dus geen grootste kardinaalgetal.

§ 11. Indien zowel $\mathcal{M}$ als $\mathcal{N}$ een familie is van onderling disjuncte verzamelingen, terwijl bovendien $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$ — zodat een 1-1-duidige functie f bestaat met $\mathfrak{D}f = \mathcal{M}$ en $\mathfrak{R}f = \mathcal{N}$ — en indien tenslotte, voor alle $M \in \mathcal{M}$, geldt, dat $M \sim f(M)$, dan zijn ook

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \quad \text{en} \quad \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N$$

aequivalent.

Men gaat dit gemakkelijk na.

Dan heeft echter zin de volgende

<u>Definitie</u>: Indien $\{\mathfrak{m}_n\}_{n \in N}$ een verzameling kardinaalgetallen is, dan verstaat men onder <u>de som</u>

$$\sum_{n \in N} \mathfrak{m}_n$$

van deze kardinaalgetallen, het kardinaalgetal van de verzameling $\bigcup_{n \in N} M_n$, indien $\{M_n\}_{n \in N}$ een familie van onderling disjuncte verzamelingen is, zodanig dat $|M_n| = \mathfrak{m}_n$ voor alle $n \in N$.

<u>Opmerkingen</u>: 1. Is N een eindige verzameling, bijv. $N = \{1, 2, \dots, n\}$, dan schrijven we ook

$$\sum_{n \in N} \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_n$$

2. Als $\mathfrak{m}$ en $\mathfrak{n}$ eindige kardinaalgetallen zijn, dan komt de optelling neer op de optelling van natuurlijke getallen.

Het is duidelijk, dat bij de optelling van kardinaalgetallen aan de commutatieve wet ($\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$) en aan de associatieve wet ($(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) + \mathfrak{p} = \mathfrak{m} + (\mathfrak{n} + \mathfrak{p})$) is voldaan.

<u>Stelling</u>: Indien n een eindig kardinaalgetal, $\mathfrak{a}$ het aftelbare kardinaalgetal, $\mathfrak{c}$ het continue kardinaalgetal en $\mathfrak{m}$ een willekeurig oneindig kardinaalgetal voorstelt, dan geldt

<u>a</u>. $n + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + n = \mathfrak{a}$

<u>b</u>. $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

<u>c</u>. $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

<u>d</u>. $\mathfrak{m} + n = \mathfrak{m} + \mathfrak{a} = \mathfrak{m}$

Bewijs: a en b. volgen onmiddellijk uit stelling 5.1;

c. volgt uit de aequivalentie van $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ en $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$.

d. als M en A disjuncte verzamelingen zijn, met $|M| = \mathfrak{m}$, $|A| = \mathfrak{a}$ (resp. n), en A' is een deelverzameling van M met $|A'| = \mathfrak{a}$ (resp. n), dan is

$$M \cup A = (M-A') \cup (A' \cup A) \backsim (M-A') \cup A' = M,$$

dus $\mathfrak{m} + \mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m} + n = \mathfrak{m}$).

§ 12. 1. Als x een functie is, dan is x geheel bepaald door

(i) $\mathfrak{D}x = I$

(ii) de functiewaarde x_i $(=x(i))$ voor alle $i \in I$.

We zullen een functie x dan ook dikwijls schrijven als

$$x = (x_i)_{i \in I}.$$

2. Indien $\{X_i\}_{i \in I}$ een familie van verzamelingen is, dan verstaat men onder het (cartesisch) product van de verzamelingen X_i $(i \in I)$ de verzameling van alle functies x, gedefinieerd op I, en zodanig dat $x_i \in X_i$ voor alle $i \in I$; m.a.w.:

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ x \mid x = (x_i)_{i \in I},\ x_i \in X_i \text{ voor alle } i \in I \right\};$$

x_i heet de i^{de} coordinaat van x,

X_i heet de i^{de} coordinatenverzameling.

Indien $J \subset I$, dan heet de afbeelding

$$(x_i)_{i \in I} \longrightarrow (x_i)_{i \in J}$$

van $\prod_{i \in I} X_i$ op $\prod_{i \in J} X_i$ de projectie π_J.

Indien X en I twee verzamelingen zijn, dan wordt X^I gedefinieerd door

$$X^I = \prod_{i \in I} X_i, \quad \text{met } X_i = X \quad \text{voor alle } i \in I;$$

X^I is dus de verzameling van alle functies op I, waarvan de waarden in I liggen.

Opmerking: Het product van twee verzamelingen (en daarna ook van eindig vele) kan men ook aldus geven

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in X_1 \text{ en } x_2 \in X_2\}.$$

Dan zijn de drie verzamelingen

$$\prod_{i=1,2} X_i\ ,\quad X_1 \times X_2,\quad X_2 \times X_1$$

formeel natuurlijk verschillend, maar het is duidelijk dat er een "kanonieke" 1-1-afbeelding van elk der drie op elk der beide overige bestaat.

3. Indien $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee aequivalente families van verzamelingen zijn - zodat een 1-1-duidige functie f bestaat met $\mathfrak{D}f = \mathcal{M}$ en $\mathfrak{R}f = \mathcal{N}$ - en indien voor alle $M \in \mathcal{M}$ geldt, dat $f(M) \sim M$, dan is ook

$$\prod_{M \in \mathcal{M}} M \sim \prod_{N \in \mathcal{N}} N$$

Dan heeft de volgende definitie betekenis:

Definitie: Indien $\{\mathfrak{m}_n\}_{n \in N}$ een verzameling kardinaalgetallen is, dan verstaat men onder het product

$$\prod_{n \in N} \mathfrak{m}_n$$

van deze kardinaalgetallen, het kardinaalgetal van de verzameling $\prod_{n \in N} M_n$, indien $\{M_n\}_{n \in N}$ een familie van verzamelingen is, zodanig, dat $|M_n| = \mathfrak{m}_n$ voor alle $n \in N$.

Opmerking: 1. Is N een eindige verzameling, bijv. $N = \{1,2,\dots,n\}$, dan schrijven we ook

$$\prod_{n \in N} \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1\ \mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_n$$

2. Als $\mathfrak{m}$ en $\mathfrak{n}$ eindige kardinaalgetallen zijn, dan komt de vermenigvuldiging neer op de vermenigvuldiging van natuurlijke getallen.

Het is duidelijk, dat bij de vermenigvuldiging van kardinaalgetallen aan de commutatieve wet ($\mathfrak{m}.\mathfrak{n} = \mathfrak{n}.\mathfrak{m}$) en aan de associatieve wet ($(\mathfrak{m}\,\mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\mathfrak{n}\,\mathfrak{p})$) is voldaan.

Colloquium Verzamelingenleer

Vijfde bijeenkomst: 12 december 1962

Spreker: M.A. Maurice

Stelling: Indien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{p}$ kardinaalgetallen zijn, dan is

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{n}+\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}.\mathfrak{n} + \mathfrak{m}.\mathfrak{p}$$

$$(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}.\mathfrak{p} + \mathfrak{n}.\mathfrak{p}$$

(distributieve wetten)

Bewijs: Op grond van de commutativiteit is het voldoende één van beide beweringen te bewijzen.

Laat nu N en P disjuncte verzamelingen zijn, met $|N| = \mathfrak{n}$ en $|P| = \mathfrak{p}$, en zij M een verzameling met $|M| = \mathfrak{m}$.

Het is duidelijk, dat dan ook de verzamelingen $M \times N$ en $M \times P$ disjunct zijn, en dat bovendien

$$M \times (N \cup P) = (M \times N) \cup (M \times P) \;;$$

maar dit betekent, dat

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{n}+\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}.\mathfrak{n} + \mathfrak{m}.\mathfrak{p} \,.$$

§ 13. Stelling: Zij N een verzameling met kardinaalgetal $\mathfrak{n}$, en zij $\{\mathfrak{m}_n\}_{n \in N}$ een familie van gelijke kardinaalgetallen: $\mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}$ voor alle $n \in N$.

Dan geldt:
$$\sum_{n \in N} \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}.\mathfrak{n}$$

Bewijs:

Laat $\{M_n\}_{n \in N}$ een disjuncte familie van verzamelingen M_n zijn, zodanig, dat $|M_n| = \mathfrak{m}$ voor alle $n \in N$,

en zij $M = \bigcup_{n \in N} M_n$.

Laat ook $\overline{M}$ een verzameling met kardinaalgetal $\mathfrak{m}$ zijn.

1. $\forall n \in N$: $\exists$ 1-1-duidige functie f_n: $\mathfrak{D} f_n = M_n$, $\mathfrak{R} f_n = \overline{M}$.

2. Voor alle $x \in M$ bestaat precies één $n \in N$, zodanig, dat $x \in M_n$; zeg $n=n(x)$.

Definieer nu voor alle $x \in M$:

$$f(x) = (f_{n(x)}(x),\ n(x)) \quad ;$$

dan is f een 1-1-duidige functie met $\mathcal{D} f=M$ en $\mathcal{R} f=\overline{M} \times N$.
Derhalve is inderdaad

$$\sum_{n \in N} \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m} . \mathfrak{n}$$

§ 14. Stelling: Indien n een eindig kardinaalgetal, $\mathfrak{a}$ het aftelbare kardinaalgetal, en $\mathcal{L}$ het continue kardinaalgetal is, dan geldt:

a. $\mathfrak{a}.n = \mathfrak{a}$

b. $\mathfrak{a}.\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

c. $\mathcal{L}.n = \mathcal{L}$

d. $\mathcal{L}.\mathfrak{a} = \mathcal{L}$

e. $\mathcal{L}.\mathcal{L} = \mathcal{L}$.

Bewijs:

a. stelling 5,1 + stelling § 13

b. stelling 5,1 + stelling § 13

c. $\mathcal{L}.n = \mathcal{L} + \mathcal{L} + \ldots + \mathcal{L}$ (n maal) (volgens st. § 13)
$= \mathcal{L}$ (volgens stelling § 11)

d. De verzamelingen $C_i = \{ x \mid i \leqq x < i+1 \}$ (i=1,2,3,...) zijn alle aequivalent, met kardinaalgetal $\mathcal{L}$;
bovendien zijn ze disjunct en hun vereniging heeft ook het kardinaalgetal $\mathcal{L}$;
op grond van stelling § 13 volgt dan weer $\mathfrak{a} . \mathcal{L} = \mathcal{L}$.

e. het bewijs van de bewering $\mathcal{L} . \mathcal{L} = \mathcal{L}$ wordt gegeven in de volgende

Hulpstelling: De verzameling van punten in het half-open vierkant

$$V = \{ (x,y) \mid 0 < x \leqq 1 \text{ en } 0 < y \leqq 1 \}$$

is aequivalent met de verzameling punten in het half-open interval

$$I = \{ z \mid 0 < z \leqq 1 \} \quad .$$

Bewijs:

1\. a. Alle getallen p met $0 < p \leq 1$ kunnen gerepresenteerd worden door een oneindig voortlopende duale breuk:

$$p = 0,p_1\ p_2\ p_3\ \dots \qquad (p_i=0 \text{ of } 1 \text{ voor elke } i=1,2,3,\dots),$$

waarin ten minste één $p_i=1$;
en omgekeerd stelt zo'n duale ontwikkeling een getal voor uit het half-open interval $(0,1\rangle$.

b. Sommige getallen uit $(0,1\rangle$ kunnen echter op meer dan één manier als oneindige duale breuk worden gerepresenteerd; bijv:

$$0,0100111000000\dots = 0,0100110111111\dots \quad .$$

Indien we echter afspreken om die duale breuken, waarin vanaf zekere "duaal" slechts nullen voorkomen, buiten beschouwing te laten, kunken we alle getallen uit $(0,1\rangle$ op één en slechts één wijze representeren als een duale breuk.

2\. Onder een "aggregaat" in de duale ontwikkeling van een getal $p \in (0,1\rangle$ verstaan we een groepje opéénvolgende "dualen",

1) dat voorafgegaan wordt door een duaal 1 (of,)

2) waarvan alle dualen =0 zijn, op de laatste na, die =1 is;

we kunnen elke duale breuk uit $(0,1\rangle$ ook schrijven als een oneindige ontwikkeling in opeenvolgende aggregaten $\bar{p}_i$:

$$p = 0,\ \bar{p}_1\ \bar{p}_2\ \bar{p}_3\ \dots$$

bijv.:

$$p = 0,010011010011101100 1\dots$$

wordt:

$$p = 0,(01)(001)(1)(01)(001)(1)(1)(01)(1)(001)\dots$$

3\. Definieer nu de volgende afbeelding f van V in I:

als $(x,y) \in V$, en $\begin{cases} x= 0,\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3\ \dots \\ y= 0,\bar{y}_1\ \bar{y}_2\ \bar{y}_3\ \dots \end{cases}$, dan zij

$$f(x,y) = 0,\ \bar{x}_1\ \bar{y}_1\ \bar{x}_2\ \bar{y}_2\ \bar{x}_3\ \bar{y}_3\ \ldots$$

a. het is duidelijk, dat f inderdaad een afbeelding is van V in I

b. f is echter zelfs een afbeelding òp I;

als immers $z \in I$, en

$$z = 0,\bar{z}_1\ \bar{z}_2\ \bar{z}_3\ \bar{z}_4\ \ldots\ ,$$

dan zijn $x = 0,\bar{z}_1\ \bar{z}_3\ \bar{z}_5\ \ldots$

en $y = 0,\bar{z}_2\ \bar{z}_4\ \bar{z}_6\ \ldots$

duale breuken van het toegelaten type, en bovendien is $f(x,y)=z$

c. f is tenslotte ook 1-1-duidig; immers

$$f(x,y) = f(u,v)$$

$$0,\bar{x}_1\ \bar{y}_1\ \bar{x}_2\ \bar{y}_2\ \ldots = 0,\bar{u}_1\ \bar{v}_1\ \bar{u}_2\ \bar{v}_2\ \ldots \Rightarrow$$

$$\bar{x}_i = \bar{u}_i\ ,\quad \bar{y}_i = \bar{v}_i \qquad (i=1,2,3,\ldots)$$

$$\Rightarrow (x,y) = (u,v)\quad .$$

§ 15. Indien $\mathfrak{m}$ en $\mathfrak{n}$ kardinaalgetallen zijn, dan definieert men

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \prod_{n \in N} \mathfrak{m}_n\ ,$$

waarin $\mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}$ voor alle $n \in N$ en $|N| = \mathfrak{n}$.

Het is duidelijk, dat $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ het kardinaalgetal is van elke verzameling M^N, indien $|M| = \mathfrak{m}$ en $|N| = \mathfrak{n}$.

<u>Stelling</u>: Indien $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{p}$ kardinaalgetallen zijn, dan geldt:

a. $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}}$

b. $(\mathfrak{m}.\mathfrak{n})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}.\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$

c. $(\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}.\mathfrak{n}}$.

Het bewijs van deze stelling is een onmiddellijk gevolg van de volgende

<u>Hulpstelling</u>: Als M, N en P verzamelingen zijn, dan geldt

a. $M \cap N = \phi \Rightarrow P^{M \cup N} \backsim P^M \times P^N$

b. $(M \times N)^P \backsim M^P \times N^P$

c. $(P^M)^N \backsim P^{M \times N}$

<u>Bewijs</u>:

a. (i) Als $x \in P^{M \cup N}$, dan is x een functie, met $\mathcal{D}\, x = M \cup N$
$\mathcal{R}\, x \subset P$

Definieer nu de functie x_1 met $\mathcal{D}\, x_1 = M$ door

$$x_1(m) = x(m) \qquad \text{voor alle } m \in M$$

en de functie x_2 met $\mathcal{D}\, x_2 = N$ door

$$x_2(n) = x(n) \qquad \text{voor alle } n \in N$$

(ii) De functie φ, die gedefinieerd wordt door

$$\mathcal{D}\varphi = P^{M \cup N}$$

en $\varphi(x) = (x_1, x_2)$ voor alle $x \in P^{M \cup N}$ is dan een 1-1-duidige afbeelding van $P^{M \cup N}$ op $P^M \times P^N$.

b. (i) Als $x \in (M \times N)^P$, dan is x een functie met $\mathcal{D}\, x = P$
$\mathcal{R}\, x \subset M \times N$

Definieer nu de functie x_1 met $\mathcal{D}\, x_1 = P$ door

$$x_1(p) = m, \text{ als } x(p) = (m,n) \qquad (p \in P)$$

en de functie x_2 met $\mathcal{D}\, x_2 = P$ door

$$x_2(p) = n, \text{ als } x(p) = (m,n) \qquad (p \in P)$$

(ii) De functie φ, die gedefinieerd wordt door

$$\mathcal{D}\varphi = (M \times N)^P$$

$$\varphi(x) = (x_1, x_2) \qquad \text{voor alle } x \in (M \times N)^P$$

is dan een 1-1-duidige afbeelding van $(M \times N)^P$ op $M^P \times N^P$.

c. (i) Als $x \in (P^M)^N$, dan is x een functie met $\begin{cases} \mathcal{D}\, x = N \\ \mathcal{R}\, x \subset P^M \end{cases}$

Voor alle $n \in N$ is dus $x(n)$ een functie met $\begin{array}{l} \mathcal{D}\, x(n) = M \\ \mathcal{R}\, x(n) \subset P \end{array}$

De functie $\overline{x}$, die gedefinieerd wordt door

$$D\,\overline{x} = M \times N$$

$$\overline{x}(m,n) = x(n)(m)$$

is dan een element van $P^{M \times N}$.

(ii) Definieer nu de functie φ door

$$D\,\varphi = (P^M)^N$$

$$\varphi(x) = \overline{x} \qquad \text{voor alle } x \in (P^M)^N \quad ;$$

dan is φ een 1-1-duidige afbeelding van $(P^M)^N$ op $P^{M \times N}$,

<u>immers</u>:

α. φ is een afbeelding òp $P^{M \times N}$:

als $y \in P^{M \times N}$, dan is y een functie met $\begin{array}{l} \mathcal{D}\, y = M \times N \\ \mathcal{R}\, y \subset P \quad ; \end{array}$

definieer nu een functie x, met $\mathcal{D}\, x = N$, zó, dat voor elke $n \in N$ $x(n)$ een functie is met $\begin{cases} \mathcal{D}\, x(n) = M \\ x(n)(m) = y(m,n) \text{ voor alle } m \in M. \end{cases}$

Dan is $y = \varphi(x)$.

β. φ is 1-1-duidig:

$$x' \text{ en } x'' \in (P^M)^N \quad , \quad x' \neq x''$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, n \in N \;:\; x'(n) \neq x''(n)$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, m \in M \;:\; x'(n)(m) \neq x''(n)(m) \;.$$

<u>Dus</u>: $\varphi(x') \neq \varphi(x'')$.

Colloquium Verzamelingenleer

Zesde bijeenkomst: 16 januari 1963

Spreekster: Mevr. A.B. Paalman - de Miranda

§ 16. Stelling: Voor elke verzameling V geldt:

$$|\mathfrak{P}(V)| = 2^{|V|}.$$

Bewijs:

a. Definieer voor elke deelverzameling A van V de karakteristieke functie φ_A door:

$$\begin{cases} \varphi_A(x) = 1 & \text{voor } x \in A \\ \varphi_A(x) = 0 & \text{voor } x \in V \setminus A. \end{cases}$$

b. Indien Φ de verzameling van alle karakteristieke functies op V is,

$$\Phi = \{ \varphi_A \mid A \in \mathfrak{P}(V) \}, \qquad \ldots.(1)$$

dan is blijkbaar ook

$$\Phi = \{0,1\}^V \qquad \ldots.(2)$$

c. Uit (1) volgt, dat

$$\Phi \sim \mathfrak{P}(V)$$

(de toevoeging: $A \rightarrow \varphi_A$ is 1-1-duidig en òp) en uit (2) volgt dat

$$|\Phi| = 2^{|V|}.$$

Dus ook

$$|\mathfrak{P}(V)| = 2^{|V|}.$$

Gevolg: Voor elk kardinaalgetal $\mathfrak{n}$ geldt

$$2^{\mathfrak{n}} > \mathfrak{n}$$

(vgl. stelling § 10).

Opmerking: Indien V eindig is, $|V| = n$, dan heeft V dus 2^n deelverzamelingen.
Dit kan men natuurlijk in dit geval ook langs andere weg bewijzen (bijv. door volledige inductie).

§ 17. Stelling: Indien n een eindig kardinaalgetal, $\mathfrak{a}$ het aftelbare kardinaalgetal, en $\mathfrak{c}$ het continue kardinaalgetal is, dan geldt:

a. $n^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ (indien $n \neq 1$)
b. $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}$
c. $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$
d. $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$
e. $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$

Bewijs:
a. (i) Zij $n = 2$.
Indien N de verzameling der natuurlijke getallen is, dan is $2^{\mathfrak{a}}$ het kardinaalgetal van de verzameling $\{0,1\}^N$;
$\{0,1\}^N$ is de verzameling van alle rijtjes $(p_1, p_2, p_3, \dots)$ ($p_i = 0$ of 1) en deze verzameling is aequivalent met de verzameling V van alle duale breuken $0,p_1p_2p_3\dots$ ($p_i = 0$ of 1) tussen 0 en 1 (indien men twee verschillende duale breuken, die hetzelfde reële getal voorstellen nu inderdaad als verschillend beschouwt).

Indien twee verschillende duale breuken echter eenzelfde reëel getal voorstellen, is dit getal zeker rationaal; hieruit volgt gemakkelijk, dat dus

$$V \sim V_0 \cup C,$$

waarin C het continuum, en V_0 een verzameling van rationale getallen is.

Derhalve is

$$|V| = |V_0| + \mathfrak{c},$$
$$= \mathfrak{c} \qquad (\text{want } |V_0| \leq \mathfrak{a}).$$

Dus: $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$.

(ii) Voor willekeurige $n > 1$ bepale men een natuurlijk getal k, zodanig dat

$$2 \leqq n < 2^k;$$

hieruit leidt men af, dat

$$2^{\mathfrak{a}} \leqq n \leqq (2^k)^{\mathfrak{a}} = 2^{k.\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}} \;,$$

dus

$$n^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$$

(overigens kan men ook dezelfde redenering geven als voor $n = 2$, door nu i.h.a. n-ale breuken te beschouwen).

<u>b</u>. stelling § 14, <u>b</u>.

<u>d</u>. stelling § 14, <u>e</u>.

<u>c</u>. + <u>e</u>. We bewijzen eerst <u>e</u>:

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}.\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c} \;,$$

en dan <u>c</u>.:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = (2.\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}}.\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}.\mathfrak{a}}.\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = (2^{\mathfrak{a}}.\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$$
$$= (\mathfrak{c}.\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

<u>Opmerking</u>: Wat de andere combinaties betreft, merken we alleen op dat

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{a}.\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$$
$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = (2.\mathfrak{a})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}.\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}.\mathfrak{c}}.\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{c}}.\mathfrak{a}) =$$
$$= (\mathfrak{c}.\mathfrak{a})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Colloquium Verzamelingenleer

Zevende bijeenkomst: 6 februari 1963
Spreekster: Mevr. A.B. Paalman - de Miranda

§ 18. Definitie: Onder een lineaire ordening van een verzameling A verstaat men een deelverzameling $\prec$ van $A \times A$ (in plaats van $(x,y) \in \prec$ schrijft men $x \prec y$) met de volgende eigenschappen

1° $\forall x,y,z$: $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$

2° $\forall x,y$ $(x \neq y)$: $x < y \vee y < x$

3° $\forall x$: $\neg (x < x)$

4° $\forall x,y$: $x < y \rightarrow \neg (y < x)$

Een (lineair) geordende verzameling is een verzameling waarin een lineaire ordening is gedefinieerd.
Indien A een geordende verzameling is, dan heet a het eerste element (resp. het laatste element) van A indien $\forall x$ $(x \in A\ x \neq a)$: $a < x$ [resp. $\forall x$ $(x \in A\ x \neq a)$: $x < a$].

Voorbeeld: 1. De verzameling der natuurlijke getallen $\{1,2,3\ldots\}$ geordend volgens opklimmende grootte der elementen is een geordende verzameling.
2. De verzameling der natuurlijke getallen $\{\ldots,3,2,1\}$ geordend volgens afdalende grootte der elementen. Hier is dus $a < b$ als a groter is dan b.

Definitie: Zij f een functie die een verzameling X afbeeldt in een verzameling Y.
f heet monotoon t.o.v. een ordening $<$ van X en een ordening $\prec$ van Y indien $f(a) \prec f(b)$ voor alle a en b uit X die voldoen aan $a < b$.

Opmerking. We zullen de ordeningsrelatie in alle verzamelingen met hetzelfde teken $<$ aangeven.

Definitie: Een geordende verzameling M heet gelijkvormig met een geordende verzameling N, indien er een monotone functie f bestaat met $\mathfrak{D}f = M$ $\mathfrak{R}f = N$. Notatie: $M \simeq N$.

Opmerking: $M \simeq N$ impliceert $M \sim N$, daar een monotone functie steeds 1-1 duidig is. Immers als $a \neq b$, dan $a < b \vee b < a \Rightarrow$

$$f(a) < f(b) \vee f(b) < f(a) \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

Het is duidelijk dat de relatie $\simeq$ aan de reflexieve, de symmetrische en de transitieve eigenschap voldoet en dus een klasse indeling van de geordende verzamelingen bewerkt.

Definitie: De bij de geordende verzameling V behorende klasse van onderling gelijkvormige verzamelingen heet het orde-type van V.

Voorbeeld 1: Alle eindige geordende verzamelingen met hetzelfde kardinaalgetal n zijn gelijkvormig en hebben dus hetzelfde orde-type. Men kan in dit geval het orde-type dus met het kardinaalgetal n aangeven.

2. Het orde-type van de natuurlijke getallen $\{1,2,3\dots\}$, geordend volgens opklimmende grootte, wordt aangegeven met ω.
ω^* is het orde-type van $\{\dots 4,3,2,1\}$.

Is M een geordende verzameling met orde-type μ en ordeningsrelatie $<$, dan wordt met μ^* aangegeven het orde-type van de verzameling M met ordeningsrelatie $<^*$, waarbij

$$x <^* y \leftrightarrow y < x.$$

3. Het orde-type van de rationale getallen geordend volgens opklimmende grootte wordt aangegeven met η.
λ is het orde-type van de reële getallen geordend volgens opklimmende grootte.

Stelling 1. Laat N een verzameling zijn en M een geordende verzameling met $M \sim N$. Dan kan N zo geordend worden dat $M \simeq N$.

Bewijs. Daar $M \sim N$ bestaat er een 1-1 duidige functie f met $\mathfrak{D}f = M$ en $\mathfrak{R}f = N$. Definieer nu voor n_1 en n_2 uit N $n_1 \prec n_2$ als $f^{-1}(n_1) < f^{-1}(n_2)$.
$\prec$ is dan een lineaire ordening, zó dat f een monotone functie is van de geordende verzameling M op de geordende verzameling N.

Stelling 2. Voor twee gelijkvormige geordende verzamelingen geldt: Zij bezitten beide een eerste (resp. laatste) element of zij bezitten beide geen eerste (resp. laatste) element.

Bewijs: evident.

Opmerking: Als M een geordende verzameling is, dan is ook iedere deelverzameling M^* van M geordend door $x < y$ in M^* als $x < y$ in M.

Uit st.2 volgt dat de verzamelingen $\{1,2,3,\dots\}$ en $\{\dots 4,3,2,1\}$ niet gelijkvormig zijn.

Daar uit $M \simeq N$ volgt $M \sim N$, hoort bij ieder orde-type μ een kardinaalgetal, dat wij met $|\mu|$ zullen aangeven.
Uit $\mu = \nu$ volgt dus $|\mu| = |\nu|$.
Verder is $\omega \neq \eta$, maar $|\omega| = |\eta| = \alpha$.

§ 19. Indien M en N 2 disjuncte geordende verzamelingen zijn, dan is met de geordende verzameling $V = M \cup N$ altijd bedoeld de verzameling M voorzien van een ordening die gegeven is door

1^o $m_1 < m_2$ als $m_1, m_2 \in M$ en $m_1 < m_2$ in M

2^o $n_1 < n_2$ als $n_1, n_2 \in N$ en $n_1 < n_2$ in N

3^o $m < n$ voor alle $m \in M$ en $n \in N$.

<u>Stelling 1.</u> Als $M_1 \simeq M_2$ en $N_1 \simeq N_2$ dan is als $M_1 \cap N_1 = \emptyset$ en $M_2 \cap N_2 = \emptyset$, $M_1 \cup N_1 \simeq M_2 \cup N_2$.

<u>Bewijs</u>: Zij f een monotone functie van M_1 op M_2 en g een monotone functie van N_1 op N_2.

Dan is de functie φ gedefinieerd door $\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & x \in M_1 \\ g(x) & x \in N_1 \end{cases}$

een monotone functie van $M_1 \cup N_1$ op $M_2 \cup N_2$.

Dus $M_1 \cup N_1 \simeq M_2 \cup N_2$.

Uit st.1 volgt dat de volgende definitie zin heeft.
<u>Definitie</u>: Onder de som $\alpha + \beta$ van 2 orde-typen α en β verstaat men het orde-type van $M = M_1 \cup M_2$, waarbij M_1 en M_2 disjuncte geordende verzamelingen zijn met orde-type resp. α en β.

Uit de definitie volgt dat $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.
<u>Stelling 2.</u> Zijn α, β en γ willekeurige orde-typen dan geldt de associatieve wet

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

<u>Bewijs</u>: Dit volgt onmiddellijk uit het feit dat als A, B en C 3 onderling disjuncte geordende verzamelingen zijn, $(A \cup B) \cup C \simeq A \cup (B \cup C)$.

Voorbeeld. Zij M de geordende verzameling $\{2,3,4\ldots\}$ en N de verzameling $\{1\}$. M heeft dan orde-type ω en N orde-type 1.
$\omega+1$ is dus het orde-type van de verzameling $M \cup N = \{2,3,4\ldots,1\}$.
$1+\omega$ is het orde-type van de verzameling $\{1,2,3,4\ldots\}$ dus $= \omega$.
Dus $1+\omega \neq \omega+1$ daar $M \cup N$ een laatste element heeft en $N \cup M$ niet.
De optelling is dus niet commutatief.

Stelling 3. a) $n + \omega = \omega$ voor elk eindig orde-type n.
b) $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$ zijn alle verschillende orde-typen
c) $\omega^* + n = \omega^*$
d) $\omega^*,\ 1+\omega^*,\ 2+\omega^* \ldots$ zijn alle verschillende orde-typen.

Bewijs. a) n is het orde-type van $\{1,2,\ldots,n\}$
ω is het orde-type van $\{n+1, n+2, \ldots\}$
Dus $n+\omega$ is het orde-type van $\{1,2,\ldots\} \Longrightarrow n+\omega = \omega$.

b) Stel $0 \leq m < n$ en $\omega+m = \omega+n$.
Dan moet in $\omega+m$ een element voorkomen, waar precies n-1 elementen achter staan. Tegenspraak.

c) en d) Geheel analoog aan a) en b).

Definitie: Indien $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ een geordende familie van verzamelingen is (d.w.z. I geordend en elke M_i geordend) die twee aan twee disjunct zijn, dan wordt met de geordende verzameling $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ altijd bedoeld de verzameling M voorzien van een ordening die gegeven is door

1^o) m_i^1 en $m_i^2 \in M_i$ dan $m_i^1 < m_i^2$ als $m_i^1 < m_i^2$ in M_i (alle i)

2^o) $m_i \in M_i$ $m_j \in M_j$ en $i < j$ (in I) dan $m_i < m_j$.

Definitie: Indien $\{\alpha_\nu\}_{\nu \in N}$ een familie van orde-typen is, met N een geordende verzameling, dan verstaat men onder de som van de familie orde-typen $\sum_{\nu \in N} \alpha_\nu$, het orde-type van de geordende verzameling $M = \sum_{\nu \in N} M_\nu$, indien $\{M_\nu\}_{\nu \in N}$ een familie van onderling disjuncte geordende verzamelingen is, zodanig dat het orde-type van $M_\nu = \alpha_\nu$ voor alle $\nu \in N$.

Evenals in stelling 1 kan men makkelijk nagaan dat deze definitie onafhankelijk is van de keuze van de verzamelingen M_ν.

§ 20. Indien $\mathcal{M} = \{M_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ een eindige familie van geordende verzamelingen is, dan wordt met de geordende verzameling $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$ altijd bedoeld de verzameling M voorzien van een ordening die gegeven is door $(m_1, m_2, \ldots, m_n) < (m_1^*, m_2^*, \ldots m_n^*)$ $m_i, m_i^* \in M_i$ indien voldaan is aan

1° $m_1 < m_1^*$ in M_1 of aan

2° $m_i = m_i^*$ $1 \leqslant i \leqslant k-1$ $m_k < m_k^*$ in M_k voor zekere k.

Men gaat gemakkelijk na dat als $\mathcal{M} = \{M_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ en $\mathcal{N} = \{N_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ twee eindige families van geordende verzamelingen zijn met

$M_i \simeq N_i$ voor $i = 1,2,\ldots,n$, dan geldt

$$\prod_{i=1}^{n} M_i \simeq \prod_{i=1}^{n} N_i \ .$$

Hieruit volgt dat de volgende definitie zin heeft.

<u>Definitie</u>: Onder het product $\mu_n, \mu_{n-1} \cdot \mu_{n-2} \cdots \mu_1$ van eindig veel orde-typen verstaat men het orde-type van de verzameling $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$, indien M_i een geordende verzameling is met orde-type μ_i voor alle $i = 1,2,\ldots n$.

Uit de definitie volgt dat $|\alpha . \beta| = |\alpha| . |\beta|$.

<u>Stelling 1.</u> Zijn α, β en γ willekeurige orde-typen dan geldt
$\alpha . \beta . \gamma = \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

<u>Bewijs</u>:

Zijn A,B en C drie verzamelingen met orde-type resp. α, β en γ.
Dan is $C \times B \times A \simeq (C \times B) \times A \simeq C \times (B \times A)$.
Hieruit volgt $\alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

<u>Stelling 2.</u> Zij N een geordende verzameling met orde-type μ en $\{\alpha_n\}_{n \in N}$ een familie van gelijke orde-typen: $\alpha_n = \alpha$ voor alle $n \in N$.
Dan geldt $\sum_{n \in N} \alpha_n = \alpha . \mu$.

<u>Bewijs</u>:

Zij M een geordende verzameling met orde-type α .
Zij voorts $M_n = \{(n,m)\}_{m \in M}$ en $(n,m_1) < (n,m_2)$ als $m_1 < m_2$ in M.
Dan is $\{M_n\}_{n \in N}$ een familie van onderling disjuncte geordende verzamelingen met orde-type $M_n = \alpha = \alpha_n$

$$\bigcup_{n\in N} M_n = \{(n,m)\}_{\substack{n\in N\\ m\in M}} \quad \text{, waarbij}$$

$(n_1,m_1) < (n_2,m_2)$ als $n_1 < n_2$ in N

$(n_1,m_1) < (n_2,m_2)$ als $n_1 = n_2$ $m_1 < m_2$ in M.

Hieruit volgt dat $\bigcup_{n\in N} M_n = N.M \Rightarrow \sum_{n\in N} \alpha_n = \alpha.\mu$.

Stelling 3. a) $n.\omega=\omega$

b) $\omega.1 = \omega$, $\omega.2$, $\omega.3...$ zijn alle verschillende orde-typen.

Bewijs:

a) $2.\omega = 2+2+2+...$ is het orde-type van bijvoorbeeld de verzameling $\{a_1,b_1,a_2,b_2,...\}$. Dus $2.\omega=\omega$. Evenzo $n.\omega=\omega$.

b) $\omega.2 = \omega+\omega$ is het orde-type van de verzameling $\{1,2,3,... \quad -1,-2,-3...\}$. Dus: $\omega.2 \neq \omega$.
Evenzo $\omega.n \neq \omega.m$.

Gevolg: Voor $n \neq 1$ is $n.\omega \neq \omega.n$.
De commutatieve wet geldt dus niet.

Stelling 4: Zijn α, β en γ willekeurige orde-typen dan geldt $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Bewijs:

Laat A,B en C geordende verzamelingen zijn met orde-type resp. α, β en γ, en zij $B \cap C = \emptyset$;
$\alpha(\beta+\gamma)$ is het orde-type van $(B \cup C) \times A = \{(x,a)\}_{\substack{x\in B\cup C\\ a\in A}}$

met $(x_1,a_1) < (x_2,a_2)$ als $x_1 \in B$, $x_2 \in C$
of als $x_1,x_2 \in B$ en $x_1 < x_2$ in B
of als $x_1,x_2 \in C$ en $x_1 < x_2$ in C
of als $x_1 = x_2$ en $a_1 < a_2$ in A.
Men gaat nu gemakkelijk na dat $BA \cup CA = \{(x,a)\}_{\substack{x\in B\cup C\\ a\in A}}$
op dezelfde wijze geordend is.

Voorbeeld:

$(\omega+1).2 = (\omega+1) + (\omega+1) = \omega + (1+\omega) + 1 = \omega + \omega + 1 = \omega.2 + 1$.
$\omega.2 + 1.2 = \omega.2 + 2$.
Men gaat gemakkelijk na dat $\omega.2+1 \neq \omega.2+2$. De 2^e^ distributieve wet geldt dus niet altijd.

Colloquium Verzamelingenleer

Achtste bijeenkomst: 20 februari 1963

Spreker: de heer N. Koster

§ 19. Vraagstukken

1. Laat N_i de verzameling van de i-vouden in de verzameling N der natuurlijke getallen voorstellen.

a. Voor welke i,j,k geldt dan $N_i \quad N_j = N_k$?

b. $\bigcup_p N_p =$ (p doorlope alle priemgetallen)

c. $\bigcap_p N_p =$

d. Gegeven de toevoeging $f : N \rightarrow N$. gedefinieerd door $f1 = 1$, $fn_p = p$ als $n_p \in N_p$ en voor alle priemgetallen p.
Is f een functie van N in N (d.w.z. met $\mathscr{D}f = N$, $\mathscr{R}f = N$)?
Geef een aftelbare deelverzameling $X \subset N$ aan waarvoor geldt dat de beperking f_x van de toevoeging f tot die deelverzameling X een functie naar N is; dus zo, dat $f_x : X \rightarrow N$ een functie is.
Geldt voor elke X met deze eigenschappen dat f_x één-éénduidig is?

2. Schrijf N als de vereniging van aftelbaar veel disjuncte deelverzamelingen elk met aftelbaar veel elementen.

3. Het begrip functie (p.12) is een bijzonder geval van het begrip relatie. Laat A en B twee gegeven verzamelingen zijn. Een deelverzameling R van $A \times B$ heet een <u>relatie</u> tussen de elementen van A en de elementen van B. Is het geordend paar (a,b) element van R dan schrijven we ook wel aRb (a staat in de relatie R tot b).
Aan welke voorwaarden moet een relatie R voldoen wil het een functie zijn van $A \rightarrow B$?
Is A = B dan kunnen we het begrip equivalentierelatie (p.7) terugkrijgen door te definiëren: $R \subset A \times A$ is een equivalentierelatie op $A \times A$ (of op A) als
(i) $(a,a) \in R$ voor alle $a \in A$ (reflexieve eigenschap)
(ii) $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$ (symmetrische eigenschap)
(iii) $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$ (transitieve eigenschap).

Opgave: Zoek alle equivalentierelaties op $A \times A$ als $A = 1,2,3$.
Welke van deze zijn ook functies van A naar A?

4. Gegeven de verzameling $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$. We beschouwen een viertal relaties op A gedefinieerd door: R is de verzameling van alle paren (a,b) uit $A \times A$ die voldoen aan:

(i) $a-b \leqslant 0$

(ii) $a \leqslant b$

(iii) $a+b \leqslant 0$

(iv) $|a| - |b| = 0$.

Onderzoek deze relaties achtereenvolgens op reflexiviteit, symmetrie, transitiviteit en equivalentie.

5. Gegeven $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ met de relatie aRb gedefinieerd door: $aRb \Leftrightarrow a-b =$ 6-voud.
Is R reflexief, symmetrisch, transitief? Is R een equivalentierelatie?

6. Laat f een functie zijn van een verzameling X naar een verzameling Y: $f : X \rightarrow Y$. We noemen f een <u>epimorfisme</u> als geldt dat elk element y Y het beeld onder f is van tenminste één element in X. f heet dan ook wel een functie van X op Y. We noemen f een <u>monomorfisme</u> als f één-éénduidig is. Laat nu $g : Y \rightarrow X$ een tweede functie zijn. Bewijs

(i) als $gf = 1$ (d.w.z. als voor alle $x \in X$ geldt $gfx = x$), dan is f een monomorfisme en g een epimorfisme.

(ii) Dan en slechts dan is f een monomorfisme als voor alle $A,B \subset X$ geldt
$f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.

(iii) Dan en slechts dan is f een monomorfisme als voor alle $A \subset X$ geldt
$f[X \setminus A] \subset Y \setminus f[A]$.

(iv) Dan en slechts dan is f een epimorfisme als voor alle $A \subset X$ geldt
$Y \setminus f[A] \subset f[X \setminus A]$.

7. Bewijs: $(\bigcup_i A_i) \times (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_j)$ voor elk tweetal families verzamelingen $\{A_i\}_i$ en $\{B_j\}_j$.

8. Bewijs dat de machtsverzameling van een eindige verzameling K met kardinaalgetal k, het kardinaalgetal 2^k heeft.

9. Bewijs dat elke verzameling disjuncte intervallen op de rechte ten hoogste aftelbaar is.

10. Zij $\{\aleph_n\}_{n \in N}$ een familie kardinaalgetallen waarin geen grootste voorkomt. Dan is $\sum \aleph_n > \aleph_{n_0}$, voor alle $n_0 \in N$.

11. Bewijs: De verzameling van alle eindige deelverzamelingen van een verzameling V met aftelbare of continue machtigheid heeft hetzelfde kardinaalgetal als V.

12. We noemen een verzameling V met elementen x,y,z,... een ring als er een vermenigvuldiging . en een optelling + bestaat tussen de elementen van V, zodanig, dat aan de volgende rekenregels is voldaan:

$$x+y = y+x$$
$$x+(y+z) = (x+y)+z$$
$$\exists\, 0;\ \text{met } x+0 = x$$
$$\forall x,y,\ \exists z \text{ met de eigenschap } z=x-y\ (x=z+y)$$
$$x.y = y.x$$
$$x(y.z) = (x.y).z$$
$$x.(y+z) = x.y+x.z\ .$$

Bewijs dat als we voor . nemen $\cap$ en voor + nemen Δ, alle deelverzamelingen van een verzameling een ring vormen.
Laat zien dat dit niet het geval is als we voor . nemen $\cap$ en voor + de bewerking $\cup$.

13. We zeggen dat een familie van verzamelingen F monotoon is als voor elk paar verzamelingen X,Y uit F geldt dat òf $X \subset Y$ òf $Y \subset X$. Een natuurlijke ordening van deze familie is de ordening m.b.t. de relatie $X \subset Y \neq X$.
Bewijs dat elke geordende verzameling V gelijkvormig is met de een of andere familie van deelverzamelingen van V.

14. Een deelverzameling G van een geordende verzameling V heet dicht in V als tussen elk tweetal elementen x en y van V een element z te vinden is uit G.
Bewijs dat een verzameling van het type van de reële getallen een dichte verzameling bevat die aftelbaar is.

Aanvullende literatuur:

P.R. Halmos: Naive set theory, Van Nostrand 1960.

K. Kuratowski: Set theory and topology. Pergamon 1961.

Eenvoudige vraagstukken zijn te vinden in het Amerikaanse collegeboek:

J.F. Gray: Sets, relations and functions.

<u>Colloquium Verzamelingenleer</u>

Negende bijeenkomst: 3 april 1963

Spreker: M.A. Maurice

§ 22. <u>Definitie</u>: Indien A een geordende verzameling is, en B is een deelverzameling van A, dan heet een element $b \in B$ <u>het eerste element van B</u>, indien

$$\forall x (x \in B,\ x \neq b) : b < x.$$

<u>Definitie</u>: Een geordende verzameling A heet <u>welgeordend</u>, indien iedere niet-lege deelverzameling van A een eerste element heeft.

<u>Stelling 1</u>: Is B een deelverzameling van een welgeordende verzameling A, en is er in A ten minste één element dat groter is dan alle elementen van B, dan is er ook een kleinste element in A, dat groter is dan alle elementen van B.

<u>Bewijs</u>: De verzameling $\{x \mid \forall b (b \in B) : b < x\}$ is een niet-lege deelverzameling van A, die dus een eerste element heeft.

<u>Gevolg</u>: Ieder element van een welgeordende verzameling A - behalve het eventuele laatste - heeft een onmiddellijke opvolger .

<u>Stelling 2</u>: Een deelverzameling B van een welgeordende verzameling A is (t.o.v. de ordeningsrelatie die uit de ordeningsrelatie in A wordt verkregen door beperking tot B) ook welgeordend.

<u>Bewijs</u>: evident.

<u>Stelling 3</u>: Indien A welgeordend is, en $A \simeq B$, dan is ook B welgeordend.

<u>Bewijs</u>: evident.

Op grond van stelling 3 zijn de verzamelingen van een bepaald orde-type òf alle welgeordend òf alle niet-welgeordend. Dit maakt de volgende definitie mogelijk:

<u>Definitie</u>: Een ordinaalgetal is een ordetype van een welgeordende verzameling.

<u>Opmerking</u>: Daar een geordende eindige verzameling uiteraard welgeordend is, is elk eindig orde-type een ordinaalgetal.

§ 23. Stelling 1: Indien $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ een welgeordende familie is van welgeordende verzamelingen (d.w.z. I welgeordend en iedere M_i welgeordend), die twee aan twee disjunct zijn, dan is de, volgens definitie blz.30 geordende, verzameling $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ een welgeordende verzameling.

Bewijs: Zij M' een niet-lege deelverzameling van M.
Zij $I' = \{ i \mid i \in I,\ M_i \cap M' = \emptyset \}$; dan is I' een niet-lege deelverzameling van I.
Omdat I welgeordend is, heeft I' een eerste element; zeg i_o.
Zij nu $M^* = M_{i_o} \cap M'$; dan is M^* een niet-lege deelverzameling van M_{i_o}.
Daar M_{i_o} welgeordend is, heeft M^* een eerste element in M_{i_o}; zeg m^*.
Het is duidelijk, dat m^* het eerste element is van M' in M.

Stelling 2: Indien $\{\alpha_\nu\}_{\nu \in N}$ een welgeordende familie van ordinaalgetallen is (dus N welgeordend), dan is de, op blz.30 gedefinieerde, som $\sum_{\nu \in N} \alpha_\nu$ een ordinaalgetal.
Bewijs: stelling 1.
Stelling 3: Het product van eindig veel ordinaalgetallen (gedefinieerd op blz.31) is weer een ordinaalgetal.
Bewijs: Het is voldoende aan te tonen dat het product van twee ordinaalgetallen, bijv. α en μ, weer een ordinaalgetal is; dit volgt echter uit § 20 (blz.31), stelling 2 en § 23, stelling 2.

§ 24. Definitie: Een deelverzameling B van een welgeordende verzameling A heet een beginstuk van A, indien $\forall b (b \in B) : \{ x \mid x < b \} \subset B$.

Opmerking: De verzameling A heet dus zelf ook een beginstuk.
Lemma: Zij A een welgeordende verzameling.
(i) Voor iedere $a \in A$ is $B(a) \equiv \{ x \mid x < a \}$ een beginstuk van A
(ii) Ieder echt beginstuk B van A (d.w.z. ieder beginstuk $\neq$ A) is van de vorm $\{ x \mid x < a \}$.

Bewijs: (i) evident
(ii) Alle elementen van de niet-lege verzameling $A \setminus B$ zijn groter dan die van B; $A \setminus B$ heeft echter een eerste element, zeg a; dan is echter $B = B(a)$.

Stelling 1: (i) Is B een beginstuk van de welgeordende verzameling A, en is G een beginstuk van B, dan is G ook een beginstuk van A.

(ii) Zijn B en G beide beginstukken van een welgeordende verzameling A, dan is òf B = G òf één van beide is een beginstuk van de andere.

Bewijs: (i) duidelijk

(ii) als B=A en/of G=A, dan is de bewering triviaal; zij dus $B \neq A$, $G \neq A$; dan is

$$B = B(a_1),\ G = B(a_2)$$

voor zekere $a_1, a_2 \in A$;

als $a_1 = a_2$, dan is B = G; als $a_1 \neq a_2$ - dus bijv. $a_1 < a_2$ - dan is $\{x \mid x < a_1\} \subset \{x \mid x < a_2\}$, d.w.z. $B \subset G$, en B is een beginstuk van G.

Stelling 2: Laat A en B twee gelijkvormige welgeordende verzamelingen zijn, en zij f een monotone afbeelding van A op B.

Indien nu P een beginstuk is van A, dan is $f[P]$ een beginstuk van B.

Bewijs: duidelijk.

Stelling 3: Zij A een welgeordende verzameling, en zij $B \subset A$.

Zij voorts $A \cong B$, zodat een monotone functie f bestaat, met $\mathfrak{D}f = A$ en $\mathfrak{R}f = B$. Dan geldt:

$$\forall a (a \in A) : a \leqq f(a).$$

($a \leqq b$ betekent $a < b$ of $a=b$)

Bewijs:

Onderstel dat $\{a \mid a \in A \text{ en } f(a) < a\} \neq \emptyset$;

dan is er een eerste element van die verzameling, bijv. a_o.

Dan is: $f(a_o) < a_o$,

en dus: $f(f(a_o)) < f(a_o)$;

maar dit is een contradictie, daar $a_o' = f(a_o)$ enerzijds kleiner is dan a_o, en anderzijds voldoet aan $f(a_o') < a_o'$.

Stelling 4: Een welgeordende verzameling A is met geen enkele van zijn echte beginstukken, noch met een echt beginstuk van enige deelverzameling, gelijkvormig.

Bewijs: Indien $\bar{A}$ deelverzameling is van A, en indien $A \cong \bar{B}(\bar{a})$ - waarin $\bar{B}(\bar{a}) = \{x \mid x \in \bar{A} \text{ en } x < \bar{a}\}$ voor zekere $\bar{a} \in \bar{A}$ -, dan bestaat er een monotone functie f, met $\mathfrak{D}f = A$ en $\mathfrak{R}f = \bar{B}(\bar{a})$; maar dan volgt uit $f(\bar{a}) \in \bar{B}(\bar{a})$, dat $f(\bar{a}) < \bar{a}$, in strijd met stelling 3.

Gevolg: Twee verschillende beginstukken van dezelfde welgeordende verzameling zijn nooit gelijkvormig.
(Dit volgt uit stelling 1 (ii) + stelling 4.)

Stelling 5: Is A welgeordend, en is $A \simeq B$, dan bestaat er slechts één monotone afbeelding van A op B.
In het bijzonder kan A slechts op één manier monotoon op zichzelf worden afgebeeld.

Bewijs: (i) Als f een monotone afbeelding is van A op zichzelf, dan geldt hetzelfde voor f^{-1}; op grond van stelling 3 is dan:

$$\forall a(a \in A) \ : \ a \leqq f(a)$$
$$\forall a(a \in A) \ : \ a \leqq f^{-1}(a), \text{ dus } f(a) \leqq a;$$

dit betekent: $f(a) = a$ voor alle $a \in A$;

(ii) Indien f en g twee monotone functies zijn met $\mathfrak{D}f = \mathfrak{D}g = A$ en $\mathfrak{R}f = \mathfrak{R}g = B$, dan is $h = f^{-1} \circ g$ een monotone functie met $\mathfrak{D}h = \mathfrak{R}h = A$; op grond van (i) is dan $h(a) = a$ voor alle $a \in A$, dus ook $g(a) = f(a)$ voor alle $a \in A$.

§ 25. Indien men in § 24, stelling 2, voor P een echt beginstuk van A neemt, dan is het duidelijk, dat $f[P]$ een echt beginstuk is van B. Op grond hiervan heeft de volgende definitie zin:

Definitie: Een ordinaalgetal μ heet groter dan een ordinaalgetal ν ($\mu > \nu$) - of ook: ν heet kleiner dan μ -, indien een welgeordende verzameling met ordinaalgetal ν gelijkvormig is met een echt beginstuk van een welgeordende verzameling met ordinaalgetal μ .

Stelling 1: Als μ, ν en π ordinaalgetallen zijn, dan geldt:
Uit $\mu < \nu$ en $\nu < \pi$ volgt: $\mu < \pi$

Bewijs:
Laat M,N en P welgeordende verzamelingen zijn met ordinaalgetal resp. μ, ν en π ; dan is M gelijkvormig met een echt beginstuk van N en N is gelijkvormig met een echt beginstuk van P; daaruit volgt dat M gelijkvormig is met een echt beginstuk van P.

Het is nu duidelijk, dat van de drie relaties, die tussen twee ordinaalgetallen μ en ν kunnen bestaan, nl.

$$\mu > \nu \quad , \quad \mu = \nu \quad , \quad \mu < \nu \qquad \qquad ...(1)$$

er ten hoogste één juist is;

immers: $\mu > \nu$ en $\mu = \nu$ impliceert $\mu > \mu$
$\mu = \nu$ en $\mu < \nu$ impliceert $\mu > \mu$
$\mu > \nu$ en $\mu < \nu$ impliceert $\mu > \mu$ (stelling 1);

in alle drie gevallen heeft men dus, op grond van § 24, stelling 4, en de definitie van "groter dan" een tegenspraak.

In het volgende zullen we nu aantonen, dat tussen twee ordinaalgetallen μ en ν ook altijd ten minste één der drie relaties (1) geldt; d.w.z. dat elk tweetal ordinaalgetallen <u>vergelijkbaar</u> is.

We definiëren, als μ een ordinaalgetal is,

$$W_\mu = \{\nu \mid \nu \text{ is een ordinaalgetal en } \nu < \mu\} \quad .$$
$$W_0 = \emptyset \ .$$

Als $\mu > 0$ dan is $W_\mu \neq \emptyset$, daar $0 \in W_\mu$ (0 is het ordinaalgetal van de, per definitie welgeordende, lege verzameling).

<u>Stelling 2</u>: Zij μ een ordinaalgetal.

(i) Alle ordinaalgetallen $\in W_\mu$ zijn onderling vergelijkbaar.

(ii) Ordent men nu W_μ volgens grootte der voorkomende ordinaalgetallen, dan is W_μ welgeordend met ordinaalgetal μ .

<u>Bewijs</u>:

(i) Neem $\nu, \tau \in W_\mu$; en laat N,T en M welgeordende verzamelingen zijn, met ordinaalgetal resp. ν, τ en μ . Dan is N (resp. T) gelijkvormig met een beginstuk M_1 (resp. M_2) van M. Uit § 24, stelling 1 (ii), volgt dan hetgeen te bewijzen is.

(ii) Zij M een welgeordende verzameling met ordinaalgetal μ . Definieer op de volgende wijze een afbeelding f van M in W :

<u>a</u>. Voor $a \in M$ zij f(a) het ordinaalgetal van het echte beginstuk B(a) van M;

b. f is een afbeelding òp W_μ; als immers $\alpha \in W_\mu$, dus $\alpha < \mu$, dan is α het ordinaalgetal van een echt beginstuk B(a) van M; maar dan is $\alpha = f(a)$.

c. tenslotte is f ook monotoon: als $a < b$ (in M) dan is B(a) een echt beginstuk van B(b), hetgeen betekent dat $f(a) < f(b)$.

M.a.w.: W_μ is gelijkvormig met M, en heeft dus het ordinaalgetal μ.

Stelling 3: Twee ordinaalgetallen μ en ν zijn altijd vergelijkbaar (d.w.z. òf $\mu < \nu$, òf $\mu > \nu$, òf $\mu = \nu$).

Bewijs: Beschouw $D = W_\mu \cap W_\nu$

1. D is een beginstuk zowel van W_μ als van W_ν; immers: als $\tau \in D$, dus $\tau \in W_\mu$ en $\tau \in W_\nu$, dan volgt voor elke $\kappa < \tau$, dat ook $\kappa \in W_\mu$ en $\kappa \in W_\nu$, dus $\kappa \in D$.

2. Indien $D \neq W_\mu$ en $D \neq W_\nu$, dan is er een eerste element μ_1 in W_μ dat niet tot D behoort, en een eerste element ν_1 in W_ν dat niet tot D behoort, terwijl dan bovendien

$$D = W_{\mu_1} \quad \text{en} \quad D = W_{\nu_1},$$

waaruit volgt, dat D zowel het ordinaalgetal μ_1 als het ordinaalgetal ν_1 heeft; m.a.w.: $\mu_1 = \nu_1$; contradictie.
Dit betekent dat D gelijk is aan ten minste één der twee verzamelingen W_μ, W_ν; hieruit volgt het gestelde.

Gevolg 1: Twee welgeordende verzamelingen zijn gelijkvormig, of de ène is gelijkvormig met een beginstuk van de andere.

Hieruit volgt onmiddellijk, dat voor twee kardinaalgetallen $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$, die door welgeordende verzamelingen kunnen worden gerepresenteerd, altijd ten minste één (en dus volgens stelling 1 op blz.11 ook: juist één) van de drie relaties $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} > \mathfrak{N}$ geldt.

Gevolg 2: Indien M deelverzameling is van de welgeordende verzameling N, dan geldt voor de ordinaalgetallen μ en ν van resp. M en N: $\mu \leq \nu$.

Bewijs: Indien $\mu > \nu$, dan is N gelijkvormig met een echt beginstuk van M, terwijl $M \subset N$; dit is in strijd met § 24, stelling 4. Op grond van stelling 3 is dus: $\mu \leq \nu$.

§ 26. Stelling 1: ω is het kleinste oneindige ordinaalgetal.

Bewijs:

We behoeven slechts aan te tonen dat iedere oneindige welgeordende verzameling V een beginstuk met ordinaalgetal ω heeft; dit gaat aldus: V heeft een eerste element v_1, v_1 heeft een onmiddellijke opvolger v_2, etc., v_i heeft een onmiddellijke opvolger v_{i+1} $(i=1,2,\ldots)$; het procédé breekt niet af, daar V oneindig is; V heeft dan het beginstuk $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$.

Stelling 2: Indien μ een ordinaalgetal is, dan is $\mu+1$ het onmiddellijk opvolgende ordinaalgetal.

Bewijs: duidelijk.

Stelling 3: Voor twee ordinaalgetallen μ en ν geldt dan en slechts dan $\mu < \nu$, als er een ordinaalgetal $\tau > 0$ bestaat, zodanig, dat $\mu + \tau = \nu$.

Bewijs: 1. Zij $\mu < \nu$ en laat M en N welgeordende verzamelingen zijn, resp. met ordinaalgetal μ en ν; M is dan gelijkvormig met een echt beginstuk N' en N. Nu is $N' \cup (N-N') = N$, zodat, als N-N' het ordinaalgetal τ heeft, $\mu + \tau = \nu$; hierin is $\tau > 0$ omdat $N-N' \neq \emptyset$.

2. Zij $\mu + \tau = \nu$, met $\tau > 0$. Laat nu M en T disjuncte welgeordende verzamelingen zijn, resp. met ordinaalgetal μ en τ; dan heeft $M \cup T$ het ordinaalgetal ν, en $\mu < \nu$ omdat M een echt $(T \neq \emptyset)$ beginstuk van $M \cup T$ is.